# Corrigé du DM 5

## 1. Exercice 1 :

### Fonction cotangente hyperbolique

Soit $f$ une fonction définie par:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$. Justifier que $f$ est dérivable, est-elle impaire?
2. Montrer que $f'(x) = 1 - f^2(x)$
3. Dresser le tableau de variations de $f$.

### Fonction réciproque

On considère les fonctions $g$ et $\varphi$ définies par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

4. Déterminer le domaine de définition de la fonction $\varphi$ et son signe.
5. En déduire que $g$ est définie sur $I = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$, puis que $g$ est dérivable sur I.
6. Montrer que $|f(x)| > 1$, puis montrer que :

$$(f(x) - 1)(e^x)^2 - f(x) - 1 = 0$$

7. En déduire que $g(f(x)) = x$. (***On pourra poser :*** $X = (e^x)^2 = e^{2x}$).
8. Calculer $g'(x)$ pour $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$.

Correction :

**1.** $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ est définie tant que

$e^x - e^{-x} \neq 0 \iff e^x \neq e^{-x} \iff x \neq 0 \implies D_f = \mathbb{R}^*$.

$f$ est dérivable comme rapport et somme de fonctions dérivables.

$D_f = \mathbb{R}^*$ : domaine symétrique par rapport à $0$ et

$f(-x) = \;= \dfrac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -f(x) \implies f$ est impaire.

**2.** $f'(x) = \dfrac{\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right) - \left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right)}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2} = \dfrac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2 - \left(e^x + e^{-x}\right)^2}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2} = 1 - f(x)^2.$

**3.** Grâce à l'imparité, on peut limiter l'étude à $]0, +\infty[$.

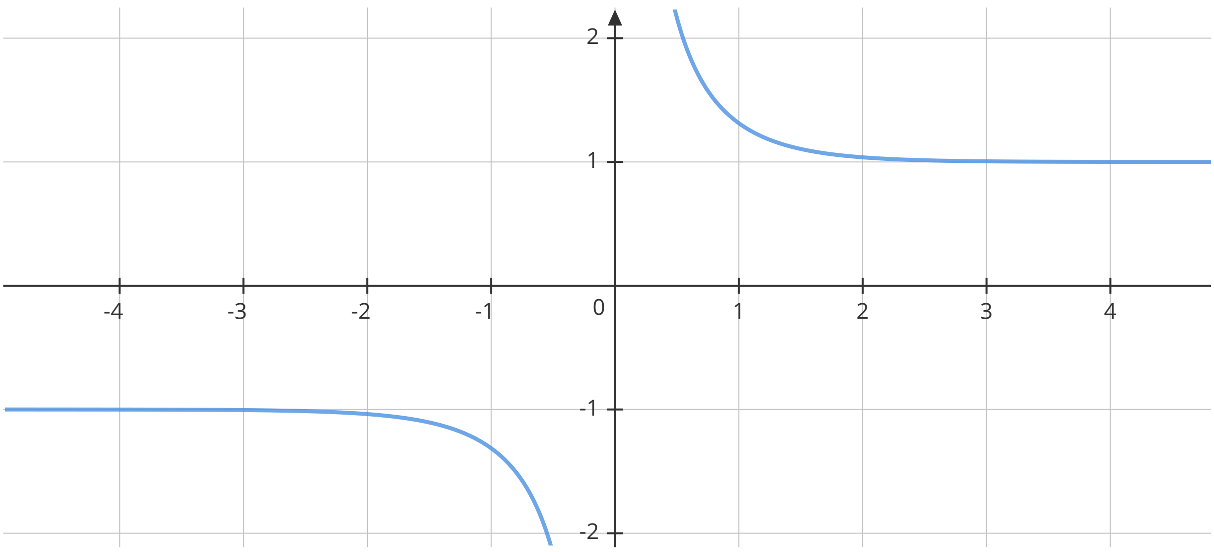
$$f'(x) = \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2 - \left(e^x + e^{-x}\right)^2}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2} = \frac{\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)^2 - \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)^2}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2} = \frac{-2}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2} < 0.$$

