	Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ année
	Devoir surveillé 4
	Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel

Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 22 février 2019**
Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
	Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (4.5 points)
On considère l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ muni de la loi $\star$ qui est la multiplication modulo 7. Autrement dit, pour $(a,b) \in E^2$, $a \star b$ est le reste de la division euclidienne de ab par 7.

1. Écrire la table de multiplication de $(E,\star)$, c.-à-d., reproduire et remplir le tableau suivant à l'aide de la loi $a \star b$:

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Montrer que $(E,\star)$ est un groupe abélien en précisant l'élément neutre et l'inverse de chaque élément. *On admettera l'associativité.*
3. Parmi les sous-ensembles suivants de E, lesquels sont des sous-groupes de $(E,\star)$? Justifier.
   (a) $F = \{1,2,4\}$
   (b) $G = \{1,3,5\}$
   (c) $H = \{1,2,4,6\}$

Exercice 2. (3 points)
On considère l'ensemble

$$A = \left\{a + ib\sqrt{5},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \text{ et } (a,b) \neq (0,0)\right\}.$$

Montrer que A, muni de la multiplication des complexes, est un groupe.

Exercice 3. (9.5 points)
Le but de cet exercice est d'étudier l'ensemble des entiers d'Eisenstein noté $\mathbb{Z}[j]$ et défini par

$$\mathbb{Z}[j] = \{a + bj,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que $j^2 \in \mathbb{Z}[j]$.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}[j], +, \times)$, où $+$ et $\times$ sont respectivement l'addition et la multiplication des complexes, est un anneau commutatif.
3. Le but de cette question est de déterminer l'ensemble $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[j])$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[j]$.
   On considère l'application
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[j] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a + bj & \longmapsto & a^2 - ab + b^2 \end{array}$$
   (a) Montrer que $\forall\ z \in \mathbb{Z}[j]$, $f(z) = z\overline{z}$.
   (b) En déduire que $f(\mathbb{Z}[j]) \subset \mathbb{N}$ et que $\forall\ (z, z') \in \mathbb{Z}[j]^2$, $f(zz') = f(z)f(z')$.
   (c) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$. Montrer l'équivalence : $z \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[j]) \iff f(z) = 1$.
   (d) Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Justifier l'équivalence : $f(a + bj) = 1 \iff (2a - b)^2 + 3b^2 = 4$.
   (e) En déduire l'ensemble des six éléments de $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[j])$.
4. L'ensemble $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[j])$, muni de la multpilication des complexes, est-il un groupe ? Justifier.

Exercice 4. (5 points)
On considère les deux applications f et g suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre.
2. On définit sur $\mathbb{N}$ la loi de composition interne $*$ par
   $$\forall\ (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \ m * n = f(g(m) + g(n)).$$
   Montrer que $(\mathbb{N}, *)$ est un groupe abélien en précisant son élément neutre et l'inverse de tout élément.
   On déterminera l'expression de l'inverse d'un entier $n \in \mathbb{N}$ pour la loi $*$ sans utiliser les lettres f et g.