# Exercice 1 : questions de cours (5.25 points)

## Partie 1 : définitions (2.25 points)

1. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $N$ une application de $E$ dans $N$. Sous quelles conditions $N$ est-elle une norme sur $E$. (0.75 point)
2. Donner la définition d'un ouvert. (0.5 point)
3. Soit $(E, N)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.
   (a) Donner la définition de l'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$. (0.5)
   (b) Donner la définition de l'adhérence de A, noté $\overline{A}$. (0.5)

Solutions :

1. $N$ est une norme sur $E$ ssi
   — soit $x \in E$ alors, $N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ (0.25 point)
   — $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (0.25 point)
   — $\forall x, y \in E,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (0.25 point)

2. (0.5 point) Soit $(E, N)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$. Alors $A$ est un ouvert de $E$ si et seulement si

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0\ /\ B(x, r) \subset A$$

   évidemment la défintion avec le voisinage fonctionne aussi :
   $A$ est un ouvert ssi $A$ est voisinage de tous ses points.

3. Soit $(E, N)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$, alors
   (a) (0.5 point) alors l'intérieur de $A$, noté $\overset{\circ}{A}$ est défini par

$$x \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0\ /\ B(x, r) \subset A$$

   (b) (0.5 point) alors l'adhérent de $A$, noté $\overline{A}$ est défini par

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

## Partie 2 : démonstrations de cours (3 points)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $A$ et $B$ deux ensembles de $E$. Montrer que

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (2 points)
2. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (1 point)

Solution :

1. (2 points : 1 point pour chaque inclusion)

   Montrons que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ :

   $$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

   Or $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé puisque $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des fermés. Ceci implique que

   $$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

   De plus

   $$\begin{cases} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

   Finalement, puisque $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, on a

   $$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

2. (1 point)
   Montrons que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

   $$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

## Exercice 2 : Norme sur l'espace des fonctions (10.25 points)

On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $f$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et telles que $f(0)=0$. Pour $f \in E$, on définit les deux applications suivantes

$$N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$$
$$\nu(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)|$$

1. Les applications $N$ et $\nu$ sont-elles des normes sur $E$ ? (4.5 points)

2. On introduit maintenant la fonction $g(x) = e^x f(x)$.
   (a) Montrer que $\forall f$, $\forall x \in [0,1]$, $|g'(x)| \leq e\nu(f)$. (0.5 point)
   (b) Montrer que $\forall f$, $\forall x \in [0,1]$, $|g(x)| \leq e\nu(f)$. (1 point)
   (c) En déduire que $|f(x)| \leq e\nu(f)$ et $|f'(x)| \leq (1+e)\nu(f)$. (2 points)
3. Trouver alors $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que
$$\alpha\nu(f) \leq N(f) \leq \beta\nu(f)$$
   (2 points)
4. Que peut on déduire des applications $N$ et $\nu$ ? (0.25 point)

1. Commençons par montrer que $N$ est une norme.
   — (0.25 point) Si $N(f)=0$ alors $\forall x \in [0,1],\ f(x) = f'(x) = 0$ d'où l'on déduit que $f=0$.

   — (0.25 point) Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$$N(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f'(x)| = |\lambda| N(f)$$

   — (1.5 point) Montrons maintenant l'inégalité triangulaire. Pour cela commençons par remarquer que $\forall x \in [0,1]$
$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$$
$$|f'(x)+g'(x)| \leq |f'(x)| + |g'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|$$

On a ainsi

$$|f(x)+g(x)|+|f'(x)+g'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|+ \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|+ \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|+ \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|$$

En prenant alors le sup de cette expression, ce qui ne change rien au terme de droite alors

$$N(f+g) \leq N(f) + N(g)$$

Donc $N$ est bien une norme.

Etudions maintenant l'application $\nu$.

— (0.75 point) Si $\nu(f) = 0$ alors $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)| = 0$. Il faut donc que $\forall x \in [0,1]$ $f(x) + f'(x) = 0$ ce qui implique que $f(x) = Ce^{-}x$ (avec $C$ une constante). Or $f(0) = 0$, donc $C = 0$. Et finalement $f = 0$.