Donc $f$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ tout comme sur $]-\infty, 0[$ .

$$x > 0 \implies e^x > 1 > e^{-x} \implies e^x - e^{-x} > 0 \implies \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \left(\frac{2}{0^+}\right).$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1 + e^{-2x}\right)}{e^x\left(1 - e^{-2x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1.$$

| $x$ | $-\infty$ | | | 0 | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | - | | ‖ | | - | |
| $f$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ |




**4.** $\varphi(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ est définie pour $x \neq 1$. Un petit tableau de signes permet de voir que :

$\varphi(x) \leqslant 0$ sur $[-1,1[$ et $\varphi(x) > 0$ sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

**5.** $g(x) = \frac{1}{2}\ln(\varphi(x))$ est définie lorsque $\varphi(x) > 0 \implies D_g = ]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

$g$ est dérivable en tant que composée et rapport de fonctions dérivables.

**6.** On a vu que $f > 1$ sur $]0, +\infty[$ et que $f < -1$ sur $]-\infty, 0[ \implies |f| > 1$ sur $\mathbb{R}^*$.

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \iff f(x)\left(e^{2x}-1\right) = e^{2x}+1$$

$$\iff (f(x)-1)e^{2x} - f(x) - 1 = 0.$$

**7.** Si on pose $X = e^{2x}$ et $y = f(x)$, on obtient :

$$(y-1)X = y+1 \iff X = e^{2x} = \frac{y+1}{y-1} \iff 2x = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

$$\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = g(y) = g(f(x)).$$

$g$ est donc la réciproque de $f$, définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

8. $g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \implies g'(x) = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{2}\frac{-2}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}.$$

<u>**Deuxième méthode :**</u>

$$g(x) = f^{-1}(x) \implies g'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Or d'après la question 2, $f'(x) = 1 - f^2(x)$. On en déduit :

$$g'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{1-\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

## 2. Exercice 2 :

1. A l'aide du théorème ou de l'inégalité des accroissements finis, prouver (en utilisant $f(x) = \frac{1}{x}$) que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{(p+1)^2} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{p^2}$$

2. En déduire que :

$$\forall p \geq 2, \qquad \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{p^2} \leqslant \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

3. On définit la suite : $\quad S_n = \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p^2}.$

Montrer que : $\quad \lim_{n \to +\infty} S_n = 0.$

**Correction** :

**1.** Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f$, définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, est continue et dérivable sur $[p, p+1]$.

On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis (TAF) qui donne :

$$\exists\, c \in ]p, p+1[, \quad f'(c) = \frac{f(p+1) - f(p)}{p+1-p} \iff \frac{-1}{c^2} = f(p+1) - f(p) \iff \frac{-1}{c^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}$$

Ce qu'on peut également écrire : $\quad \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{c^2}.$

$$c \in ]p, p+1[ \implies p < c < p+1 \implies \frac{1}{(p+1)^2} < \frac{1}{c^2} < \frac{1}{p^2}$$

D'où le résultat :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{(p+1)^2} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{p^2}$$

**2.** A partir de l'encadrement précédent, on obtient : $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{p^2}.$

Pour $p \geqslant 2$, ce même encadrement, appliqué à $p-1$ à la place de $p$, donne :
$\frac{1}{p^2} \leqslant \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}.$
On obtient ainsi l'encadrement recherché :

$$\forall p \geq 2, \qquad \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{p^2} \leqslant \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

**3.** $\quad S_n = \sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p^2}.$

Grâce à la question précédente, on peut encadrer $S_n$ par des sommes télescopiques.

$$\sum_{p=n}^{2n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)\leqslant\sum_{p=n}^{2n}\frac{1}{p^2}\leqslant\sum_{p=n}^{2n}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}\leqslant S_n\leqslant\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n}$$
Le théorème des gendarmes permet alors de conclure :
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 0.$$

## 3. Exercice 3 :

Déterminer l'expression de la dérivée énième $f^{(n)}(x)$ de la fonction $f$ définie par :
$$f(x) = \left(x^3+3x^2-2x+5\right)e^{-3x}.$$

**Correction** :

Calculons la dérivée énième de la fonction : $f(x) = \left(x^3+3x^2-2x+5\right)e^{-3x} = u(x)v(x)$.

