Correction Analyse dans $\mathbb{R}^n$ (DS 1)

Ex1

(1 pts)

① Un espace vectoriel normé est séparé si et seulement si $\forall\, x \neq y$ $(x \in E ; y \in E)$ il existe voisinage V_x et V_y tq : $V_x \cap V_y = \phi$.

(ici V_x : voisinage de x ; V_y : voisinage de y).

② Mq $\forall$ e.v.n E est séparé.

(3pts)

Soit E espace vectoriel normé, $\|\cdot\|$ est norme $\Rightarrow$ il y a distance d

$\forall x \in E ; y \in E$ tq $x \neq y \Leftrightarrow d(x,y) > 0$.

Soit $\varepsilon_1 = \dfrac{d(x,y)}{2}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{d(x,y)}{3}$

on a donc $\varepsilon_1 > 0$; $\varepsilon_2 > 0$.

$B(x,\varepsilon_1)$: boule ouverte est un voisinage de x

$B(y,\varepsilon_2)$: boule ———————————— y.

Nous allons : $B(x,\varepsilon_1) \cap B(y,\varepsilon_2) = \phi$.

En effet, si $B(x,\varepsilon_1) \cap B(y,\varepsilon_2) \neq \phi$.

Soit $z \in B(x,\varepsilon_1) \cap B(y,\varepsilon_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|x - z\| < \varepsilon_1 \\ \|y - z\| < \varepsilon_2 \end{cases}$$

$$d = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{d}{2} + \frac{d}{3} = \frac{5d}{6}$$

$\Leftrightarrow$ $d < \dfrac{5d}{6}$ (contradiction).

Ex2

Plusieurs methods à faire cet exercice.

① $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0,\ 1 \leq y \leq 2\} = \{0\} \times [1,2]$

(0.5)

a, A est fermé car $\{0\}$ fermée et $[1,2]$ est fermé.

$[1,2]$ fermé car $\forall$ suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $1 \leq u_n \leq 2$

(u_n) converge vers ℓ alors $\ell \in [1,2]$.

b, $C_{\mathbb{R}^2}(A) = \left(]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\right) \times \left(]-\infty,1[\cup]2,+\infty[\right)$

n'est pas fermé.

(0.5)

Soit $(u_n, v_n)_n \in \left(C_{\mathbb{R}^2}(A)\right)^n$ ici $\begin{cases} u_n = \frac{1}{n} \\ v_n = 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$

Alors $w_n = (u_n, v_n)_n$ est une suite convergente de $C_{\mathbb{R}^2}(A)$ mais

$$\lim_{n\to\infty} w_n = (0,1) \notin C_{\mathbb{R}^2}(A)$$

Alors $C_{\mathbb{R}^2}(A)$ n'est pas fermé $\Rightarrow$ A n'est pas ouvert.

0.5 c) Adhérence

$\bar{A} = A$ car A est fermé.

0.5 d) Intérieur $\mathring{A} = \overbrace{\{0\} \times [1,2]}^{\circ} = \emptyset \times]1,2[= \emptyset$

(2) $B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-1|<1 , |y-1|<1 \} \cup \{(0.2 ; 0.5)\}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<x<2 ; 0<y<2 \} \cup \{(0.2 ; 0.5)\}$

0.5 $= (]0,2[)^2 \cup \{(0.2 ; 0.5)\} = (]0,2[)^2$

a) B n'est pas fermé.

Soit $((u_n, v_n))_n \in B^n$ ici $w_n = (u_n, v_n) \in B \ \forall n \in \mathbb{N}$

0.5 $w_n = \left(\frac{1}{n} ; \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \to \infty} (0,0) \notin B$

b) $B = (]0,2[)^2$ ouvert car

$C_{\mathbb{R}^2} B$ est fermé.

0.5 En effet, $C_{\mathbb{R}^2} B = (]-\infty,0] \cup [2,+\infty[)^2$

Toutes les suites convergentes de $C_{\mathbb{R}^2}(B)$ cv dans $C_{\mathbb{R}^2} B$.

c) Adhérent

Tout d'abord, on montre que $\overline{]0,2[} = [0,2]$.

. En effet, Soit $A =]0,2[$; soit $M = [0,2]$

, $M \supset A$ et M fermé (tous les suites convergentes dans $[0,2]$ cv vers $\ell \in [0,2]$).

