	# Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ année	
	Devoir surveillé 4	
	M. Bahtiti, K. Guezguez, A. Hajej, B. Laquerriere, J.-M. Masereel	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Jeudi 11 mars 2021**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 heures 30 minutes**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1 (Groupes : 3 points)**.**

1. Montrer que $(\mathbb{U},\times)$ est groupe.
2. $A=(\{2k\ /\ k\in\mathbb{Z}\},+)$ et $B=(\{2k+1\ /\ k\in\mathbb{Z}\},+)$ sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$?
3. $C=\left(\{a\sqrt{2}+b\pi\ /\ a,b\in\mathbb{Z}\},+\right)$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$?
4. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $\star$ définie par :

$$(a,b)\star(a',b')=(a-2a',b+3b')$$

   $(\mathbb{R}^2,\star)$ est-il un groupe ?

Exercice 2 (Groupes et Morphismes : 4 points)**.** Soit $(G,\top)$ et $(G',\star)$ deux groupes, et soit f un morphisme de groupes de $(G,\top)$ dans $(G',\star)$.

1. Si e est l'élément neutre de $(G,\top)$ et e' est l'élément neutre de $(G',\star)$, montrer que $f(e)=e'$.
2. Montrer que pour tout x de G, $f(x)^{-1}=f(x^{-1})$.
3. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de $(G,\top)$

Exercice 3 (Groupes et Morphismes : 3 points)**.**
Soit $\star$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\star y=\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

1. Montrer que $(\mathbb{R},\star)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que $f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{R},\star)$ définie par $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4 (Groupes et Morphismes : 11 points)**.**

Partie A : Soit α un nombre complexe non nul vérifiant $\alpha^2 = \alpha - 1$ (on ne demande pas de calculer α).

1.
   (a) Montrer que $\alpha^3 = -1$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer, α^{3k}, α^{3k+1} et α^{3k+2} en fonction de α.

   (c) En déduire α^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Soit $p \in \mathbb{Z}$, déterminer α^p en fonction de α (et de p).

2.
   (a) Montrer que $H = \{n \in \mathbb{Z} \ / \ \alpha^n = 1\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z};+)$.

   (b) Montrer que $H = 6\mathbb{Z} = \{6z \ / \ z \in \mathbb{Z}\}$.

3. Déterminer le plus petit sous-groupe G, de $\mathbb{C}^*$, contenant α.

Partie B : Soit $\beta \in \mathbb{C}^*$, on note φ_β l'application :

$$\varphi_\beta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ n & \longmapsto & \beta^n \end{array} \right.$$

1. Montrer que pour tout $\beta \in \mathbb{C}^*$, φ_β est une morphisme de groupe.
2. Soit α le nombre complexe défini dans la partie A.
   (a) Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi_\alpha = H$.

   (b) Montrer que $\operatorname{Im} \varphi_\alpha = G$.

   (c) L'application φ_α est-elle injective ? surjective ?
3. À quelle(s) condition(s) sur β, l'application φ_β est injective ?

Exercice 5 (Systèmes linéaires : 3 points)**.**
Ayant à résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} 2x + 7y + z & = & 1 & (E_1) \\ 2x + 3y - 5z & = & 4 & (E_2) \\ -4x + 3y + z & = & 5 & (E_3) \end{array} \right.$$

un étudiant démarre ainsi :

j'élimine x en retranchant (E_2) de (E_1) : $4y + 6z = -3$
j'élimine y en retranchant (E_3) de (E_2) : $6x - 6z = -1$
j'élimine z en retranchant (E_1) de (E_3) : $-6x - 4y = 4$

1. Le système ainsi obtenu est-il équivalent au système initial ?
2. Résoudre le système initial par la méthode de Gauss.