	Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année **Devoir surveillé 1** *N. Arancibia, M. Bahtiti, K. Guezguez, A. Hajej, B. Laquerriere, J.-M. Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Jeudi 22 octobre 2020**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **1 heures 30 minutes**
		Nombre de pages : **3**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

$\diamond\diamond\diamond$

4

Exercice 1. Dans chacun des deux cas suivants, donner, lorsque c'est possible la négation et la contraposée.

1. $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall a > 0, \forall b > 0, \left(|a-b| < \eta \Rightarrow \left|f(a) - f(b)\right| < \varepsilon\right)$$

2. $$\left[\forall u \in E,\ \left(f(u) = 0 \Rightarrow g(u) = 0\right)\right] \Rightarrow \left[\exists \beta > 0,\ g \leq \beta f\right]$$

$\diamond\diamond\diamond$

1

1. — Négation :
$$\exists \varepsilon,\ \forall \eta > 0,\ \exists a > 0,\ \exists b > 0,\ \left(|a-b| < \eta \text{ ET } \left|f(a) - f(b)\right| \geq \varepsilon\right)$$

0,5

   — Pas de contraposée, car ce n'est pas une implication.

2. — Négation :

   1
$$\left[\forall u \in E,\ \left(f(u) = 0 \Rightarrow g(u) = 0\right)\right] \text{ ET } \left[\forall \beta > 0,\ g > \beta f\right]$$

   — Contraposée :
$$\left[\forall \beta > 0,\ g > \beta f\right] \Rightarrow \left[\exists u \in E,\ \left(f(u) = 0 \text{ ET } g(u) \neq 0\right)\right]$$

3,5

Exercice 2. 0,5 1

1. Démontrer la proposition suivante :
$$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ \forall b \in \mathbb{N}^*,\ b > a \Rightarrow b^2 - a^2 \geq 3$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier

$\diamond\diamond\diamond$

1. — Première solution : $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$. Or $b > a > 0$, donc dans un premier temps, $b - a > 0$, soit $b - a \geq 1$. Ensuite, $b > a \geq 1$, d'où $b \geq 2$ et $b + a \geq 2 + 1 = 3$. Finalement, $b^2 - a^2 \geq 3$.

1,5

   — Seconde solution : $b > a$, donc $b \geq a + 1$. Par croissance de la fonction carré, nous avons $b^2 \geq (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$. D'où $b^2 - a^2 \geq 2a + 1 \geq 2 \times 1 + 1 = 3$.

2 2. Faisons un raisonnement par l'absurde et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $\sqrt{n^2+1}$ est un entier. Posons alors $\sqrt{n^2+1} = b \in \mathbb{N}^*$ et $n = a \in \mathbb{N}^*$. Alors, en passant au carré, nous avons que $b^2 = n^2+1$ et $a^2 = n^2$, d'où $b^2 - a^2 = 1 < 3$. Cela contredit donc la propriété précédente.
D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}$.

1,5 **Exercice 3.** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

1,5

$$n^2 - 6n + 5 \text{ pair } \Rightarrow n \text{ impair}$$

◇◇◇

Nous allons faire une démonstration par contraposée. Supposons donc que n est pair. Alors, d'après un exercice du TD, n^2 est pair, d'où $n^2 - 6n$ est pair et enfin $n^2 - 6n + 5$ impair.

7 **Exercice 4.** Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 3$. (*indication :* $2x^2 - 3x - 9 = (x-3)(2x+3)$.)
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.

◇◇◇

1. Faisons une démonstration par récurrence. Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n) =$« $x_n > 3$ ».
   0,5
   — Pour $n = 0$, nous avons $x_0 = 4 > 3$. Donc $P(0)$ est vraie.
   — Soit $n \geq 0$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons alors que $P(n+1)$ vraie (c'est-à-dire $x_{n+1} > 3$).
   1,5
   $$x_{n+1} - 3 = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2} - 3 = \frac{2x_n^2 - 3 - 3(x_n+2)}{x_n+2} = \frac{2x_n^2 - 3x_n - 9}{x_n+2} = \frac{(2x_n+3)(x_n-3)}{x_n+2}$$
   Or par hypothèse de récurrence, $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$. De même, le numérateur est strictement positif. Ainsi $x_{n+1} > 3$.
   0,5
   — Par récurrence, nous avons montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 3$.
2. La raisonnement est direct :
   2
   $$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{(2x_n+3)(x_n-3)}{x_n+2} - \frac{3}{2}(x_n-3) = (x_n-3)\left(\frac{2(2x_n+3) - 3(x_n+2)}{x_n+2}\right) = \frac{x_n(x_n-3)}{2(x_n+2)}$$
   Tous les facteurs étant strictement positifs, on en déduit que $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Nous allons à nouveau faire une démonstration par récurrence. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n) =$« $x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$ ».
   0,5
   — Pour $n = 0$, nous avons $x_0 = 4$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^0 + 3 = 1 + 3 = 4$. Donc $P(0)$ est vraie.
   — Soit $n \geq 0$ et supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie (c'est-à-dire $x_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 3$). En utilisant le résultat précédent et l'hypothèse de récurence, nous avons :
   1,5
   $$x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3) \geq \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   0,5
   — Par récurrence, nous avons montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.

4 **Exercice 5.** Soit A, B, C, D quatre ensembles. Quelle relation existe-t-il entre $(A \times C) \cup (B \times D)$ et $(A \cup B) \times (C \cup D)$?

◇◇◇

$\boxed{\subset}$ Soit $x = (x_1, x_2) \in (A \times C) \cup (B \times D)$. Deux cas possibles :

2

- Si $x \in A \times C$, alors $x_1 \in A \subset A \cup B$ et $x_2 \in C \subset C \cup D$.
- Sinon, $x \in B \times D$, et dans ce cas $x_1 \in B \subset A \cup B$ et $x_2 \in D \subset C \cup D$.

Dans les deux cas, $x \in (A \cup B) \times (C \cup D)$.

2 $\boxed{\supset}$ Un schémas permet de voir qu'il n'y a pas inclusion réciproque. Par exemple dans $\mathbb{R}$: $A = C = [1;3]$ et $B = D = [4;6]$. Alors $5 \in B \subset A \cup B$ et $2 \in C \subset C \cup D$. Ainsi $(5,2) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$. Pourtant $5 \notin A$, donc $(5,2) \notin A \times C$, et $2 \notin D$, donc $(5,2) \notin B \times D$. Donc $(5,2) \notin (A \times C) \cup (B \times D)$.