DS1 Série 2020

Barème $4 + 3 + 4 + 5 + 5,5 = 21,5$ pts

Exercice 1 $\boxed{4 \text{ pts}}$

(1) + (1) + (1) + (1)

Exercice 2 $\boxed{3 \text{ pts}}$

1] Faux (0,5)

contre exemple (1)

2] Vrai (0,5)

Preuve (1)

Exercice 3 $\boxed{4 \text{ pts}}$

1] (1) 2] (1) 3] (2)

Exercice 4 $\boxed{5 \text{ pts}}$

1] (0,5) + (0,5) + (0,5) + (0,5)

2] (1) + (1) (1 pts pour chaque inégalité)

3] (1)

Exercice 5 $\boxed{5,5 \text{ pts}}$

1] (1,5)

2] (2,5)

3] (1)

4] (0,5)

Correction du DS1 Serie 2020.

Exercice 1

1°/ $u_n = n \sin(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} 1$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge grossièrement

2°/ $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+\ln(n))}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n^{2}}} = \frac{1}{n}$

La série de Riemann $\sum_{n\geq} \frac{1}{n}$ diverge, en appliquant la Th. des équivalences des séries à termes positifs La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{u_n}$ diverge.

3/ $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ $n \geq 2$. soit $x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x \ln(x)}$ est décroissante sur $[2; +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ $(n \geq 2)$. $\forall x \in [n, n+1]$.

$f(x) \leq f(n)$

on a: $\forall x \in [n, n+1]$, $\frac{1}{x \ln(x)} \leq \frac{1}{n \ln(n)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n \ln(n)} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln(n)}}_{S_N} \geq \int_2^{N+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

donc $S_N \geq [\ln(\ln(x))]_2^{N+1} = \underbrace{\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2))}_{\underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

$(S_N)_N$ est une suite divergente

donc la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.

4/ $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$= e - e^{n \ln(1+1/n)}$

$= e - e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))}$

$= e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n^2})} = e - e\left(e^{-1/2n + o(\frac{1}{n})}\right)$

$= e - e\left(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \geq 0$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge ($\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente $\alpha = 1 \leq 1$). Le Th des équivalence implique que $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Exercice 2

1/ Faux. Contre exemple $u_n = \frac{1}{n^2}$

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge $(\alpha = 2 > 1)$

et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge $(\alpha = 1 \leq 1)$

2/ $0 \leq u_n$, $\underbrace{\ln(u_n + 1)}_{\geq 0} \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

d'après le th des équivalences les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ sont de $\hat{m}$ natures.

Exercice 3

$u_n = \frac{n}{(n^2-1)^2}$ $n \geq 2$.

$\boxed{1}$ $0 \leq u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$, | ∘ La série de Riemann $(\alpha = 3 > 1)$ $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge

| • Le Th des équivalence implique que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ cv

2/ $u_n = \frac{n}{(n^2-1)^2}$ soit $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

$$b = (x-1)^2 F(x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{4} \qquad d = (x+1)^2 F(x)\Big|_{x=-1} = -\frac{1}{4}$$

$\lim_{x\to+\infty} x F(x) = 0 \Rightarrow a + c = 0$ ①

$F(0) = -a + b + c + d = 0 \Rightarrow c - a = 0$ ②

① et ② $\Rightarrow a = c = 0$

$$u_n = \frac{1}{4}\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)^2}$$

3/ $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{(k)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{5}{16} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

La série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge donc sa valeur est égale à $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Donc $\sum_{n\geq 2} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{16} + \frac{1}{4}\left(-1/n^2 - 1/(n+1)^2\right)\right)$

$$= \frac{5}{16}$$

Exercice 4

$$F : [3;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(\ln(x))$$

1/ $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

$f(x) = F'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

$\forall x \geq 3,\ x\ln(x) > 0$ donc $\forall x \geq 3,\ f(x) \geq 0$

$$f'(x) = -\frac{\ln(x)+1}{x\ln(x)} \qquad \forall x \geq 3,\ f'(x) \leq 0$$

donc f est décroissante sur $[3;+\infty[$.