— (0.25 point) $\forall f \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\nu(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} (|\lambda| \times |f(x) + f'(x)|) = |\lambda|\nu(f)$$

— (1.5 points) Montrons maintenant l'inégalité triangulaire. Pour cela, remarquons que, $\forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}|f(x) + f'(x) + g(x)+g'(x)| &\leq |f(x) + f'(x)| + |g(x) + g'(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x) + g'(x)|\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à prendre le sup de l'expression précédente, d'où l'on déduit que

$$\nu(f+g) \leq \nu(f) + \nu(g)$$

Finalement $\nu$ est bien une norme sur $E$.

2. $g(x) = e^x f(x)$ :

(a) (0.5 point) Alors $\forall x \in [0,1]$

$$|g'(x)| = |e^x(f(x) + f'(x))| = e^x|f(x) + f'(x)| \leq e\nu(f)$$

(b) (1 point) $\forall x \in [0,1]$

$$|g(x)| = \left|\int_0^x g'(t)dt\right| \leq \int_0^x |g'(t)|dt \leq xe\nu(f) \leq e\nu(f)$$

(c) On a alors

$$|f(x)| \leq |g(x)| \leq e\nu(f)$$

(0.5 point)

De plus

$|f'(x)| = |f'(x)+f(x)-f(x)| \leq |f(x)+f'(x)|+|f(x)| \leq (1+e)\nu(f)$

(1.5 points)

3. $\forall x \in [0,1]$, on a donc $|f(x)| + |f'(x)| \leq (1+2e)\nu(f)$. Or

$$N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq (1+2e)\nu(f)$$

donc $\beta = 1 + 2e$. (1 point)

De plus $\forall f \in E$ et $\forall x \in [0,1]$

$$|f(x) + f'(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$$

d'où l'on déduit que

$$\nu(f) \leq N(f)$$

donc $\alpha = 1$ (1 point).

On a donc

$$\nu(f) \leq N(f) \leq (1+2e)\nu(f) \tag{1}$$

4. Compte-tenu de (1), les deux normes sont équivalentes. (0.25 point)

## Exercice 3 : Ouvert, fermé, adhérence et intérieur (5 points)

Pour les ensembles suivants montrer s'ils sont des ouverts, des fermées ou aucun des deux et déterminer leur adhérent et leur intérieur

1. On considère l'ensemble $U_1 = A \cup B$ où

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1 - x\right\}$$
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x \leq 0 \text{ et } |y| \leq 1 + x\right\}$$

2.
$$U_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 \leq 1\right\}$$

3.
$$U_3 = ]-\infty, 0] \cup ]-1, 1[ \cup [3, 6[ \cup \{7\}$$

Solution :

1. La façon la plus simple de répondre à cette question est de voir que $U_1 = \overline{B}_1((0,0),1)$. Ainsi, $U_1$ est un fermé et pas un ouvert (0.5 point). De plus $\overline{U}_1 = U_1$ (0.5 point) et alors $\overset{\circ}{U}_1 = B_1((0,0),1)$ (0.5 point).

2. On peut par exemple définir la fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 3y^2$. Alors dans ce cas, $U_2 = f^{-1}(]-\infty, 1])$. $U_2$ est donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc c'est un fermé (0.5 point). Comme $U_2$ est un fermé, $\overline{U}_2 = U_2$ (0.5 point).

   Déterminons maintenant l'intérieur (1 point). Pour cela, je pense que l'on pourrait faire un exo intéressant pour les années à venir afin de démontrer la conjecture suivante :
$$\text{Si } A = f^{-1}(B) \text{ alors } \overset{\circ}{A} = f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \qquad (2)$$
   où $f$ est une application continue. J'ai la flemme de démontrer cela proprement ce soir.

   Mais nous allons le faire de manière plus classique. Posons donc comme candidat
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 < 1\right\}$$
   Alors $C$ est bien un ouvert (car $C = f^{-1}(]-\infty, 1[)$) et $C \subset U_2$. Ainsi, on sait que $C \subset \overset{\circ}{U}_2$. Démontrons maintenant que $\overset{\circ}{U}_2 \subset C$. Or cela est vrai ssi
$$\forall X \in U_2 \backslash C, \forall r > 0, B(X,r) \not\subset U_2$$
   Or
$$U_2 \backslash C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 = 1\right\}$$

or c'est clairement le cas car ceci correspond au bord de l'ellipse...

Finalement $\overset{\circ}{U_2} = C$.

