Devoir Dérivabilité

Exercice 1

On appelle *arcsin*, *arccos*, *arctan* les fonctions réciproques des fonctions *sin*, *cos*, *tan*. Déterminer les ensembles de départ et d'arrivée pour pourvoir définir ces fonctions réciproques et en tout réel pour lesquelles ces fonctions sont dérivables, exprimer la dérivée de la fonction réciproque sous une forme qui n'utilise pas sin ou cos.

Indication : on obtiendra $arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Solution

1. Fonction sin :

   Tout d'abord, la fonction sin prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, et ses images se situent dans l'intervalle $J = [-1; 1]$.

   On restreint la fonction sin à l'ensemble de définition $I = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et l'ensemble d'arrivée $J = [-1; 1]$.

   La fonction sin est dérivable de dérivée cos. Donc la dérivée est strictement positive sur I (sauf en deux réels) donc la fonction est strictement croissante. Comme elle est continue, elle est bijective de I sur J.

   d'où $f : \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \\ x \to \sin x \end{cases}$

   On a donc

   $f^{-1} : \begin{cases} [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x \to \arcsin x \end{cases}$

   Cherchons à présent une écriture de la dérivée de arcsin :

   On utilise la leçon et on obtient

   $(\arcsin x)\prime = \dfrac{1}{\cos x(\arcsin x)}$

   On utilise la formule trigonométrique :$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

   $\Longrightarrow \cos x^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x)$ et $\sqrt{\cos x^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - \sin(\arcsin x)^2}$

   $\Longrightarrow \cos x(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

   d'où en revenant à l'expression : $(\arcsin x)\prime = \dfrac{1}{\cos x(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

2. Fonction cos :

   Tout d'abord, la fonction cos prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, et ses images se situent dans l'intervalle $J = [-1; 1]$.

   On restreint la fonction sin à l'ensemble de définition $I = [0; \pi]$ et l'ensemble d'arrivée $J = [-1; 1]$.

   La fonction cos est dérivable de dérivée $-\sin$. Donc la dérivée est strictement négative sur I (sauf en deux réels) donc la fonction est strictement croissante. Comme elle est continue, elle est bijective de I sur J.

   d'où $f : \begin{cases} [0, \pi] \to [-1, 1] \\ x \to \cos x \end{cases}$

   On a donc

   $f^{-1} : \begin{cases} [-1, 1] \to [0, \pi] \\ x \to \arccos x \end{cases}$

   Cherchons à présent une écriture de la dérivée de arccos :

On utilise la leçon et on obtient
$(\arccos x)\prime = \dfrac{1}{\sin x(\arccos x)}$
On utilise la formule trigonométrique :$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\Longrightarrow \sin x^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x)$ et $\sqrt{\sin x^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - \cos(\arccos x)^2}$
$\Longrightarrow \sin x(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$
d'où en revenant à l'expression : $(\arccos x)\prime = \dfrac{1}{-\sin x(\arccos x)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Etude de la fonction tan
Tout d'abord rappelons que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
donc le domaine de définition de tan est $\mathbb{R}\backslash\{x/\cos x \neq 0\}$
$\cos x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + [2k\pi],\ avec\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + [2k\pi],\ avec\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
donc la fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + [k\pi]\ avec\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
On pose $f\ :\ \begin{cases} I =]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \\ x \to \tan x \end{cases},$
Cette fonction est dérivable sur I de dérivée : $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$ donc elle est strictement croissante sur I.
De plus $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ (car quotient de sin et cos
Comme f est continue sur I, elle réalise une bijection de I sur $f(I)$
On peut donc définir :arctan : $\begin{cases} \mathbb{R} \to]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}] \\ x \to \arctan x \end{cases}$
On peut utiliser la propriété du cours ou bien utiliser l'expression : $x = \tan(\arctan(x))$
$x\prime = (\tan\arctan x)\prime \Longrightarrow 1 = (\arctan)\prime\left(1 + \tan^2\arctan x\right)$
$\Longrightarrow 1 = (\arctan)\prime\left(1 + x^2\right)$
$\Longrightarrow (\arctan x)\prime = \dfrac{1}{1+x^2}$

Exercice 2
On définit deux fonctions sh et ch de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. Démontrer que ch est paire et sh est impaire.
2. Déterminer les dérivées de ch et sh et les exprimer en fonction de ch et sh.
3. Démontrer que $ch^2x - sh^2x = 1$
4. (a) Démontrer que ch permet de définir une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un ensemble E que l'on déterminera.
   (b) On appelle $argch$ la fonction réciproque de ch définie de E dans $\mathbb{R}^+$. Etudier la dérivabilité de $arcsh$ sur E. Et exprimer $argch'(x)$ en fonction de x (sans utiliser sh ou ch).
   (c) Soit $g : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. En utilisant la dérivation, montrer que $g = argcosh$.
5. (a) Démontrer que sh permet de définir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) On appelle $argsh$ la fonction réciproque de sh définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$. Etudier la dérivabilité de $arcsh$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Soit $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. En utilisant la dérivation, montrer que $f = argsh$.

