# Cycle préparatoire 1ère année

# Devoir surveillé 4

*M. Bahtiti, K. Guezguez, A. Hajej, B. Laquerriere, J.-M. Masereel*

| | |
|---|---|
| *Matière* : **Algèbre** | *Date* : **Jeudi 11 mars 2021** |
| **Appareils électroniques et documents interdits** | *Durée* : **1 heures 30 minutes** |
| | *Nombre de pages* : **5** |

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.**

*Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

⋄⋄⋄

**Exercice 1** (Groupes : 3 points)**.**

1. Montrer que $(\mathbb{U},\times)$ est groupe.
2. $A=(\{2k\ /\ k\in\mathbb{Z}\},+)$ et $B=(\{2k+1\ /\ k\in\mathbb{Z}\},+)$ sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ ?
3. $C=\left(\{a\sqrt{2}+b\pi\ /\ a,b\in\mathbb{Z}\},+\right)$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ ?
4. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $\star$ définie par :

$$(a,b)\star(a',b')=(a-2a',b+3b')$$

$(\mathbb{R}^2,\star)$ est-il un groupe ?

⋄⋄⋄

1. (0.75 point) On montre que c'est un sous-groupe de $(\mathbb{C},\times)$ :
   - $\mathbb{U}\subset\mathbb{C}$
   - $|1|=1$ donc $1\in\mathbb{U}$.
   - Soit $z$ et $z'$ dans $\mathbb{U}$, alors $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}=\frac{1}{1}=1$. Donc $\frac{z}{z'}\in\mathbb{U}$.
2. 
   - (0.75 point)
     - $A\subset\mathbb{Z}$
     - $0=2\times 0$, donc $0\in A$.
     - Soit $n=2k$ et $n'=2k'$ dans $A$, alors $n-n'=2(k-k')$ avec $k-k'\in\mathbb{Z}$, donc $n-n'\in A$.

     Donc $A$ est bien un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
   - (0.25 points) $B$ n'est pas stable par addition car la somme de nombres impaires est paire.
3. (0.75 point)
   - $C\in\mathbb{R}$.
   - $0=0\sqrt{2}+0\pi\in C$.

— Soit $r = a\sqrt{2} + b\pi$ et $r' = a'\sqrt{2} + b'\pi$ deux éléments de $C$. Alors $r - r' = (a - a')\sqrt{2} + (b - b')\pi$ avec $(a - a') \in \mathbb{Z}$ et $(b - b') \in \mathbb{Z}$. Donc $r - r' \in C$.

Donc $C$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

4. (0.5 point)

   — Nous avons clairement une l.c.i.

   — Soit $(a, b)$, $(a', b')$ et $'a'', b'')$ trois éléments de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$((a,b)\star(a',b'))\star(a'',b'') = (a-2a', b+3b')\star(a'',b'') = (a-2a'-2a'', b+3b'+3b'')$$
$$(a,b)\star((a',b')\star(a'',b'')) = (a,b)\star(a'-2a'', b'+3b'') = (a-2a'-4a'', b+3b'+9b'')$$

   La loi n'est donc pas associative. Ce n'est donc pas un groupe.
   On peut aussi remarquer que le seul élément neutre possible à droite est $(0,0)$ qui n'est pas neutre à gauche.

**Exercice 2** (Groupes et Morphismes : 4 points)**.** Soit $(G, \top)$ et $(G', \star)$ deux groupes, et soit $f$ un morphisme de groupes de $(G, \top)$ dans $(G', \star)$.

1. Si $e$ est l'élément neutre de $(G, \top)$ et $e'$ est l'élément neutre de $(G', \star)$, montrer que $f(e) = e'$.
2. Montrer que pour tout $x$ de $G$, $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.
3. Soit $H$ un sous-groupe de $G$. Montrer que $f(H)$ est un sous-groupe de $G'$.
4. Montrer que $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe de $(G, \top)$

⋄ ⋄ ⋄

1. (1 point) Nous avons $e \top e = e$ et $f$ étant un morphisme, cela donne $f(e) \star f(e) = f(e) = f(e) \star e'$. Donc en simplifiant par $f(e)$ (on a le droit car on est dans un groupe), $f(e) = e'$.
2. (1 point) Pour tout $x$ dans $G$, nous avons $e = x \top x^{-1} = x^{-1} \top x$. Donc par morphisme, $e' = f(e) = f(x) \star f(x^{-1}) = f(x^{-1}) \star f(x)$. Donc $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.
3. (1 point)

   — $f(H) \subset G'$.

   — $e \in H$, donc $e' = f(e) \text{inf}(H)$.

   — Soit $y$ et $y'$ dans $f(H)$, alors il existe $x$ et $x'$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Ainsi, $y \star y'^{-1} = f(x) \star f(x')^{-1} = f(x \top x'^{-1})$. Or $x \top x'^{-1} \in H$ car $H$ est un groupe. Ainsi, $y \star y'^{-1} \in f(H)$.
4. (1 point)

   — $\text{Ker}(f) \subset G$.

   — $e' = f(e)$, donc $e \in \text{Ker}(f)$.

