Proposition DS 5

1. Exercice 1 :

Fonction cosinus hyperbolique et réciproque :

On définit, lorsque c'est possible, la fonction f par : $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f, justifier que f est dérivable et qu'elle est paire.
2. Dresser le tableau de variations de f.

Fonction réciproque :

On considère désormais les fonctions g et φ définies par :

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad \varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction φ et préciser son signe.
4. En déduire que g est définie sur $[1, +\infty[$, puis que g est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Dans les trois questions suivantes, on considère deux réels x et y vérifiant :

$$x \geq 0 \qquad \text{et} \qquad y = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

5. Justifier que $y \geq 1$ puis montrer que :

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

6. On admettra que : $\frac{2y - \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1} \leqslant 1.$

   Montrer, en posant $X = e^x$, que $x = g(y)$.
7. Expliquer le lien entre la restriction de f à $\mathbb{R}^+$ et g et justifier l'existence de deux manières de calculer l'expression de $g'(x)$ sur $]1, +\infty[$.
8. Calculer cette expression de $g'(x)$ par la méthode de votre choix.

Correction :

1. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Elle est dérivable comme rapport et somme de fonctions dérivables.

$D_f = \mathbb{R}$: domaine symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = \ = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x) \implies f$ est paire.

2.

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}\frac{e^{2x} - 1}{2}.$$

f' est donc négative pour $x \leqslant 0$ et positive pour $x \geqslant 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	+	
f	$-\infty$ $\searrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

3. $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ définie $\iff x^2 - 1 \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

$$\text{Sur } [1, +\infty[, x \geqslant 1 \implies x + \sqrt{x^2-1} \geqslant 1 \implies \varphi(x) > 0.$$

Sur $]-\infty, -1], x \leqslant -1 \implies \sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x \implies x + \sqrt{x^2-1} < x - x = 0$.

$$\implies \varphi(x) < 0.$$

4. $g(x) = \ln(\varphi(x))$ définie $\iff \varphi(x) > 0 \iff x \in [1, +\infty[$.

Donc $D_g = [1, +\infty[$.

$$\text{La fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable pour } x > 0$$

$$\implies \varphi(x) = x + \sqrt{x^2-1} \text{ est dérivable pour } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$$\implies g(x) = \ln(\varphi(x)) \text{ est dérivable pour } x \in]1, +\infty[$$

5. On a vu que f possède un minimum égal à 1 et atteint pour $x = 0$.

Donc $y = f(x) \implies y \geqslant 1$.

De plus :

$$y = f(x) \iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \iff 2y = e^x + e^{-x} \iff 2ye^x = e^{2x} + 1$$

$$y = f(x) \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \iff \left(e^x\right)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

6. En posant $X = e^x$, l'équation précédente devient : $X^2 - 2yX + 1 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 4y^2 - 4 = 4\left(y^2-1\right) \geqslant 0$. Il y a donc 2 solutions possibles :

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4y^2-4}}{2} = y - \sqrt{y^2-1} \leqslant 1 \text{ et } X_2 = \frac{2y + \sqrt{4y^2-4}}{2} = y + \sqrt{y^2-1} \geqslant 1.$$

Comme $x \geqslant 0$, on a : $X = e^x \geqslant 1$. La solution à retenir est donc :

$$X = e^x = y + \sqrt{y^2-1} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = g(y).$$

7. Nous venons de montrer que :

$$x \geqslant 0 \text{ et } y = f(x) \iff x = g(y).$$

g est donc la réciproque de f restreinte à la partie positive de son domaine de définition.

Autrement dit, $g = f^{-1}$ avec f restreinte à $[1, +\infty[$.

Pour calculer la dérivée g' de g, nous avons deux manières possibles :

- dériver l'expression : $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ qui est de la forme $\ln(u)$,
- utiliser la formule de dérivation de la réciproque : $g'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$.

8.

$$g'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)'}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2. Exercice 2 :

1. A l'aide du théorème ou de l'inégalité des accroissements finis, prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(p+1)} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$$

2. En déduire que :

$$\forall p \geqslant 2, \quad \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \ln(p) - \ln(p-1)$$

1. On définit la suite : $S_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{3n} \frac{1}{p}$. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(3)$$

<u>**Correction**</u> :

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction f, définie par $f(x) = \ln(x)$, est continue et dérivable sur $[p, p+1]$. On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis (TAF) qui donne :

$$\exists\, c \in]p, p+1[, \quad f'(c) = \frac{f(p+1) - f(p)}{p+1-p} \iff \frac{1}{c} = f(p+1) - f(p) \iff \frac{1}{c} = \ln(p+1) - \ln(p)$$

$$c \in]p, p+1[\implies p < c < p+1 \implies \frac{1}{p+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{p}$$

D'où le résultat :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$$

2. A partir de l'encadrement précédent, on obtient : $\ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$.

Pour $p \geqslant 2$, ce même encadrement, appliqué à $p-1$ à la place de p, donne :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, p \geqslant 2, \qquad \frac{1}{p} \leqslant \ln(p) - \ln(p-1) \leqslant \frac{1}{p-1}$$

$\Longrightarrow \frac{1}{p} \leqslant \ln(p) - \ln(p-1)$.

