Corrigé DS1

Exercice 1 :

Résoudre l'inéquation : $\sqrt{2x^2-8} \geqslant x-1$.

$D_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

- Sur $]-\infty, -2]$, on a : $x \leqslant -2 \implies x-1 \leqslant -3 \leqslant 0 \leqslant \sqrt{2x^2-8}$

Tous les éléments de $S_1 =]-\infty, -2]$ sont solution.

- Sur $[2, +\infty[$:

On élève au carré : $2x^2-8 \geqslant x^2-2x+1 \iff x^2+2x-9 \geqslant 0$

racines : $-1-\sqrt{10}$ et $-1+\sqrt{10}$, donc $S_2 = [-1+\sqrt{10}, +\infty[$

$S =]-\infty, -2] \cup [-1+\sqrt{10}, +\infty[$

Exercice 2 :

Résoudre les 2 équations suivantes :

1. $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$

$2x^2+9x+4=0$ a pour solutions : $-\frac{1}{2}$ et $-4 < -1$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x)$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x) = \sin(-x) \iff \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4} = -x+2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x+\frac{\pi}{4} = \pi-(-x)+2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exercice 3 :

On considère la fonction : $f(x) = \dfrac{E(x)}{2E(x)-1}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$2E(x)-1=0 \iff E(x)=\frac{1}{2}$ impossible car $E(x)\in\mathbb{Z}$.

2. Donner l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in \mathbb{Z}$.

$$x \in \mathbb{Z} \implies E(x)=x \implies f(x)=\frac{E(x)}{2E(x)-1}=\frac{x}{2x-1}$$

3. Déterminer, s'il en existe, tous les antécédents de 1.

On vous demande donc de résoudre : $f(x)=1$

$$f(x)=1 \iff \frac{E(x)}{2E(x)-1}=1 \iff E(x)=2E(x)-1 \iff E(x)=1$$

Donc $x\in[1,2[$

4. Même question pour -3.

$$f(x)=-3 \iff \frac{E(x)}{2E(x)-1}=-3 \iff E(x)=-6E(x)+3 \iff 7E(x)=3$$

$\iff E(x)=\frac{7}{3}$ impossible !! Donc il n'y a pas d'antécédent pour -3.

Exercice 4 :

Calculer les sommes ou produits suivants :

1. $S_1=\sum_{k=0}^{n}2^{2k+1}$

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}2^{2k+1}=S_1=2\sum_{k=0}^{n}4^k=2\frac{1-4^{n+1}}{1-4}$$

2. $S_2=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}\binom{n}{k}$

$$S_2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-1}{2}\right)^k1^{n-k}=\left(1+\frac{-1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$$

3. $P=\prod_{k=2}^{n}2\frac{k^2-2k+1}{k^2}$

$$P=\prod_{k=2}^{n}2\frac{k^2-2k+1}{k^2}=\left(\prod_{k=2}^{n}2\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-2k+1}{k^2}\right)=2^{n-2+1}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)^2}{k^2}\right)$$

$$P=2^{n-1}\frac{(2-1)^2}{n^2}=\frac{2^{n-1}}{n^2}$$

Exercice 5 :

Pour les deux ensembles qui suivent, on vous demande de préciser si l'ensemble est majoré, minoré, de déterminer, si elles existent les bornes supérieures et inférieures ainsi que le plus grand et le plus petit élément.

1. $A = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} |x-2| < 2 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \right\}$.

$\begin{cases} |x-2| < 2 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$

Donc $A =]0,1] \cup [2,4[$

$Inf(A) = 0$ et $Sup(A) = 4$

Pas de Min ni de Max.

2. $B = \left\{ \dfrac{2^n}{2^n - 1},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- $\dfrac{2^n}{2^n-1} = 1 + \dfrac{1}{2^n-1} > 1$ et $2^n - 1 \geqslant 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{2^n-1} \leqslant 1 \Longrightarrow 1 + \dfrac{1}{2^n-1} \leqslant 2$

  B est minorée par 1 et majorée par 2
- $2 \in B \Longrightarrow 2 = Max(B) = Sup(B)$
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n - 1 > \dfrac{1}{\epsilon} \Longrightarrow \dfrac{1}{2^n-1} < \epsilon \Longrightarrow 1 + \dfrac{1}{2^n-1} < 1 + \epsilon$

  Donc $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in B,\ x < 1 + \epsilon$.
- $1 = Inf(B)$ et $1 \notin B \Longrightarrow Min(B)$ n'existe pas.

Exercice 6 :

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Démontrer les propositions suivantes :

1. $A \subset B \Longrightarrow Sup(A) \leqslant Sup(B)$.

$\forall x \in A,\ x \in B \Longrightarrow \forall x \in A,\ x \leqslant Sup(B) \Longrightarrow Sup(B)$ est un majorant de A.

Donc $Sup(A) \leqslant Sup(B)$.

2. $Sup(A \cup B) = Max(Sup(A)\ ,\ Sup(B))$.

- $\forall x \in A \cup B,\ x \in A\ ou\ x \in B \Longrightarrow \forall x \in A \cup B,\ x \leqslant Sup(A)\ \ ou\ x \leqslant Sup(B)$

  $\Longrightarrow \forall x \in A \cup B,\ x \leqslant Max(Sup(A)\ ,\ Sup(B))$.

  $Max(Sup(A)\ ,\ Sup(B))$ est donc un majorant de $A \cup B$, par conséquent :

  $$Sup(A \cup B) \leqslant Max(Sup(A)\ ,\ Sup(B))$$
- D'un autre côté, en utilisant la première question, on peut dire :

  $A \subset A \cup B \Longrightarrow Sup(A) \leqslant Sup(A \cup B)$

  $B \subset A \cup B \Longrightarrow Sup(B) \leqslant Sup(A \cup B)$, et par suite :

  $$Max(Sup(A)\ ,\ Sup(B)) \leqslant Sup(A \cup B)$$

  d'où l'égalité souhaitée.