Séries_ DS1_ Corrigé. (18/10/2019)

Exercice 1. (5 points)

1) Pour $n \geq 1$, Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)$

$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2)$$

2

$$= 2\sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k)$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln(n+1) - \ln 2 - \ln(n+1) - \ln(n+2)$$

$$= \ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln 2$$

ainsi la série converge et sa somme vaut $\ln 2$.

2) a) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0$

1 donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4} < 1$

1 donc $\sum u_n$ converge (cle d'Alembert)

c) $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2} = v_n$

1 $n^{3/2} v_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow v_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\Rightarrow \sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

Exercice 2. (4 points)

$\sum_{n\geq 1} u_n$ série à termes positifs et $\alpha > 0$.

1) a) $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq \frac{1}{2} = \varepsilon$

(1) ainsi $u_n \leq 1$ à partir d'un certain rang n_0.

b) $\forall\, n \geq n_0$, comme $u_n \leq 1$, alors $u_n^\alpha \leq u_n$ (car $\alpha \geq 1$)

comme $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum u_n^\alpha$ converge

(1) (théorème de majoration - séries à termes positifs).

2) Premier cas : divergence grossière $(u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0)$

(1) dans ce cas, $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ et $\sum_n u_n^\alpha$ diverge grossièrement.

Deuxième cas : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'après 1) a), $\exists\, n_0$ t.q $\forall\, n \geq n_0,\ u_n \leq 1$

ainsi $\forall\, n \geq n_0$, $u_n \leq u_n^\alpha$ car $u_n \leq 1$ et $\alpha \leq 1$

(1) or $\sum u_n$ diverge donc $\sum_n u_n^\alpha$ diverge.

(théorème de minoration - séries à termes positifs).

Exercice 3. (5 points)

1) $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1}$

$= n\left(1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - n\left(1+\frac{b}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

(2) $= n\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}\right) - \frac{1}{8}\frac{a^2}{n^2} - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{8}\frac{b^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

$= n\left[\frac{a-b}{2n} + \frac{4-a^2+b^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{a-b}{2} + \frac{4-a^2+b^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

2) On suppose que $a-b \neq 2$.

D'après 1), $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a-b}{2}$ $(\neq 1)$

1 si $a-b<2$, alors $\sum u_n$ converge.
si $a-b>2$, alors $\sum u_n$ diverge (Règle de Cauchy).

3) On suppose que $a-b=2$, ainsi $\sqrt[n]{u_n} = 1 + \frac{2-a-b}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

a) $\ln(nu_n) = \ln n + \ln u_n$

$= \ln n + n\ln(\sqrt[n]{u_n})$

1 $= \ln n + n\ln\left(1+\frac{2-a-b}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$= \ln n + 2-a-b+o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

b) Comme $\ln(nu_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

alors $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (par continuité de $x\mapsto e^x$).

1 ainsi $\frac{1}{n} = o(u_n)$ et $\sum u_n$ diverge

Exercice 4. (8 points)

$f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ $(\forall n\geq 1)$

1) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in[k,k+1]$, $\frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{k}$.

En intégrant sur $[k,k+1]$: $\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}\leq\frac{1}{k}$

En sommant pour $k=1,\dots,n$

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

ainsi $S_{n+1}-1 \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n$. $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

4

De façon équivalente :

1 $$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq \int_1^{n} f(x)\,dx + 1 \qquad \forall n \geqslant 2.$$

(et ça reste vrai si $n=1$)

2) D'après 1) : $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

ainsi $$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Comme $$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et $1 + \frac{1}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ainsi $\frac{S_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (Gendarmes)

1 d'où $S_n \underset{n}{\sim} \ln n$.

0,5 Donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge

3) $a_n = S_n - \ln(n)$ $\qquad b_n = S_n - \ln(n+1)$

Mq. $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes :

Soit $g(x) = x - \ln(x+1)$ définie sur $]-1, +\infty[$

g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ $\quad \forall x > -1$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ainsi $g(x) \geqslant 0 \quad \forall x > -1$.

$$a_{n+1} - a_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

0,75 $$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -x + \ln(1+x) \quad \text{où } x = \frac{-1}{n+1}$$

$$= -g(x) \leq 0$$

ainsi $(a_n)_n$ est décroissante.

$$b_{n+1} - b_n = S_{n+1} - \ln(n+2) - S_n + \ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

0,75

$$= x - \ln(1+x) \quad \text{où } x = \frac{1}{n+1}$$

$$= g(x) \geqslant 0$$

ainsi $(b_n)_n$ est croissante.

0,5 De plus, $a_n - b_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Soit γ leur limite commune.

1 b) $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - \ln(n))$ ainsi $S_n - \ln(n) = \gamma + o(1)$

d'où $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$

4) $u_n = \dfrac{1}{n(2n+1)}$.

0,5 a) $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ alors $\sum\limits_n u_n$ converge.

0,5 b) $F(X) = \dfrac{1}{X(2X+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{2}{2X+1}$ $\to$ on peut remplacer $\dfrac{1}{2n+1}$ par $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n(2n+1)}$

c) $$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1} + 1$$

1

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)} + 1$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)} + 1$$

ainsi $$S_{2N+1} = S_N - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)} + 1$$

d'où $$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(2n+1)} = 2S_N - 2S_{2N+1} + 2$$

$$= 2\ln N + 2\gamma - 2\ln(2N+1) - 2\gamma + 2 + o(1)$$

$$= 2 - 2\ln\left(\frac{2N+1}{N}\right) + o(1)$$

$$= 2 - 2\ln\left(2+\frac{1}{N}\right) + o(1)$$

d) En faisant $N \to +\infty$,

0,5 $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)} = 2 - 2\ln 2$$