On obtient ainsi l'encadrement recherché :

$$\forall p \geqslant 2, \ \ \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \ln(p) - \ln(p-1)$$

3. $S_n = \sum_{p=n+1}^{3n} \frac{1}{p}$.

Grâce à la question précédente, on peut encadrer S_n par des sommes télescopiques.

$$\sum_{p=n+1}^{3n} \ln(p+1) - \ln(p)) \leqslant \sum_{p=n+1}^{3n} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{p=n+1}^{3n} (\ln(p) - \ln(p-1))$$

$$\Longleftrightarrow \ln(3n+1) - \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(3n) - \ln(n)$$

$$\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{3n+1}{n+1}\right) \leqslant S_n \leqslant \ln\left(\frac{3n}{n}\right) = \ln(3)$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n+1}{n+1} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{3n+1}{n+1}\right) = \ln(3)$.

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(3).$$

3. Exercice 3 :

Déterminer l'expression de la dérivée énième $f^{(n)}(x)$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = (3x^2 - 5x + 1)e^{2x}.$$

Correction :

Calculons la dérivée énième de la fonction : $f(x) = \left(3x^2 - 5x + 1\right)e^{2x} = u(x)v(x)$.

Posons : $u(x) = 3x^2 - 5x + 1$ et $v(x) = e^{2x}$.

$$u'(x) = 6x - 5.$$
$$u''(x) = 6$$
$$u^{(k)}(x) = 0 \quad \text{pour } k \geqslant 3.$$

De la même manière :

$$v'(x) = 2e^{2x}.$$
$$v''(x) = 4e^{2x}.$$

On peut établir facilement part récurrence que :

$$v^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$$

On peut maintenant s'attaquer à f.

$$f^{(n)}(x) = (uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

A cause de, ou grâce à, u, cette somme s'arrête à $k = 2$ car $u^{(k)}(x) = 0 \quad$ pour $k \geqslant 3$.
Par conséquent :

$$f^{(n)}(x) = (uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} u^{(0)}(x)v^{(n-0)}(x) + \binom{n}{1} u^{(1)}(x)v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} u^{(2)}(x)v^{(n-2)}(x)$$
$$= 1.u(x)v^{(n)}(x) + n.\, u'(x)v^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} u''(x)v^{(n-2)}(x)$$
$$= \left(3x^2 - 5x + 1\right) 2^n e^{2x} + n.\,(6x-5)2^{n-1}e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2}.\,(6).2^{n-2}e^{2x}$$

$$= \left[4\left(3x^2 - 5x + 1\right) + 2n(6x-5) + n(n-1)(3)\right] 2^{n-2}e^{2x}$$
$$f^{(n)}(x) = \left[12x^2 + (12n-20)x + 3n^2 - 13n + 4\right] 2^{n-2}e^{2x}$$

4. Exercice 4 :

Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$, qui vérifie :

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0.$$

On souhaite montrer que :

$$\exists\, c \in\,]a, b[, \quad f''(c) = f(c).$$

On introduit la fonction g, définie par :

$$g(x) = \left(f'(x) - f(x)\right) e^x$$

1. Justifier que la fonction g est de classe C^1 sur $[a, b]$ et calculer $g'(x)$.
2. En appliquant le bon théorème à cette fonction, montrer l'existence de ce réel c

recherché.

Correction :

1. f de classe $\mathrm{C}^2 \implies f'$ de classe $\mathrm{C}^1 \implies (f'-f)$ de classe C^1.

L'exponentielle étant de classe C^∞, on en déduit que g est bien de classe C^1 sur $[a,b]$.

$$g'(x) = (f''(x) - f'(x))e^x + \big(f'(x) - f(x)\big)e^x = (f''(x) - f(x))e^x.$$

2. $g(a) = \big(f'(a) - f(a)\big)e^a = 0$, et $g(b) = \big(f'(b) - f(b)\big)e^b = 0$.

g est donc une fonction de classe C^1, donc continue dérivable sur $[a,b]$ et qui vérifie $g(a) = g(b)$.

Le théorème de Rolle permet alors de conclure :

$$\exists\, c \in]a,b[,\quad g'(c) = 0 \iff f''(c) = f(c).$$