Exercice 1 : questions de cours (5.25 points)

Partie 1 : définitions (2.25 points)

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N une application de E dans N. Sous quelles conditions N est-elle une norme sur E. (0.75 point)
2. Donner la définition d'un ouvert. (0.5 point)
3. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $A \subset E$.
   (a) Donner la définition de l'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$. (0.5)
   (b) Donner la définition de l'adhérence de A, noté $\overline{A}$. (0.5)

Partie 2 : démonstrations de cours (3 points)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient A et B deux ensembles de E. Montrer que

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (2 points)
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (1 point)

Exercice 2 : Norme sur l'espace des fonctions (10.25 points)

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on définit les deux applications suivantes

$$N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$
$$\nu(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)|$$

1. Les applications N et ν sont-elles des normes sur E ? (4.5 points)

2. On introduit maintenant la fonction $g(x) = e^x f(x)$.
   (a) Montrer que $\forall f$, $\forall x \in [0, 1]$, $|g'(x)| \leq e\nu(f)$. (0.5 point)
   (b) Montrer que $\forall f$, $\forall x \in [0, 1]$, $|g(x)| \leq e\nu(f)$. (1 point)
   (c) En déduire que $|f(x)| \leq e\nu(f)$ et $|f'(x)| \leq (1 + e)\nu(f)$. (2 points)

3. Trouver alors $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que
$$\alpha\nu(f) \leq N(f) \leq \beta\nu(f)$$
(2 points)
4. Que peut on déduire des applications N et ν ? (0.25 point)

Exercice 3 : Ouvert, fermé, adhérence et intérieur (5 points)

Pour les ensembles suivants montrer s'ils sont des ouverts, des fermées ou aucun des deux et déterminer leur adhérent et leur intérieur

1. On considère l'ensemble $U_1 = A \cup B$ où
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1-x\right\}$$
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x \leq 0 \text{ et } |y| \leq 1+x\right\}$$
(1.5 points)
2. $$U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 \leq 1\right\}$$
(2 points)
3. $$U_3 =]-\infty, 0] \cup]-1, 1[\cup [3, 6[\cup \{7\}$$
(1.5 points)

Exercice 4 : Limite de fonction (4.5 points)

Déterminer la limite des fonctions suivantes

1. en (0,0) de
$$f_1(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4}$$
(0.5 point)
2. en (0,0) de
$$f_2(x,y) = \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$$
(0.5 point)

3. en (0,0) de
$$f_3(x,y) = \frac{x^2+y^2}{1-e^{(x^2+y^2)}}$$
(1 point)
4. en (0,0,0,0) de
$$f_4(x,y,u,v) = \frac{x^3+y^3-\frac{1}{2}u^3-v^3}{x^3+y^2}$$
(1 point)
5. en (0,0) de
$$f_5(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$$
Indication : on montrera que $|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|} \leq 2\big(\max(|x|,|y|)\big)^{3/2}$.
(1.5 points)