karam.fayad@eisti.eu

Corrigé DS1 Algèbre (12/10/2018)

Exercice 1 .

1. Soit les propositions :
   A : l'étudiant reçoit une bourse, B : l'étudiant est bon, C : l'étudiant est pauvre.
   L'énoncé exprime l'équivalence : $A \Leftrightarrow B \wedge C$. On a ainsi : $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B \wedge C} \Leftrightarrow \overline{B} \vee \overline{C}$.
   Les étudiants qui ne reçoivent pas de bourse sont donc les étudiants qui ne sont pas bons ou qui ne sont pas pauvres.
2. Soit les propositions :
   A : ils parlent B : ils savent.
   Les deux affirmations de l'énoncé expriment respectivement les implications $A \Rightarrow \overline{B}$ et $B \Rightarrow \overline{A}$. Ces deux implications sont équivalentes, car elles sont contraposées l'une de l'autre. Les deux affirmations de l'énoncé veulent donc dire la même chose.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas convergente si :
$$\forall\ L \in \mathbb{R},\ \exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ n_0 \in \mathbb{N},\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \text{ et } |u_n - L| \geq \varepsilon).$$
4. Cet ensemble contient deux éléments (qui sont $\{a, \{\triangleright, \circ\}, \alpha\}$ et $\star$).

Exercice 2 .

1. (a) Construisons une table de vérité :

P	Q	$P \oplus Q$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$(P \vee Q) \wedge (\overline{P \wedge Q})$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F

   On a bien : $(P \oplus Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\overline{P \wedge Q})$.

   (b) On a :
$$\begin{aligned} P \oplus Q &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\overline{P \wedge Q}) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q}) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(P \wedge \overline{P})}_{\text{Faux}} \vee (P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{P}) \vee \underbrace{(Q \wedge \overline{Q})}_{\text{Faux}} \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{P}) \end{aligned}$$

2. (a) - $P \oplus P \Leftrightarrow (P \vee P) \wedge (\overline{P \wedge P}) \Leftrightarrow P \wedge \overline{P} \Leftrightarrow$ Faux
   - $P \oplus \text{Faux} \Leftrightarrow (P \vee \text{Faux}) \wedge (\overline{P \wedge \text{Faux}}) \Leftrightarrow P \wedge \text{Vrai} \Leftrightarrow P$
   - $P \oplus \text{Vrai} \Leftrightarrow (P \vee \text{Vrai}) \wedge (\overline{P \wedge \text{Vrai}}) \Leftrightarrow \text{Vrai} \wedge \overline{P} \Leftrightarrow \overline{P}$
   - D'après la table de vérité ci-dessus, on remarque que $(P \oplus Q) \oplus Q \Leftrightarrow P$.

   (b) Remarquons d'abord que $\overline{P \oplus Q} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{Q} \vee P) \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q)$.
$$\begin{aligned} (P \oplus Q) \oplus R &\Leftrightarrow ((P \oplus Q) \wedge \overline{R}) \vee (\overline{P \oplus Q} \wedge R) \\ &\Leftrightarrow \big(((P \wedge \overline{Q}) \vee (Q \wedge \overline{P})) \wedge \overline{R}\big) \vee \big(((\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q)) \wedge R\big) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q} \wedge \overline{R}) \vee (Q \wedge \overline{P} \wedge \overline{R}) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \end{aligned}$$

   Dans la proposition précédente, on remarque que si on remplace P par Q, Q par R et R par P, on obtient une proposition équivalente.
   Ainsi $(P \oplus Q) \oplus R \Leftrightarrow (Q \oplus R) \oplus P$. Or, par commutativité (évidente) du $\oplus$, $(Q \oplus R) \oplus P \Leftrightarrow P \oplus (Q \oplus R)$.
   Conclusion : $(P \oplus Q) \oplus R \Leftrightarrow P \oplus (Q \oplus R)$.