3. Commençons par remarquer que $U_3 = ]-\infty, 1[\cup[3,6[\cup\{7\}$.
Clairement ce n'est ni un ouvert (à cause du singleton 7 ou de 3 (0.25 point)) ni un fermé (à cause de 1 et 6 (0.25 point)). De plus l'adhérent d'une union et l'union des adhérents donc $\overline{U}_3 = ]-\infty, 1] \cup [3,6] \cup \{7\}$ (0.5 point).

(0.5 point) Cherchons maintenant $\overset{\circ}{U_3}$. Pour cela, proposons le candidat suivant $C = ]-\infty, 1[\cup]3,6[$. $C$ est bien un ouvert et inclus dans $U_3$ d'où l'on déduit que $C \subset \overset{\circ}{U_3}$. Démontrons maintenant que $\overset{\circ}{U_3} \subset C$. Or cela est vrai ssi

$$\forall X \in U_3 \backslash C, \forall r > 0, B(X,r) \not\subset U_2$$

où

$$U_3 \backslash C = \{3\} \cup \{7\}$$

qui vérifie clairement la condition (3).

## Exercice 4 : Limite de fonction

Déterminer la limite des fonctions suivantes

1. en (0,0) de
$$f_1(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4}$$
(0.5 point)
2. en (0,0) de
$$f_2(x,y) = \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$$
(0.5 point)
3. en (0,0) de
$$f_3(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{1 - e^{(x^2+y^2)}}$$
(1 point)

4. en (0,0,0,0) de
$$f_4(x,y,u,v) = \frac{x^3 + y^3 - \frac{1}{2}u^3 - v^3}{x^3 + y^2}$$
(1 point)
5. en (0,0) de
$$f_5(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|} + |y|\sqrt{|x|}}$$
*Indication : on montrera que* $|x|\sqrt{|y|} + |y|\sqrt{|x|} \leq 2\big(\max(|x|,|y|)\big)^{3/2}$. (1.5 points)

Solution :

1. Considérons $f_1(0,y) = 1/y$ qui tend vers $\pm\infty$ donc pas de limite en $(0,0)$.(0.5 point)
2. Clairement $f_2(x,0) = f_2(0,y) = 0$ donc la limite de $f_2$ pour ces deux est 0. Mais, $f(x, x^{3/2}) = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$. Donc la fonction n'a pas de limite. (0.5 point)
3. Passons en coordonnées polaires. Alors $x^2 + y^2 = \rho^2$. Ainsi
$$\tilde{f}_3(\rho,\theta) = \frac{\rho^2}{1 - e^{\rho^2}}$$
Or pour $t \in \mathbb{R}$ qui tend vers 0, on a
$$e^t = 1 + t + t\epsilon(t)$$
avec $\epsilon$ qui tend vers 0 quand $t$ tend vers 0. Ainsi
$$e^{\rho^2} = 1 + \rho^2 + \rho^2\epsilon(\rho)$$
On a donc
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{-\rho^2 - \rho^2\epsilon(\rho)} = -1$$
donc la limite de $f_3$ en $(0,0)$ est $-1$. (1 point)
4. $f_4(x,0,0,0) = 1$ alors que $f_4(x,0,x,0) = 1/2$ donc pas de limite. (1 point)

5. Commençons par montrer que l'indication est vraie. Pour cela, considérons tout d'abord que $max(|x|,|y|) = |y|$. Alors

$$\begin{aligned} |x|\sqrt{|y|} &\leq |y|\sqrt{|y|} = |y|^{3/2} \\ |y|\sqrt{|x|} &\leq |y|\sqrt{|y|} = |y|^{3/2} \end{aligned} \tag{3}$$

d'o l'on déduit que

$$|x|\sqrt{|y|} + |y|\sqrt{|x|} \leq 2|y|^{3/2}$$

Si on pose $max(|x|,|y|) = |x|$, alors dans ce cas, on obtient

$$|x|\sqrt{|y|} + |y|\sqrt{|x|} \leq 2|x|^{3/2}$$

Ainsi on déduit bien que

$$|x|\sqrt{|y|} + |y|\sqrt{|x|} \leq 2(max(|x|,|y|))^{3/2}$$

(0.5 point)

Or, on a également que

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq max(|x|,|y|)$$

on déduit de ces deux expressions que

$$|f_5(x,y)| \geq \frac{1}{2\sqrt{max(|x|,|y|)}}$$

(0.5 point)

qui tend vers l'infini quand $x$ et $y$ tendent vers 0 donc $f_5$ tend vers plus ou moins l'infini en $(0,0)$ (0.5 point).