	Cycle préparatoire 1ère année **Devoir surveillé 1** *N. Arancibia, M. Bahtiti, K. Guezguez, A. Hajej, B. Laquerriere, J.-M. Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Jeudi 22 octobre 2020**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 heures 30 minutes**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte six exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est purement indicatif et pourra être modifié.

⋄⋄⋄

Exercice 1 (4 points)**.** Dans chacun des deux cas suivants, donner, lorsque c'est possible la négation et la contraposée.

1. $$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall a>0, \forall b>0, \left(|a-b|<\eta \Rightarrow \left|f(a)-f(b)\right|<\varepsilon\right)$$
2. $$\left[\forall u \in E,\ \left(f(u)=0 \Rightarrow g(u)=0\right)\right] \Rightarrow \left[\exists \beta>0,\ g \leq \beta f\right]$$

Exercice 2 (3.5 points)**.**

1. Démontrer la proposition suivante :
$$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ \forall b \in \mathbb{N}^*,\ b>a \Rightarrow b^2-a^2 \geq 3$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier

Exercice 3 (1.5 points)**.** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
$$n^2-6n+5 \text{ pair } \Rightarrow n \text{ impair}$$

Exercice 4 (7 points)**.** Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=4$ et $x_{n+1}=\frac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n>3$. (*indication :* $2x^2-3x-9=(x-3)(2x+3)$.)
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1}-3>\frac{3}{2}(x_n-3)$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n+3$.

Exercice 5 (4 points)**.** Soit A, B, C, D quatre ensembles. Quelle relation existe-t-il entre $(A\times C)\cup(B\times D)$ et $(A\cup B)\times(C\cup D)$?

Exercice 6 (6 points)**.** Nous donnons (ou rappelons) la définition de la différence symétrique :
Soit A et B deux ensembles. On appelle différence symétrique de A et B (notée $A\Delta B$) l'ensemble :
$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$
On admet l'égalité suivante (démontrée en TD) : $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.

1. Justifier que $A\Delta B=B\Delta A$
2. (a) Justifier que $A\Delta B=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}$
   (b) Justifier que $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$
3. Déterminer :

(a) $A \Delta A$

(b) $A \Delta \emptyset$

(c) $A \Delta E$ (où $A \subset E$)

(d) $(A \Delta B) \Delta B$

4. Simplifier : $(A \Delta B) \Delta (A \cap B)$.