EISTI	**Cycle préparatoire 2ème année**	
	Devoir surveillé 1	
	Abdessalam El Janati, Karam Fayad, Khaoula Guezguez	
	Matière : **Séries**	*Date* : **Vendredi 12 octobre 2018**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1. (4 points)
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels positifs. Répondre par VRAI ou FAUX **en justifiant**.

1. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
2. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers 0.
3. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ diverge.
4. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

Exercice 2. (5 points)
Étudier la nature des séries numériques de terme général :

1. $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 1.$
2. $v_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}, \quad n \geq 0.$
3. $w_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!} 3^n, \quad n \geq 0.$

Exercice 3. (3 points)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{n+1}{3^n}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. On note S sa somme.
2. Calculer S.
   Indication : On pourra trouver un réel α tel que : $\frac{1}{3}S = S - \alpha$.

Exercice 4. (8 points)
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation :

$$\forall\ n \geq 0,\quad u_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}\,u_n.$$

1. Le but de cette question est d'étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

   Pour $n > 0$, on pose
   $$v_n = \ln(n^2 u_n) \quad \text{et} \quad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

   (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de w_n et en déduire la nature de la série $\sum_{n>0} w_n$.

   (b) Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n>0}$? Justifier.

   (c) En déduire qu'il existe un réel $L > 0$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer) tel que
   $$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{L}{n^2}$$
   et conclure.

2. Le but de cette question est de calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

   (a) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n\,u_n$.

   (b) Pour $n \geq 0$, on pose
   $$z_n = (n+1)u_{n+1} - n\,u_n.$$
   Calculer $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} z_n$.

   (c) En utilisant la question précédente et la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en fonction de u_0.