# Corrigé du DM1

## 1. Exercice 1

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :

$$|2x+3| \geqslant |x+4|$$

**Réponse :**

Pour traiter cette inéquation, il faut enlever les valeurs absolues et donc déterminer le signe des expressions à l'intérieur. Un tableau de signes s'impose :

| $x$ | $-\infty$ $\quad -4$ | $-4 \quad -\frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2} \quad +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\|2x+3\|$ | $-(2x+3)$ | $-(2x+3)$ | $2x+3$ |
| $\|x+4\|$ | $-(x+4)$ | $x+4$ | $x+4$ |

Nous devons donc résoudre 3 inéquations :

- Sur $I_1 = ]-\infty, -4]$, $\quad -2x-3 \geqslant -x-4 \iff -x \geqslant -1 \iff x \leqslant 1.$
  La solution est donc $S_1 = I_1 = ]-\infty, -4]$.
- Sur $I_1 = \left]-4, -\frac{3}{2}\right]$, $\quad -2x-3 \geqslant x+4 \iff -3x \geqslant 7 \iff x \leqslant -\frac{7}{3}.$
  La solution est donc $S_2 = \left]-4, -\frac{7}{3}\right]$.
- Sur $I_1 = \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$, $\quad 2x+3 \geqslant x+4 \iff x \geqslant 1$ .
  La solution est donc $S_3 = [1, +\infty[$.

Finalement la solution générale est : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [1, +\infty[$

**AUTRE METHODE**

$$|2x+3| \geqslant |x+4|$$

les 2 membres de l'inégalité sont positifs, donc on peut élever au carré

$$|2x+3|^2 \geqslant |x+4|^2 \iff (2x+3)^2 \geqslant (x+4)^2$$
$$\iff 4x^2+12x+9 \geqslant x^2+8x+16$$
$$\iff 3x^2+4x-7 \geqslant 0$$

Il faut chercher où est ce que ce trinôme est positif.

Pour déterminer son signe, il faut trouver ses racines : $3x^2+4x-7=0$

$\Delta = 4^2+4\times 3\times 7 = 100$ et les deux racines sont : $x_1 = \frac{-4-10}{6} = \frac{-14}{6} = \frac{-7}{3}$

et $x_2 = \frac{-4+10}{6} = \frac{6}{6} = 1.$

Ce trinôme est positif (signe de $a$) à l'extérieur des racines. Donc :

$$S = \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [1, +\infty[$$

## 2. Exercice 2

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$2\tan(x)\sin^2(x) + \tan(x) = 3\tan(x)\sin(x)$$

**Réponse :**

Il faut d'abord préciser l'ensemble de définition.

C'est celui de la tangente, c'est à dire : $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Il faut ensuite tout passer à gauche et factoriser :

$$\begin{aligned} \tan(x)\left(2\sin^2(x) + 1 - 3\sin(x)\right) &= 0 \\ \iff \tan(x) = 0 \quad \text{ou} \quad 2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

- $\tan(x) = 0 = \tan(0) \iff x = 0 + k\pi$. Ce qui donne $S_1 = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$ se résout en posant $X = \sin(x)$,

  $2X^2 - 3X + 1 = 0$ a pour solutions : $X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = 1$.
- $\sin(x) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

  Ce qui donne : $S_2 = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\sin(x) = 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

  Problème : $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ n'appartient pas au domaine de définition.

  Donc : $S_3 = \varnothing$

Finalement la solution générale est :

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

## 3. Exercice 3

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} 3^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \left(3^2\right)^k = \sum_{k=0}^{n} 9^k$ = somme des termes successifs d'une suite géométrique de raison $9$.

$$S_1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} = \frac{1-9^{n+1}}{-8} = \frac{1}{8}\left(9^{n+1}-1\right)$$

2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^k 1^{n-k}$ = binôme de Newton avec $a = 9,\ b = 1$.

$$S_2 = (9+1)^n = 10^n$$

3. $S_3 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left[\ \ln(k) - \ln(k-1)\right]$ = somme télescopique.

$$S_3 = \ln(n) - \ln(2-1) = \ln(n)$$

## 4. Exercie 4

On définit, sur $\mathbb{R}$, la fonction :

$$f(x) = E(2x) - 2E(x)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière du réel $x$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Montrer que la fonction $f$ est $1-$ périodique (périodique de période $1$).
3. Calculer $f(x)$ pour $x \in [0; \frac{1}{2}[$, puis pour $\in [\frac{1}{2}; 1[$.
4. En déduire les seules valeurs prises par $f$.

**Réponse :**

**1-** Si on note $p = E(x)$, on sait que : $p \in \mathbb{Z}$, et $p \leqslant x < p+1$.
on en déduit : $p+1 \leqslant x+1 < p+2$ et bien évidemment $(p+1) \in \mathbb{Z}$.
Conclusion : $E(x+1) = p+1 = E(x)+1$

**2-** Le résultat de la question précédente appliqué à $x+1$ donne : $E(x+2) = E(x)+2$.

$$f(x+1) = E(2(x+1)) - 2E(x+1) = E(2x+2) - 2(E(x)+1) = E(2x) + 2 - 2E(x) - 2$$

$$f(x+1) = E(2x) - 2E(x) = f(x)$$

Donc $f$ est périodique de période $1$.