2] a) soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\forall x \in [n, n+1]$.

$$f(x) \leq f(n) \Rightarrow \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=3}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq S_N.$$

$$\Rightarrow \int_3^{N+1} f(x)\,dx \leq S_N.$$

b) soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\forall x \in [n-1, n]$,

$$f(n) \leq f(x) \Rightarrow \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \geq f(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=4}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)d \geq \underbrace{\sum_{n=4}^{N} f(n)}_{=}$$

$$\Rightarrow \int_3^{N} f(x)\,dx \geq S_N - f(3)$$

$$\Rightarrow \int_3^{N} f(x)\,dx + f(3) \geq S_N$$

a) et b) $\Rightarrow \displaystyle\int_3^{N+1} f(x)\,dx \leq S_N \leq \int_3^{N} f(x)\,dx + f(3)$

4/ on a $\displaystyle\int_3^{N} f(x)\,dx + \int_N^{N+1} f(x)\,dx \leq S_N \leq [F(x)]_3^N + \frac{1}{3\ln(3)}$

$$\ln(\ln(N)) - \ln(\ln(3)) + \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(N)) \leq S_N \leq \boxed{\ln(\ln(N)) - \ln(\ln(3)) + \frac{1}{3\ln 3}}$$

on a : on pose $a_N = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(3))$

$$\Rightarrow a_N + \ln\left(\frac{\ln(N+1)}{\ln(N)}\right) \leq S_N \leq a_N + \frac{1}{3\ln(3)}$$

or $\ln\left(\frac{\ln(N+1)}{\ln(N)}\right) = \ln\left(\frac{\ln(N) + \ln(1+1/N)}{\ln(N)}\right)$

$$= \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/N)}{\ln N}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{N\ln(N)} + o\left(\frac{1}{N\ln(N)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{N\ln(N)} + o\left(\frac{1}{N\ln(N)}\right)$$

on a : $v_N = a_N + \ln\left(\frac{\ln(N+1)}{\ln(N)}\right) = \ln(\ln(N+1))$

$$- \ln(\ln(3)) + \frac{1}{N\ln(N)} + o\left(\frac{1}{N\ln(N)}\right).$$

$v_N \underset{+\infty}{\sim} a_N$. car $\frac{v_N}{a_N} = 1 + \underbrace{\frac{1 + o(1)}{N\ln(N)(a_N)}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0}$

$$u_N = a_N + \frac{1}{3\ln(3)} \underset{+\infty}{\sim} a_N$$

donc $v_N \leq S_N \leq u_N$

avec $v_N \underset{+\infty}{\sim} a_N$ et $u_N \underset{+\infty}{\sim} a_N$

donc $S_N \underset{+\infty}{\sim} a_n = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(3))$

$$= \ln\left(\frac{\ln(N)}{\ln(3)}\right)$$

Exercice 5

1] $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$

$= \ln(n) + a\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$
$+ b\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)$

$= (1+a+b)\ln(n) + a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$+ b\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= (1+a+b)\ln(n) + (a+2b)\frac{1}{n}$

$- \left(\frac{a}{2} + 2b\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

donc $\alpha = 1+a+b$, $\beta = a+2b$
$\gamma = -\left(\frac{a}{2}+2b\right).$

2] 1^{ier} cas si $\alpha \neq 0$ $(1+a+b \neq 0)$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge.

2^{ieme} cas $\alpha = 0$ $(b = -1-a)$

$u_n = (a+2(-1-a))\frac{1}{n} - \left(\frac{a}{2} - 2 - 2a\right)\frac{1}{n^2}$
$+ o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= (-a-2)\frac{1}{n} - \left(\frac{3}{2}a - 2\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

i) $-a-2 \neq 0 \Rightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} \underbrace{(-a-2)\frac{1}{n}}_{\text{garde un signe constant}}$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (Riemann $\alpha = 1 \leq 1$).

Donc $\sum_{n\geq 1} (-a-2)\frac{1}{n}$ diverge, d'après le Théorème des équivalence la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

ii) $-a-2=0$ $\boxed{a=-2} \Rightarrow b = -1-a$
$= 1$

$$u_n = -\left(\frac{3}{2}(-2)-2\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} \underbrace{-\frac{1}{n^2}}_{\text{de signe constant}}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann $\alpha = 2 > 1$) d'après le Th. des équivalence La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Conclusion

(La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge) ssi $\left(\begin{cases} a=-2 \text{ et} \\ b=1 \end{cases}\right)$

3] $$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\ln(n) - \ln(n+1)\right) + \sum_{n=1}^{N} \left(\ln(n+2) - \ln(n+1)\right)$$

$$= \ln(1) - \ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2)$$

4) La série $\sum_{n \geq 1} (\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2))$

converge donc sa valeur est égale

à $\lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2)$

$= -\ln(2)$

<u>conclusion</u> $\sum_{n \geq 1} (\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)) = -\ln(2)$