	Cycle préparatoire 2ème année	
	Devoir surveillé 1	
	K. Fayad, K. Guezguez, J.-M. Masereel, R. Nuadi	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 18 octobre 2019**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **3**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte six exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé. **La page** 3 **est à rendre.**

◇◇◇

Exercice 1. [3 points]

1. En interprétant P par « je pars », Q par « tu restes » et R par « il n'y a personne », traduire les formules logiques suivantes en langage naturel (= en français) :

$$(P \wedge (\text{non} Q)) \Rightarrow R; \qquad ((\text{non} P) \vee Q) \Rightarrow \text{non} R.$$

2. Les deux propositions précédentes sont-elles équivalentes ? Justifier.

Exercice 2. [4 points]

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

Exercice 3. [2 points]
Soit A, B, C des parties d'un ensemble E. Montrer que

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

Exercice 4. [2 points]
On considére les deux propositions suivantes :

$$(\mathcal{P}_1) : \forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, (y^2 > x).$$

$$(\mathcal{P}_2) : \exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \exists z \in \mathbf{R}, x = y + z^2.$$

1. Exprimer à l'aide de quantificateurs la négation des propositions $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
2. Les assertions $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Exercice 5. [4.5 points]
On définit dans $\mathbf{Z}$ la relation $\prec$ en posant, pour tout couple $(x;y)\in\mathbf{Z}^2$:

$$x \prec y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{N},\, y = kx.$$

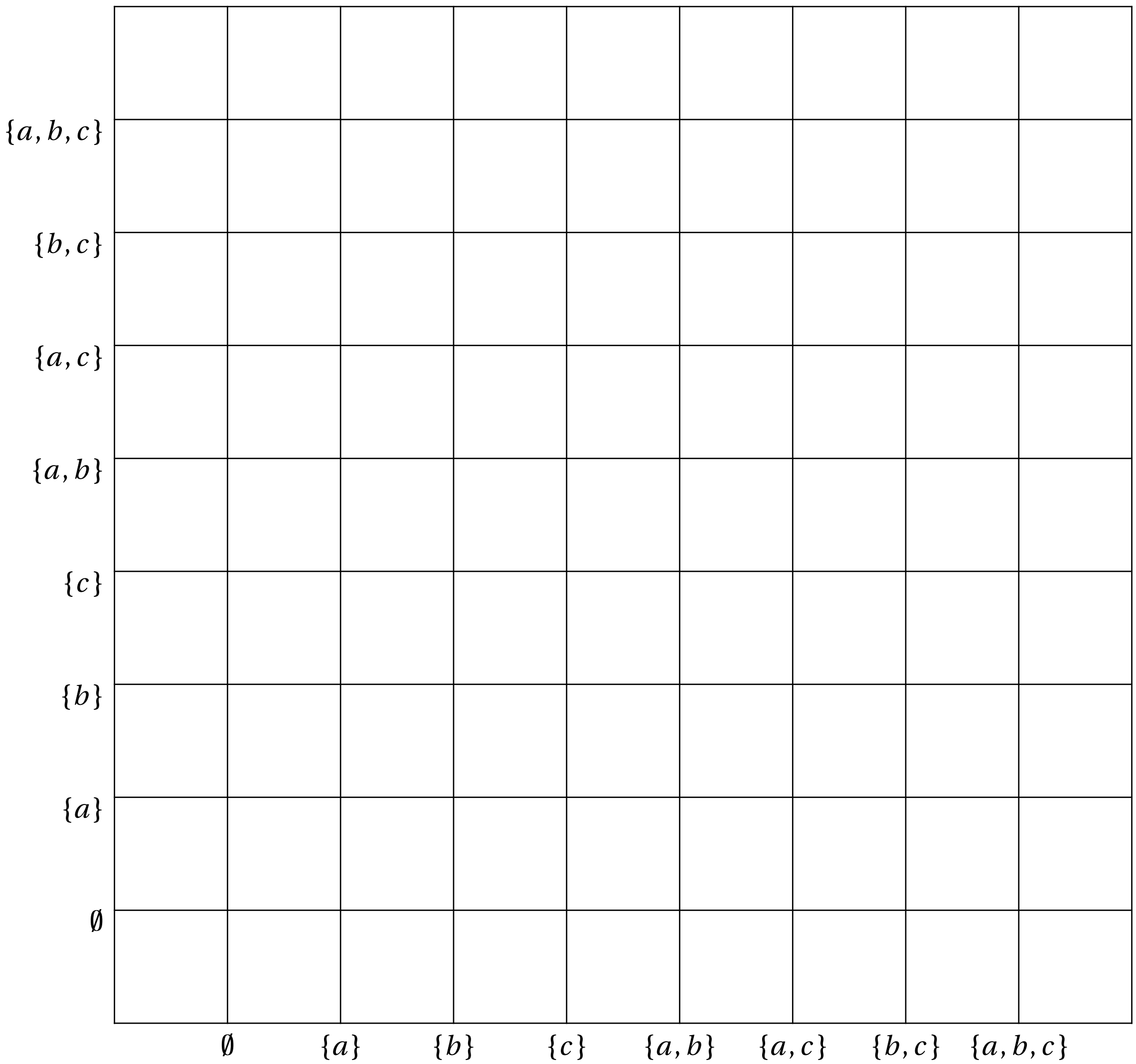
1. Montrer que la relation $\prec$ est une relation d'ordre dans $\mathbf{Z}$.

   On considére dans la suite que $\mathbf{Z}$ est ordonné par la relation $\prec$.
2. Cette relation d'ordre est-elle totale ? Justifier.
3. Dans l'ensemble $(\mathbf{Z}, \prec)$, on considére $A = \{2, 3, 6\}$.
   (a) Si possible, donner un majorant et un minorant de A. Justifier.
   (b) Si possible, donner le plus petit élément et le plus grand élément de A. Justifier.

Exercice 6. [9 points]
Soir E un ensemble et A une partie de E. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X\cup A = Y\cup A$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On pose dans cette question $E = \{a;b;c\}$ et $A = \{a;b\}$.
   (a) Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?
   (b) Pour chaque X et Y deux parties de E, si $X\mathcal{R}Y$, placer sur le repère (voir la page 3) le point de coordonnées (X, Y).
   (c) Comment lire sur le graphe que la relation $\mathcal{R}$ est symétrique, réflexive ?
   (d) Pour toute partie B de E déterminer $Cl(B)$, la classe d'équivalence de B pour la relation $\mathcal{R}$.
   (e) Donner une partition de E à l'aide des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.


{a, b, c}
{b, c}
{a, c}
{a, b}
{c}
{b}
{a}
∅
∅
{a}
{b}
{c}
{a, b}
{a, c}
{b, c}
{a, b, c}