. $\forall x \in M \setminus A \Leftrightarrow x \in \{0 ; 2\}$

0.5 il existe une suite (u_n) avec $u_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\left(u_n = \frac{1}{n}\right)$ et $\lim u_n = 0$.

il existe une suite (v_n) avec $v_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\left(v_n = 2 - \frac{1}{n}\right)$ et $\lim v_n = 2$.

Alors $\bar{A} = [0,2]$

Ainsi $\bar{B} = [0,2]^2$

d) Intérieur.

0.25 On a $]0,2[$ ouvert donc $\mathring{\overbrace{]0,2[}} =]0,2[$. Ainsi $\mathring{B} = (]0,2[)^2$

(3) $C =]-5,-1[\cup]0,5] \cup \{6\}$

a) C n'est pas fermé.

0.5 Soit $u_n = -5 + \frac{1}{n}$ $\quad u_n \in C \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = -5 \notin C$

b) C n'est pas ouvert. Soit $x = 6 \in C$

$\forall r > 0, \quad B(6,r) \not\subset C$

0.5 $\forall r>0, \exists n \in \mathbb{N}$ tq. $\frac{1}{n} < r$ (ici : $6 + \frac{1}{n} \in B(6,r)$ mais $6 + \frac{1}{n} \notin C$.

car $\left|6 + \frac{1}{n} - 6\right| = \frac{1}{n} < r$

0.5 c) $\overline{C} = [-5,-1] \cup [0,5] \cup \{6\}$ $\quad$ ($C = A \cup B \cup D$)

$\Rightarrow \overline{C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{D}$).

0.5 d) $\mathring{C} =]-5,-1[\cup]0,5[\cup \emptyset =]-5,-1[\cup]0,5[$

Ex 3

~~[illegible]~~. $\ell^\infty(\mathbb{R})$ = l'ensemble des suites bornée dans $\mathbb{R}$

$$\nu(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

$$N(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\left(\frac{2^n+1}{2^n+2}\right)x_n\right|$$

(1) Mq $\frac{2^n+1}{2^n+2}$ est bornée

a) en effet $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 < \frac{2^n+1}{2^n+2} < 1$.

0.5 car $\begin{cases} 2^n+1 > 0 \\ 2^n+2 > 0 \end{cases}$ et $2^n+1 < 2^n+2$.

b) Trouver borne inf borne sup.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{2}{2^n}} = 1.$$

De plus $f(n) = \frac{2^n+1}{2^n+2} = 1 - \frac{1}{2^n+2}$ est strictement croissante

$$\left(2^n+2 \text{ croissante} \Rightarrow \frac{1}{2^n+2} \text{ décroissante} \Rightarrow 1-\frac{1}{2^n+2} \text{ croissante} \right)$$

0.5

donc $$f(n) = \frac{2^n+1}{2^n+2} \leqslant \lim_{n\to\infty} f(n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f(n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sup_{n\to\infty} f(n) = 1}$$

$f(n)$ est strictement croissante $\Rightarrow f(n) \geq f(0) = \dfrac{2^0+1}{2^0+2} = \dfrac{2}{3}$

0.5

$$\Rightarrow \boxed{\inf_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \frac{2}{3}}$$

2) Mq v et N sont des normes

① v est une norme.

a- $v(x) = 0 \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0 \Rightarrow |x_n| = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall x \in \ell^\infty(\mathbb{R})$

0.5

$\Rightarrow x_n = 0_{\ell^\infty(\mathbb{R})}$.

b- $v(\lambda x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda x_n| = |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = |\lambda| v(x)$

0.5

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \;\; \forall \; x = (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$

$\forall x \in \ell^\infty(\mathbb{R}), \;\; \forall y \in \ell^\infty(\mathbb{R}) \qquad x = (x_n)_n \;;\;\; y = (y_n)_n$

c- $v(x+y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(x_n+y_n)|$

1

Nous avons $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |x_n+y_n| \leq |x_n| + |y_n|$

$$\leq \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n|$$

$$= v(x) + v(y)$$

$\Rightarrow v(x)+v(y)$ est un majorant de $|x_n - y_n| \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

alors $\sup_n |x_n+y_n| \leq v(x)+v(y)$

$\Leftrightarrow v(x+y) \leq v(x) + v(y)$.

b) $N(x) = \sup_n \left(\left| \dfrac{2^n+1}{2^n+2} x_n \right| \right)$ est une norme.

a $\forall (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$. $\quad N(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2^n+1}{2^n+2} x_n = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$

0.5

car $\dfrac{2^n+1}{2^n+2} > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

b. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \;\; \forall \; x = (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$

