DS 4

Exercice 1 : (3pts)

Soit f la fonction définie sur $[1,5[\cup]5,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

1. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 5, en posant : $f(5)=\frac{1}{4}$.
2. Déterminer, si elle existe, la dérivée de f en 5, c'est à dire $f'(5)$.

Correction :

1.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{(x-1-4)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+2\right)}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to5}f(x)=\lim\limits_{x\to5}f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$.

On peut donc prolonger f par continuité en 5 en posant : $f(5)=\frac{1}{4}$.

2. $$\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}-\frac{1}{4}}{x-5}=\frac{\frac{4-\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{4\left(\sqrt{x-1}+2\right)}}{x-5}=\frac{\frac{2-\sqrt{x-1}}{4\left(\sqrt{x-1}+2\right)}}{x-5}=\frac{2-\sqrt{x-1}}{4\left(\sqrt{x-1}+2\right)(x-5)}$$

$$\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\frac{-\left(\sqrt{x-1}-2\right)}{4\left(\sqrt{x-1}+2\right)(x-5)}=\frac{-1}{4\left(\sqrt{x-1}+2\right)}\times\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)}{(x-5)}=\frac{-1}{4\left(\sqrt{x-1}+2\right)}\times f(x)$$

$$\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\frac{-1}{4\left(\sqrt{x-1}+2\right)}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+2\right)}.$$

Par suite :

$$\lim_{x\to5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{-1}{4\left(\sqrt{x-1}+2\right)}\times\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{-1}{4\times4\times4}=\frac{-1}{64}.$$

Conclusion : f est dérivable en 5 et $f'(5)=\frac{-1}{64}$.

Exercice 2 : (4,5pt)

1. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction f continue sur un intervalle I.

2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue .

On suppose que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$ et on veut montrer que f possède un point fixe,

c'est à dire : $\exists c \in \mathbb{R}^+, \quad f(c) = c$.

a) Supposer $f(0) = 0$, conclure.

b) Justifier l'existence de $b \in \mathbb{R}^+$, $\frac{f(b)}{b} < 1$.

c) Supposer $f(0) \neq 0$, calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$, puis conclure.

Correction :

1. Voir cours

2. (a) $f(0) = 0 \implies$ on peut prendre $c = 0$.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1 \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \ \forall x > A,\ \ |f(x) - \ell| < \epsilon.$

Il suffit alors de choisir $\epsilon = \frac{1-\ell}{2}$ et de prendre $b = A + 1$, pour avoir : $\frac{f(b)}{b} < \ell + \epsilon = \frac{1+\ell}{2} < 1$

(c) Si $f(0) \neq 0,$ alors $f(0) > 0$ car $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

On peut donc trouver a au voisinage de 0 tel que $\frac{f(a)}{a} > 1$.

Il suffit pour cela de choisir $A = 1$ dans la définition de la limite et de prendre $a \in]0, \alpha[$ avec α donné par cette limite.

Nous avons donc : $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ définie et continue sur $]0, +\infty[$ avec $g(a) > 1$ et $g(b) < 1$.

Le TVI, appliqué à g, implique $\exists\, c \in]a, b[, \quad g(c) = 1 \iff f(c) = c$.

Exercice 3 : (4pts)

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est bornée.
2. f possède-t-elle forcément un maximum ? un minimum ?

Correction :

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1 \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \ \forall x \in \,]a, b[\,,\ \ |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell_1| < \epsilon.$

Nous pouvons donc borner f par $\ell_1 - \epsilon$ et $\ell_1 + \epsilon$ sur l'intervalle $]a, a + \alpha[$. (Par exemple avec $\epsilon = 1$)

De la même manière, nous pouvons borner f par $\ell_2 - \epsilon$ et $\ell_2 + \epsilon$ sur l'intervalle $]b - \alpha, b[$.

Il restera, peut-être un intervalle $[a + \alpha\ ,\ b - \alpha]$ qui est un segment, et sur lequel f est également bornée par le théorème sur l'image d'un segment par une fonction continue.

Finalement, f est bornée sur $]a, a + \alpha[$, sur $[a + \alpha\ ,\ b - \alpha]$ et sur $]b - \alpha, b[$.

Conclusion : f est bornée sur $]a, b[$.

2. f ne possède pas forcément de Min ni de Max.

Prenons, par exemple, $f(x) = x$ et $]a, b[\,=\,]0, 1[$. f vérifie bien toutes les hypothèses de la question 1. Mais elle ne possède ni Min ni Max.

En effet, $Inf\ f(x) = 0$ et $Sup\ f(x) = 1$, mais ni 0, ni 1 ne sont des valeurs prises sur $]0, 1[$.

Exercice 4 : (5,5pt)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{1}{e} - x\right) & \text{si } x < 0 \\ -x^2 - 2x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier l'existence et la continuité de f^{-1} et préciser son sens de variations.
3. Déterminer l'expression détaillée de $f^{-1}(x)$ pour tout réel x.

<u>**Correction**</u> :

1. f est continue pour $x < 0$ car composée de fonctions continues et strictement décroissante car composée d'une strictt croissante ($\ln$) et d'une strictt décroissante.

Pour $x \geqslant 0$, f est continue comme polynôme et strictt décroissante car ce trinôme l'est pour $x \geqslant -1$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \implies f$ continue sur $\mathbb{R}$ et strictt décroissante.

2. f continue et strictt décroissante réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

En effet : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

f possède donc une réciproque : $f^{-1} :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

De plus f^{-1} a le même sens de variations que f donc strictt décroissante.

3. On sait que : $f(]-\infty, 0[) = \,]-1, +\infty[$ et que $f([0, +\infty[) = \,]-\infty, -1]$.

- Si $y \in]-1, +\infty[$, $y = f(x) \iff y = \ln\left(\frac{1}{e} - x\right) \iff x = \frac{1}{e} - e^y = f^{-1}(y)$.
- Si $y \in]-\infty, -1]$, $y = f(x) \iff y = -x^2 - 2x - 1 \iff y = -(x+1)^2$
  $\iff x + 1 = \pm\sqrt{-y} \iff x = -1 + \sqrt{-y} = f^{-1}(y)$.

Finalement :

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{-x} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{e} - e^x & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Exercice 5 : (3pts)

On considère la fonction : $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Comparer, sans calculatrice, les nombres e^π et π^e.

Correction :

1. $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ fonction continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{x^e e^x - e x^{e-1} e^x}{\left(x^e\right)^2} = \frac{x^{e-1} e^x (x - e)}{\left(x^e\right)^2}.$$

f' a le même signe que $(x - e)$, donc négatif sur $]0, e]$ et positif sur $[e, +\infty[$.
f possède donc un minimum en $x = e$ et ce minimum vaut $f(e) = 1$.

2. On a vu que : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) \geqslant f(e) = 1$.

En particulier, pour $x = \pi$, on a :

$$f(\pi) \geqslant 1 \iff \frac{e^\pi}{\pi^e} \geqslant 1 \iff e^\pi \geqslant \pi^e.$$