**3-** Que ce soit pour le cas $x \in [0; \frac{1}{2}[$ ou pour $x \in [\frac{1}{2}; 1[$, on a toujours $0 \leqslant x < 1$, donc : $E(x) = ($

- Si $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right[$, $\quad 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \implies 0 \leqslant 2x < 1 \implies E(2x) = 0 \quad$ et $\quad E(x) = 0$

Donc $f(x) = E(2x) - 2E(x) = 0$.

- Si $x \in \left[\frac{1}{2};1\right[$, $\quad \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \implies 1 \leqslant 2x < 2 \implies E(2x) = 1 \quad$ et $\quad E(x) = 0$

Donc $f(x) = E(2x) - 2E(x) = 1$.

4- Sur l'intervalle $\left[0;1\right[$, la fonction $f$ ne prend que deux valeurs : $0$ et $1$.

Comme cet intervalle a la longueur d'une période, $f$ ne prendra pas d'autre valeurs sur $\mathbb{R}$.

Les seules valeurs que prend $f$ sont : $0$ et $1$

## 5. Exercice 5

Pour les deux ensembles qui suivent, on vous demande de préciser si l'ensemble est majoré, minoré, de déterminer, si elles existent les bornes supérieures et inférieures ainsi que le plus grand et le plus petit élément.

1. $A = \{x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant 3\}$.
2. $B = \left\{\frac{2n+1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

**Réponse :**

**1-** $A = \{x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant 3\}$.

$$|x| \geqslant 3 \iff x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 3$$

$$A = \left]-\infty, -3\right] \cup \left[3; +\infty\right[$$

$A$ n'est ni moinoré, ni majoré. Il ne possède donc ni borne inf. ni borne sup.
Pas de min. ni de max non plus.

**2-** $B = \left\{\frac{2n+1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

- En calculant les premiers termes : $1$ ; $\frac{3}{2}$ ; $\frac{5}{3}$ ; $\frac{7}{4}$ ;......

  et en tenant compte de la limite de cette suite : $\ell = 2$, on peut conjecturer que $B$ est minorée par $1$ et majorée par $2$. Montrons le !!

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad \frac{2n+1}{n+1} - 1 = \frac{2n+1-(n+1)}{n+1} = \frac{n}{n+1} \geqslant 0$

  Donc : $\frac{2n+1}{n+1} \geqslant 1$.

  $1$ est bien un minorant de $B$.

- De même, on a : $\dfrac{2n+1}{n+1} - 2 = \dfrac{2n+1-2(n+1)}{n+1} = \dfrac{-1}{n+1} \leqslant 0$
  Donc : $\dfrac{2n+1}{n+1} \leqslant 2$.
  $2$ est bien un majorant de $B$.
- $B$ est donc une partie non vide minorée et majorée. Donc $Inf(B)$ et $Sup(B)$ existent.
- $1$ est un minorant de $B$ et $1 = \dfrac{2\times 0+1}{0+1}$ est un élément de $B$.
  Conclusion : $1 = Min(B) = Inf(B)$.
- Montrons que : $2 = Sup(B)$ !!
  Utilisons la caractérisation par des $\epsilon$, à savoir :

$$2 = Sup(B) \iff \begin{cases} 2 \text{ est un majorant de } B \\ \forall \epsilon > 0,\ 2-\epsilon \text{ n'est pas un majorant de } B \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2 \text{ est un majorant de } B \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists\, x \in B,\ x > 2-\epsilon \end{cases}$$

On sait déjà que $2$ est un majorant de $B$.
Soit maintenant $\epsilon > 0$, peut-on trouver un $x \in B$ tel que $x > 2-\epsilon$ ??
cela revient à chercher un entier naturel $n$ vérifiant : $x = \dfrac{2n+1}{n+1} > 2-\epsilon$

$$\frac{2n+1}{n+1} > 2-\epsilon \iff \frac{2n+1}{n+1} - 2 > -\epsilon \iff \frac{-1}{n+1} > -\epsilon$$
$$\iff \frac{1}{n+1} < \epsilon \iff n+1 > \frac{1}{\epsilon} \iff n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

Comme $\mathbb{R}$ **est archinémdien**, on est sûr que :

$$\exists\, n \in \mathbb{N},\quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \iff \exists\, n \in \mathbb{N},\ \frac{2n+1}{n+1} > 2-\epsilon$$
$$\iff \exists\, x \in B,\ x = \frac{2n+1}{n+1} > 2-\epsilon$$

On a ainsi montré que : $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, x \in B,\ x > 2-\epsilon$.

Conclusion : $2 = Sup(B)$.

Maintenant : $2 \notin B$ car $\dfrac{2n+1}{n+1} - 2 = \dfrac{-1}{n+1}$ ne peut pas s'annuler.

On en déduit que $Max(B)$ n'existe pas.