Correction du DS1 - Octobre 2018

Exercice 1.

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
   La proposition est fausse.
   Un contre exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$, on a la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0 mais la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge : il s'agit de la série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$.
2. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ diverge. La proposition est fausse.
   Un contre exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n}$, on a la série de terme général u_n diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$), mais la série de terme général u_n^2 converge (la série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.
3. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend pas vers 0. La proposition est fausse.
   Un contre exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$, on a la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0 et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemmann avec $\alpha = 1 \leq 1$).
4. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge. La proposition est vraie. Preuve :
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, car la série de terme général u_n converge, donc $u_n^2 \underset{+\infty}{=} o(u_n)$.
   On peut déduire qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbf{N}$, que $0 \leq u_n^2 \leq u_n$.
   La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, donc d'après le théorème de majoration (appliqué aux séries à termes positifs) la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.

Exercice 2.

1. Le terme génaral de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge vers $1 \neq 0$, donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs positives. On applique la règle de Cauchy, on a

$$
\begin{aligned}
(v_n)^{\frac{1}{n}} &= \left(\frac{2n+5-4}{2n+5}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{-4}{2n+5}\right)^n \\
&= e^{n\ln(1-\frac{4}{2n+5})}
\end{aligned}
$$

   On a $n\ln(1-\frac{4}{2n+5}) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{4}{2n+5}$, par suite $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{4}{2n+5}) = -2$, d'ou $\lim_{n\to+\infty} (v_n)^{\frac{1}{n}} = e^{-2} < 1$.
   Ce qui implique la convergence de la série de terme général v_n.

3. Pour tout entier naturel n, le terme $w_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}.3^n$ est postif. On applique la règle de d'Alembert :

$$\begin{aligned}
\frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{((n+1)!)^3}{(n!)^3}\frac{(3n)!}{(3(n+1))!}\frac{3^{n+1}}{3^n} \\
&= 3.\frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(3n+2)(3n+1)}
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{9} < 1$, d'après la règle de D'Alembert la série de terme général w_n converge.

Exercice 3

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs positives. On applique la règle de $n^\alpha u_n$ pour montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2(n+1)e^{-nln(3)} = 0$ (croissance comparée).

   On a prouvé l'existence d'un $\alpha = 2 > 1$ telle que $n^2 u_n$ tend vers 0, d'ou la convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

2. On note S la valeur de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}S &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= S - u_0 - \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= S - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

   On a alors $(1-\frac{1}{3})S = \frac{3}{2}$ par suite $S = \frac{9}{4}$.

Exercice 4.

1. 1.
   (a) Le développement limité à l'ordre 2 de w_n est

$$\begin{aligned} w_n &= ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{n+1}{n+3}\right) \\ &= 2\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln\left(n(1+\frac{1}{n})\right) - \ln\left(n(1+\frac{3}{n})\right) \\ &= 3\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln\left(n(1+\frac{1}{n})\right) - \ln(1+\frac{3}{n}) \\ &= 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) - \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{2}\frac{9}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) \\ &= \frac{3}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

   On déduit alors l'équivalence $w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$. D'après le critère de Riemann la série $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$), donc la série $\sum_{n\geq1}\frac{3}{n^2}$ converge, de plus $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont à valeurs positives, en appliquant le théorème des équivalences, la série $\sum_{n\geq0} w_n$ converge.

   (b) On a la série $\sum_{n\geq0} w_n = \sum_{n\geq0}(v_{n+1} - v_n)$ est une série téléscopique convergente (d'après la première question), la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est donc convergente. Soit ℓ sa limite.

   (c) En tulisant la relation $v_n = ln(n^2u_n)$, on déduit que $u_n = \frac{e^{v_n}}{n^2}$. la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}*}$ converge vers ℓ, donc la suite $(e^{v_n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $L = e^\ell$. D'ou l'équivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{L}{n^2}$.

2. (a) A l'aide de l'équivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{L}{n^2}$, on a $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{L}{n} = 0$.

   (b) Soit $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = \sum_{n=0}^{N}(n+1)u_{n+1} - nu_n = (N+1)u_{N+1}$ (car il s'agit d'une série téléscopique).

   D'après la question précédente $\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} z_n = \lim_{n\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} nu_n = 0$.

   (c) On note S la valeur de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On commence par montrer que $z_n = -2u_{n+1} + u_n$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} z_n &= (n+1)u_{n+1} - nu_n \\ &= (n+1)u_{n+1} - (n+1)u_n + u_n \\ &= (n+1)(1 - \frac{n+3}{n+1})u_{n+1} + u_n \\ &= (n+1)\frac{-2}{n+1}u_{n+1} + u_n \\ &= -2u_{n+1} + u_n \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= -2\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \\ &= -2(S - u_0) + S \\ &= u_0 - S \end{aligned}$$

On déduit alors que $S = u_0$.