0.5 $N(\lambda x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left| \frac{2^n+1}{2^n+2} (\lambda x_n) \right| \right) = |\lambda| \sup_n \left| \frac{2^n+1}{2^n+2} x_n \right| = |\lambda| N(x)$

c, $\forall\, x=(x_n)\in l^\infty(\mathbb{R})$, $\forall y=(y_n)\in l^\infty(\mathbb{R})$

$$N(x+y) = \sup_n \left| \frac{2^n+1}{2^n+2} (x_n+y_n) \right|$$

Comme on a, $\frac{2^n+1}{2^n+2} \cdot |x_n+y_n| \leq (|x_n|+|y_n|) \cdot \frac{2^n+1}{2^n+2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1 $\leq \sup_n \left| \frac{2^n+1}{2^n+2} x_n \right| + \sup_n \left| \frac{2^n+1}{2^n+2} y_n \right|$

$= N(x) + N(y)$

$\Rightarrow$ $N(x)+N(y)$ est un majorant de $\frac{2^n+1}{2^n+2} |x_n+y_n|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Alors $N(x+y) = \sup \left(\frac{2^n+1}{2^n+2} |x_n+y_n| \right) \leq N(x)+N(y)$.

3) Mq $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tq $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$

En effet, d'après question 1, nous avons $\frac{2}{3} \leq \frac{2^n+1}{2^n+2} < 1$

Alors $\forall (x_n)_n \in E$

0.5 $$\frac{2}{3}|x_n| \leq \left| \frac{2^n+1}{2^n+2} x_n \right| < |x_n|$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \sup_n |x_n| \leq \sup_n \left| \frac{2^n+1}{2^n+2} x_n \right| < \sup_n |x_n|$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$$ ici $\alpha = \frac{2}{3}$; $\beta = 1$

Ex4 $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$

1) $\|x\| = 0 \to x = 0$

il faut mq $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in E$

en effet, $\|0\| = \|0 \cdot x\| = |0| \cdot \|x\| = 0$.

Donc $\|0\| = \|x - x\| \leq \max(\|x\|, \|-x\|) = \max(\|x\|, \|x\|) = \|x\|$

Alors $\max(\|x\|, \|y\|) \leq \|x\| + \|y\| \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

1) en effet, $\|0\| = \|0.x\| = |0|.\|x\| = 0$.

1 Donc $\|0\| = \|x-x\| \leq \max(\|x\|, \|-x\|) = \max(\|x\|, \|x\|) = \|x\|$

2) En effet, vérifions 3 conditions.

1) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (énoncé)

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$ (énoncé)

1 3) $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E \Rightarrow x-z \in E$ et $z-y \in E$ car E est un e.v.

$\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$

$$\max(\|x\|, \|y\|) \leq \|x\| + \|y\| \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

↑ d'après 1) $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in E$

3) $\forall r > 0$; $\forall a \in E$

$\forall x \in B(a,r)$, $B(a,r) = B(x,r)$.

"$\subset$". Soit $y \in B(a,r)$.

$\|y-a\| < r$

Nous avons $\|y-x\| = \|y-a+a-x\|$

$\leq \max(\|y-a\|, \|x-a\|)$

1 Nous avons $\|y-a\| < r$ $(y \in B(a,r))$
$\|x-a\| < r$ (car $x \in B(a,r)$) $\Rightarrow \|y-x\| < r$

$\Rightarrow y \in B(x,r)$ Alors $B(a,r) \subset B(x,r)$

"$\supset$" Soit $y \in B(x,r) \Rightarrow \|y-x\| < r$

nous avons $\|y-a\| = \|y-x+x-a\| \leq \max(\|y-x\|, \|x-a\|) < r$

1 donc $y \in B(a,r)$ $\Rightarrow B(x,r) \subset B(a,r)$

4) $\forall r > 0, \forall \delta > 0$, $\forall x \in E, \forall y \in E$ si on a : $B(x,r) \cap B(y,\delta) \neq \emptyset$

Soit $z \in B(x,r) \cap B(y,\delta)$.

$z \in B(x,r) \Rightarrow B(x,r) = B(z,r)$ d'après question 3).

$z \in B(y,\delta) \Rightarrow B(y,\delta) = B(z,\delta)$.

2 Si $r \leq \delta$ nous avons $B(z,r) \subseteq B(z,\delta)$

alors $B(x,r) \subseteq B(y,\delta)$.

Si $r > \delta$ nous avons $B(z,r) \supset B(z,\delta)$

alors $B(x,r) \supset B(y,\delta)$