3. À l'aide d'une table de vérité, on remarque que $(P \oplus Q) \oplus (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$.
   Deuxième méthode :

$$(P \oplus Q) \oplus (P \wedge Q) \Leftrightarrow ((P \oplus Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (\overline{(P \oplus Q) \wedge (P \wedge Q)})$$

   Or

$$\begin{aligned}
(P \oplus Q) \vee (P \wedge Q) &\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\overline{P \wedge Q})) \vee (P \wedge Q) \\
&\Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge ((\overline{P \wedge Q}) \vee (P \wedge Q)) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \text{Vrai} \\
&\Leftrightarrow P \vee Q
\end{aligned}$$

   et

$$\overline{(P \oplus Q) \wedge (P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P \vee Q}) \vee \underbrace{(P \wedge Q) \vee (\overline{P \wedge Q})}_{\text{Vrai}} \Leftrightarrow \text{Vrai}$$

   Conclusion : $(P \oplus Q) \oplus (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$.

Exercice 3 .
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la propriété : $u_n = (-2)^n + 3^n$.
On va procéder par récurrence double.

Initialisation : Montrons que P_0 et P_1 sont vraies :
On a bien : $(-2)^0 + 3^0 = 2 = u_0$ et $(-2)^1 + 3^1 = 1 = u_1$.
Attention : On ne commence pas par écrire $u_0 = (-2)^0 + 3^0$, car c'est ce qu'on doit montrer !

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n et P_{n+1} dont vraies et montrons que P_{n+2} est vraie.
En effet,

$$\begin{array}{lll}
u_{n+2} & = u_{n+1} + 6u_n & \text{d'après l'énoncé} \\
& = (-2)^{n+1} + 3^{n+1} + 6((-2)^n + 3^n) & \text{par hypothèse de récurrence} \\
& = (-2)^n(-2+6) + 3^n(3+6) & \\
& = (-2)^n \times 4 + 3^n \times 9 & \\
& = (-2)^{n+2} + 3^{n+2} &
\end{array}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, on a $u_n = (-2)^n + 3^n$.

Exercice 4 .

1. Montrons que
$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}.$$

   $\Rightarrow$)
   Supposons que $A \cap B = A \cap C$, et montrons (par double inclusion) que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
   Soit $a \in A \cap \overline{B}$, alors $a \in A$ et $a \notin B$.
   Montrons que $a \in A \cap \overline{C}$. Par l'absurde, si $a \in C$, alors $a \in A \cap C = A \cap B$, alors $a \in B$. Contradiction.
   Donc $a \notin C$, d'où $a \in A \cap \overline{C}$.
   Conclusion : $A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}$.
   L'autre inclusion se montre de la même façon, en échangeant les rôles de B et C.

   $\Leftarrow$)
   On utilise le résultat de la première implication, en remplaçant B par $\overline{B}$ et C par $\overline{C}$. Autrement dit : si $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ alors d'après la première implication $A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}}$, d'où $A \cap B = A \cap C$.

   Deuxième méthode :
   $\Rightarrow$)

Supposons que $A \cap B = A \cap C$, alors $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \setminus (A \cap C) = A \setminus C$
Idem pour la deuxième implication en remplaçant B par $\overline{B}$ et C par $\overline{C}$.

2. $\Rightarrow$)
   Supposons que $A \subset B$ et montrons que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
   Soit $X \in \mathcal{P}(A)$, alors $X \subset A$, or $A \subset B$, alors $X \subset B$, d'où $X \in \mathcal{P}(B)$.

   $\Leftarrow$)
   Supposons que $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ et montrons que $A \subset B$.
   Soit $x \in A$, alors $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$, or $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, d'où $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$, ainsi $x \in B$.
   Deuxième méthode : On a $A \in \mathcal{P}(A)$ or $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, ainsi $A \in \mathcal{P}(B)$, d'où $A \subset B$.

3. Pour tout couple $(x, y) \in E \times E$:

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } y \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } y \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \text{ ou } (x, y) \in B \times C \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}$$

   Conclusion : $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.