   — Soit $x$ et $'$ deux éléments de $\text{Ker}(f)$, alors $f(x \top x'^{-1}) = f(x) \star (f(x'))^{-1} = e' \star e' = e'$. Donc $x \top x' \in \text{Ker}(f)$.

   Donc $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe de $G$.

**Exercice 3** (Groupes et Morphismes : 3 points)**.**
Soit $\star$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \star y = \left(x^3 + y^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

1. Montrer que $(\mathbb{R},\star)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que $f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{R},\star)$ définie par $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ est un isomorphisme de groupes.

◇◇◇

1. (2 points)
   — La loi $\star$ est clairement une lci.
   — La loi est clairement commutative.
   — Soit $x$, $y$ et $z$ trois réels. Alors
   $$x\star(y\star z)=x\star\left(y^3+z^3\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^3+y^3+z^3\right)^{\frac{1}{3}}$$
   $$(x\star y)\star z=\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{3}}\star z=\left(x^3+y^3+z^3\right)^{\frac{1}{3}}$$
   La loi est donc associative.
   — Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $x\star 0=0\star x=(x^3)^{\frac{1}{3}}=x$ (la fonction $x\mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est la bijection réciproque de la fonction cube dans $\mathbb{R}$). Donc 0 est l'élément neutre.
   — Soit $x\in\mathbb{R}$, alors $x\star(-x)=(-x)\star x=\left(x^3+(-x)^3\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x^3-x^3\right)^{\frac{1}{3}}=0$. Donc tout élément est inversible.

   Ainsi, $(\mathbb{R},\star)$ est bien un groupe commutatif.
2. (1 point)
   — Vérifions que c'est un morphisme : Soit $x$ et $y$ deux réels, alors
   $$f(x)\star f(y)=\left(f(x)^3+f(y)^3\right)^{\frac{1}{3}}=\left(x+y\right)^{\frac{1}{3}}=f(x+y)$$
   — Nous savons déjà que la fonction $f$ est bijective, de réciproque $x\mapsto x^3$.

   La fonction $f$ est donc bien un morphisme de groupe entre $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R},\star)$.

**Exercice 4** (Groupes et Morphismes : 11 points)**.**

**Partie A :** Soit $\alpha$ un nombre complexe non nul vérifiant $\alpha^2=\alpha-1$ (on ne demande pas de calculer $\alpha$).

1. 
   (a) Montrer que $\alpha^3=-1$.
   (b) Soit $k\in\mathbb{N}$. Calculer, $\alpha^{3k}$, $\alpha^{3k+1}$ et $\alpha^{3k+2}$ en fonction de $\alpha$.
   (c) En déduire $\alpha^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   (d) Soit $p\in\mathbb{Z}$, déterminer $\alpha^p$ en fonction de $\alpha$ (et de $p$).
2. 
   (a) Montrer que $H=\{n\in\mathbb{Z}\ /\ \alpha^n=1\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z};+)$.
   (b) Montrer que $H=6\mathbb{Z}=\{6z\ /\ z\in\mathbb{Z}\}$.
3. Déterminer le plus petit sous-groupe $G$, de $\mathbb{C}^*$, contenant $\alpha$.

**Partie B :** Soit $\beta\in\mathbb{C}^*$, on note $\varphi_\beta$ l'application :

$$\varphi_\beta:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}&\longrightarrow&\mathbb{C}^*\\ n&\longmapsto&\beta^n\end{array}\right.$$

1. Montrer que pour tout $\beta \in \mathbb{C}^*$, $\varphi_\beta$ est une morphisme de groupe.
2. Soit $\alpha$ le nombre complexe défini dans la partie $A$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi_\alpha = H$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}\,\varphi_\alpha = G$.
   (c) L'application $\varphi_\alpha$ est-elle injective ? surjective ?
3. À quelle(s) condition(s) sur $\beta$, l'application $\varphi_\beta$ est injective ?