6. On appelle th la fonction $th = \dfrac{sh}{ch}$. Etudier la fonction th, déterminer sa dérivée et son sens de variation.
7. (a) Démontrer que th permet de définir une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un ensemble F que l'on déterminera.
   (b) On appelle $argth$ la fonction réciproque de th définie de F dans $\mathbb{R}^+$. Etudier la dérivabilité de $argth$ sur F. Et exprimer $argth'(x)$ en fonction de x (sans utiliser sh ou ch ou th).
   (c) Soit $h : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. En utilisant la dérivation, montrer que $h = argth(x)$.

Solution

---

1. La fonction ch est-elle paire ?
   $\forall x \in \mathbb{R}, ch(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2} = ch(x)$,donc la fonction ch est paire.
   $\forall x \in \mathbb{R}, sh(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -sh(x)$,donc la fonction sh est paire.
2. Dérivée de $ch(x)$:$ch\prime(x) = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\prime = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = sh(x)$

   Dérivée de sh(x) :$sh\prime(x) = \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\prime = \dfrac{e^x-e^{-x}(-1)}{2} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = ch(x)$
3. On écrit :
   $ch^2x - sh^2x = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{(e^x+e^{-x})^2}{4} - \dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{4}$
   $= \dfrac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x})}{4}$
   $= \dfrac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x})}{4} = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{4}$
   $= \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}$
   $= \dfrac{4}{4} = 1$
   Donc $ch^2\ x - sh^2\ x = 1$.
4. (a) Soit $ch : x \to \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

   ch est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $ch'(x) = sh(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

   Donc ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, comme $ch(0) = \dfrac{e^0+e^0}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$ on peut appliquer le théorème de la bijection à cette fonction continue et ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1;+\infty[$

   (b) On observe que sh ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$ donc $argch$ est dérivable sur $[1;+\infty[$, de dérivée :
   $arccosh'(x) = \dfrac{1}{sharccosh(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{sh^2arccosh(x)-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

   (c) On a
   $g\prime(x) = \dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$
   $= \dfrac{2\sqrt{x^2-1}+2x}{2\sqrt{x^2-1}}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{2\sqrt{x^2-1}}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
   On observe que $g'(x) = arcosh'(x)$ or $g(1) = 0$ et $argcosh(1) = 0$ donc $g = arcosh$

On peut aussi remarquer que $cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

On résout $x = \cosh z \Leftrightarrow 2x = y + \dfrac{1}{y}$ et $y = e^z \Leftrightarrow y^2 - 2xy + 1 = 0$ et $y = e^z$

$\Delta' = x^2 - 1$ et $y_1 = x + \sqrt{x^2-1}$ et $y_2 = x - \sqrt{x^2-1}$

Donc $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ ou $z = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

Or $x - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ et pour $x \geqslant 1,\ x + \sqrt{x^2-1} \geqslant 1$ donc $x - \sqrt{x^2-1} < 1$

donc la $arccoshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

5. (a) Soit $sh : x \to \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

   sh est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $sh'(x) = ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2e^x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

   Donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$ on peut appliquer le théorème de la bijection à cette fonction continue et sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

   (b) On observe que ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $argsh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

   $arcsinh'(x) = \dfrac{1}{ch\ arcsh(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{sh^2 arcsh(x) + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

   (c) On a

   $$f\prime(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
   $$= \frac{2\sqrt{x^2+1}+2x}{2\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{2\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

   On observe que $f'(x) = arcsh'(x)$ or $f(0) = 0$ et $sh(0) = 0$ donc $f = arcsh$

   On peut aussi remarquer que $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

   On résout $x = \cosh z \Leftrightarrow 2x = y - \dfrac{1}{y}$ et $y = e^z \Leftrightarrow y^2 - 2xy - 1 = 0$ et $y = e^z$

   $\Delta' = x^2 + 1$ et $y_1 = x + \sqrt{x^2+1}$ et $y_2 = x - \sqrt{x^2+1}$

   Or $\sqrt{x^2+1} > |x|$ donc $x - \sqrt{x^2+1} < 0$

   Donc $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

   donc la $arcshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

6. (a) La fonction th est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.

   on a $th'\ x = \dfrac{ch\ x\ ch\ x - shx\ shx}{ch^2 x} = \dfrac{1}{ch^2 x} > 0$ donc la fonction th est strictement croissante

   $th\ x = \dfrac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ donc

   $\lim\limits_{x\to-\infty} thx = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x} - e^0}{e^{2x} + e^0} = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} thx = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^0 - e^{2x}}{e^0 + e^{2x}} = 1$

   Comme th est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$

   (b) La fonction th étant bijective et de dérivée nulle, $argth'(x) = \dfrac{1}{1 - th^2(arcth(x))} = \dfrac{1}{1-x^2}$

(c) $h(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$

donc $h'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$

On obtient la même dérivée que $argth$ or $h(0) = 0$ et $arcth(0) = 0$ donc $h = arcth(0)$

$h(x) = \frac{1}{x}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$

Remarque : $y = th(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$