Posons : $u(x) = x^3+3x^2-2x+5$ et $v(x) = e^{-3x}$.
$$u'(x) = 3x^2+6x-2.$$
$$u''(x) = 6x+6$$
$$u^{(3)}(x) = 6$$
$$u^{(k)}(x) = 0 \quad \text{pour } k \geqslant 4$$

De la même manière :
$$v'(x) = -3e^{-3x}.$$
$$v''(x) = 9e^{-3x}.$$
On peut établir facilement part récurrence que :
$$v^{(k)}(x) = (-3)^k e^{-3x}$$

On peut maintenant s'attaquer à $f$.
$$f^{(n)}(x) = (uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$
A cause de, ou grâce à, $u$, cette somme s'arrête à $k=3$ car $u^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geqslant 4$.
Par conséquent :
$$f^{(n)}(x) = (uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{3}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$
$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}u^{(0)}(x)v^{(n-0)}(x)+\binom{n}{1}u^{(1)}(x)v^{(n-1)}(x)+\binom{n}{2}u^{(2)}(x)v^{(n-2)}(x)+\binom{n}{3}u^{(3)}(x)v^{(n-3)}(x)$$
$$= 1.u(x)v^{(n)}(x)+n.\,u'(x)v^{(n-1)}(x)+\frac{n(n-1)}{2}u^{(2)}(x)v^{(n-2)}(x)+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}u^{(3)}(x)v^{(n-3)}(x)$$

$$= \left(x^3+3x^2-2x+5\right)(-3)^n e^{-3x} + n.\left(3x^2+6x-2\right)(-3)^{n-1}e^{-3x} + \frac{n(n-1)}{2}.(6x-6).(-3)^{n-2}e^{-3x}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.6.(-3)^{n-3}e^{-3x}$$

$$= \left[-27\left(x^3+3x^2-2x+5\right)+9n\left(3x^2+6x-2\right)-n(n-1)(9x-9)+n(n-1)(n-2)\right](-3)^{n-3}e^{-3x}$$

## 4. Exercice 4 :

Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$, qui vérifie :

$$f(0)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \ \in \mathbb{R}.$$

On souhaite montrer que :

$$\exists\, d\in\, ]0,+\infty[,\quad f'(d)=0.$$

On introduit la fonction $g$, définie pour $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$g(t)=f(\tan(t))$$

1. Justifier que la fonction $g$ est de classe $C^1$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(t)$.
2. Montrer que l'on peut prolonger $g$ par continuité en $\frac{\pi}{2}$.

   Quelle valeur doit-on donner à $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ?
3. En appliquant le bon théorème à cette fonction, montrer l'existence d'un réel $c\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tel que : $g'(c)=0$.
4. En déduire l'existence de ce réel $d\in\,]0,+\infty[$, tel que : $f'(d)=0$.

**Correction** :

**1.** La fonction $x\mapsto\tan(x)$ est de classe $C^\infty$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $f$ est de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$.

Donc $g$ est de classe $C^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

**2.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ $\underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(\tan(x))=\ell.$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x)=\ell \quad\Longrightarrow$ on peut prolonger $g$ par continuité en $\frac{\pi}{2}$.

Il faut alors poser : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ell$.

**3.** $g$ est maintenant une fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et qui vérifie : $g(0) = f(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ell$. Le théorème de Rolle garantit alors que :

$$\exists\, c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g'(c) = 0.$$

**4.** $g(t) = f(\tan(t)) \implies g'(t) = (\tan(t))' \times f'(\tan(t)) = \left(1 + \tan^2(t)\right) f'(\tan(t))$.

On a trouvé un réel $c$ tel que : $g'(c) = 0 \iff \left(1 + \tan^2(c)\right) f'(\tan(c)) = 0$
$\implies f'(\tan(c)) = 0$.

Si on pose $d = \tan(c)$, on aura ainsi trouvé un réel $d \in \left]0, +\infty\right[$, tel que : $f'(d) = 0$.