	Cycle préparatoire 2$^{\text{ème}}$ année **Devoir surveillé 1** *Abdessalam El Janati, Khaoula Guezguez, Ahmed Hajej*	
	Matière : **Séries**	*Date* : **Jeudi 5 novembre 2020**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 h 30 min**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1. [4 points]
Préciser la nature de chacune des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n\geqslant 1} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+\ln n)}} \qquad (3) \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)} \qquad (4) \sum_{n\geqslant 1} e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 2. [3 points]
Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes réels strictement positifs. Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Les séries de terme génŕal u_n et $\sqrt{u_n}$ respectivement sont de même nature.
2. Les séries de terme général u_n et $\ln(1+u_n)$ respectivement sont de même nature.

Justifier vos réponses : si l'affrmation est vraie, en donner une démonstration et si elle est fausse, produire un contre-exemple.

Exercice 3. [3.5 points]
On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, par $u_n = \frac{n}{(n^2-1)^2}$.

1. Etudier la convergence de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.
2. Décomposer le terme général u_n en fonction de $\frac{1}{(n+1)^2}$ et $\frac{1}{(n-1)^2}$.
3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

Exercice 4. [5 points]
On considère la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} [3,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(\ln x) \end{array}$$

1. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Quelle est la dérivée f de F ? Montrer que f est décroissante et positive sur $[3,+\infty[$.
2. On considère la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\ln n}$. Soit S_N la somme partielle d'ordre N. Encadrer S_N par deux intégrales.
3. En déduire un équivalent de S_N.

Exercice 5. [5.5 points]
Soit a et b deux réels. On considère la série nmérique :

$$\sum_{n\geqslant 1} (\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$$

1. Donner un développement asymptotique du terme général de cette série sous la forme :

$$\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = \alpha\ln(n) + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

   où α, β, γ sont des réels à déterminer en fonction de a et de b.
2. En déduire les valeurs de a et de b pour que la série converge.
3. Pour ces valeurs de a et de b, calculer alors $S_N = \sum_{n=1}^{N} (\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$.
4. En déduire la somme de la série.