⋄⋄⋄

**Partie A :**

1.
   (a) (0.5 point) $\alpha^3 = \alpha \times \alpha^2 = \alpha(\alpha-1) = \alpha^2 - \alpha = \alpha - 1 - \alpha = -1$
   (b) (1 point) Nous avons alors $\alpha^{3k} = (-1)^k = -1$ si $k$ est impair et 1 si $k$ est pair.
   Ensuite, $\alpha^{3k+1} = \alpha^{3k}\alpha = \pm\alpha$ suivant la parité de $k$.
   De même, $\alpha^{3k+2} = \pm(\alpha - 1)$ suivant la parité de $k$.
   (c) (0.5 point) Il y a donc 6 cas possibles :
   $$\alpha^{6k} = 1 \qquad \alpha^{6k+1} = \alpha \qquad \alpha^{6k+2} = \alpha - 1$$
   $$\alpha^{6k+3} = -1 \qquad \alpha^{6k+4} = -\alpha \qquad \alpha^{6k+5} = 1 - \alpha$$
   (d) (0.5 point) Nous remarquons simplement que $\alpha^6 = 1$, donc $\alpha^{-1} = \alpha^5 = 1 - \alpha = \alpha^{6(-1)+5}$. Ainsi, la formule trouvée précédemment est encore valable pour $k \in \mathbb{Z}$.
2.
   (a) (1 point)
   — $H \subset \mathbb{Z}$.
   — $\alpha^0 = 1$ donc $0 \in H$.
   — Soit $n$ et $n'$ éléments de $H$, alors $\alpha^{n-n'} = \frac{\alpha^n}{\alpha^{n'}} = \frac{1}{1} = 1$. Donc $n - n' \in H$.
   Donc $H$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$.
   (b) (1 point) On a montré à la question précédente que $\alpha^n = 1$ si et seulement si $n$ est un multiple de 6. Donc on a bien $H = 6\mathbb{Z}$.
3. (2 points) Soit $Q$ un sous-groupe contenant $\alpha$. Par stabilité par produit et passage à l'inverse, il doit nécessairement contenir toutes les puissances de $\alpha$. Ainsi, d'après ce qui précède :
   $$P = \{\alpha^p \ / \ p \in \mathbb{Z}\} = \{1, \alpha, \alpha - 1, -1, -\alpha, 1 - \alpha\} \subset Q$$
   Or :
   — $P \subset \mathbb{C}^*$
   — $1 \in P$
   — Si $z_1$ et $z_2$ sont deux éléments de $P$, alors $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha^{p_1}}{\alpha^{p_2}} = \alpha^{p_1 - p_2} \in P$.
   Ainsi $P$ est un sous-groupe (contenant $\alpha$). Donc puisqu'il contient tous les sous-groupes contenant $\alpha$, c'est le plus petit. Ainsi, $P = G$.

**Partie B :**

1. (1 point) Soit $\beta \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{Z}$ et $n' \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\varphi_\beta(n+n') = \beta^{n+n'} = \beta^n \times \beta^{n'} = \varphi_\beta(n) \times \varphi_\beta(n')$$
Donc $\varphi_\beta$ est bien un morphisme de groupe entre $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. 
   (a) (0.5 point) Par définition du noyau, $\mathrm{Ker}(\varphi_\alpha) = \{n \in \mathbb{Z} \ / \ \alpha^n = 1\} = H$.

   (b) (1 point) Soit $z \in \mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \alpha^n$, donc $z \in G$. Réciproquement, si $z \in G$, alors $z$ s'écrit $z = \alpha^n \in \mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$. D'où l'égalité.

   (c) (1 point) Le noyau n'étant pas réduit à l'élément neutre, elle n'est pas injective et l'image n'était pas égale à $\mathbb{C}$ tout entier, elle n'est pas surjective.
3. (1 point) L'application est injective si et seulement si, pour tout $n$ non nul, $\beta^n \neq 1$. Or s'il existe $n \neq 0$ tel $\beta^n = 1$, alors nécessairement $|\beta| = 1$. Ainsi, si $|\beta| \neq 1$, on est sûr que l'application n'est pas injective. Par contre, si $|\beta| = 1$, on ne peut pas conclure. En effet, on sait qu'il existe des complexe (comme les racines n-ièmes de l'unitté) tel que $\varphi$ n'est pas injective. Mais il existe aussi des complexes de module un qui ne sont jamais racine n-ième de l'unité (par exemple $\mathrm{e}^{i\sqrt{2}}$ vérifie que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{ni\sqrt{2}} \neq 1$ (car $n\sqrt{2} \neq 2k\pi$).

**Exercice 5** (Systèmes linéaires : 3 points)**.**
Ayant à résoudre le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} 2x + 7y + z = 1 & (E_1) \\ 2x + 3y - 5z = 4 & (E_2) \\ -4x + 3y + z = 5 & (E_3) \end{cases}$$
un étudiant démarre ainsi :

j'élimine $x$ en retranchant $(E_2)$ de $(E_1)$ : $4y + 6z = -3$
j'élimine $y$ en retranchant $(E_3)$ de $(E_2)$ : $6x - 6z = -1$
j'élimine $z$ en retranchant $(E_1)$ de $(E_3)$ : $-6x - 4y = 4$

1. Le système ainsi obtenu est-il équivalent au système initial ?
2. Résoudre le système initial par la méthode de Gauss.

⋄⋄⋄

1. (1 point) Il y a plusieurs niveaux de réponse acceptables.
   - L'élève n'a pas respecté scrupuleusement l'algorithme de Gauss. On ne peut donc pas certifier que les systèmes sont équivalents (même si peut-être, par chance, ils le sont).
   - En résolvant les 2 systèmes (et donc en faisant la question 2 avant), on remarque que l'on n'a pas le même ensemble de solution.
   - En calculant les rangs et trouvant qu'ils sont différents.
2. (2 points) Le système est équivalant successivement à
$$\begin{cases} 2x + 7y + z = 1 \\ 4y + 6z = -3 \\ 17y + z = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 7y + z = 1 \\ 4y + 6z = -3 \\ 90z = -79 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -\frac{47}{45} \\ y = \frac{17}{30} \\ z = -\frac{79}{90} \end{cases}$$