	Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année Devoir surveillé 1 *K. Fayad, K. Guezguez, J.-M. Masereel*	
CY TECH	*Matière* : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 28 février 2020**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

◇◇◇

Exercice 1. [7 points]
On considère la fraction rationnnelle :

$$F(X) = \frac{16X}{(X^4-1)^2}$$

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction F.
2. Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ puis dans $\mathbb{C}(X)$. (Indication : on pourra calculer $F(2)$ et exploiter la parité de F pour trouver des relations entre les coefficients).

Exercice 2. [6 points]

1. Soit $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e. Montrer que si $(\forall x \in G,\ x^2 = e)$, alors G est abélien.
2. Soit $f : (G,*) \to (H,\ .\ )$ un morphisme de groupes. Montrer que si G_1 est un sous-groupe de G alors $f(G_1)$ est un sous-groupe de H.
3. Pour tout $(x;y) \in [0;1]^2$, on pose :

$$x * y = x + y - xy$$

   (a) Montrer que $([0;1],*)$ est un magma commutatif et associatif.

   (b) Montrer que $([0;1],*)$ possède un élément neutre.

   (c) Quels sont les éléments inversibles de $([0;1],*)$?

Exercice 3. [7 points]
L'objectif de l'exercice est de montrer que les sous-groupes de $(\mathbf{Z},+)$ sont de la forme $n\mathbf{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, où $n\mathbf{Z} = \{np \mid p \in \mathbf{Z}\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $n\mathbf{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z},+)$.
2. Soit $G \neq \{0\}$ un sous-groupe de $(\mathbf{Z},+)$.

   (a) Montrer que $G \cap \mathbb{N}^* \neq \varnothing$. On note $n = \min(G \cap \mathbb{N}^*)$.

   (b) Montrer que $n\mathbf{Z} \subset G$.

(c) Soit $p \in G$. A l'aide de la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$, montrer qu'il existe $q \in \mathbf{Z}$, tel que $p = nq$. (Indication : montrer que le reste de la division euclidienne de p par n est nul).

(d) Déduire que $G = n\mathbf{Z}$.

3. Justifier, en prenant comme exemple deux sous-groupes de $\mathbf{Z}$, que la réunion de deux sous-groupes n'est pas un sous-groupe.

Exercice 4. [10 points]
On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

1. Montrer que la multiplication des nombres complexes définit une structure de groupe sur $\mathbb{C}^*$.
2. Vérifier que l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \,.\,)$.
3. Montrer que l'application
$$\begin{array}{cccc} f & : & (\mathbb{C}^*, \,.\,) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*, \,.\,) \\ & & z & \longmapsto & |z| \end{array}$$
est un morphisme de groupes.
4. On note $\mathcal{U}$ le noyau de f.
   (a) Décrire l'ensemble $\mathcal{U}$ et le représenter dans le plan complexe.
   (b) Justifier que $\mathcal{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \,.\,)$
5. On définit sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{U}$ la loi $\otimes$ par,
$$(r, e^{i\theta}) \otimes (r', e^{i\theta'}) = (r r', e^{i(\theta+\theta')}), \qquad \forall (r, e^{i\theta}), (r', e^{i\theta'}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{U}.$$
   (a) Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{U}, \otimes)$ est un groupe.
   (b) Soit
$$\begin{array}{cccc} \phi & : & (\mathbb{C}^*, \,.\,) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{U}, \otimes) \\ & & z & \longmapsto & (|z|, e^{i \arg(z)}). \end{array}$$
   Montrer que ϕ est un isomorphisme de groupes.