Devoir Continuité

Exercice 1

Déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$e^x = mx$$

selon les valeurs du paramètre réel m.

Solution

(rédaction télégraphique)

On définit la fonction h par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = e^x - mx$. h est dérivable et de dérivée $h'(x) = e^x - m$.

Si $m < 0$, la fonction h' ne s'annule pas donc la fonction h est strictement croissante. La limite en $-\infty$ est $-\infty$ et en $+\infty$, $+\infty$ donc elle s'annule en un seul réel.

Si $m > 0$ la fonction h est strictement positive sur $]-\infty; \ln(m)[$ et strictement négative sur $]\ln(m); +\infty[$. Elle admet donc un maximum en $\ln(m)$ qui vaut $h(\ln m) = m - m\ln m = m(1 - \ln m)$. Si $m < e$, la fonction est positive donc $h(x)$ ne s'annule pas. Si $m = e$, la fonction s'annule en un seul point. Si $m > e$, la fonction s'annule en deux points (utiliser le théorème des valeurs intérmédiaires).

Autre solution

Pour $x = 0$, l'équation devient $1 = 0$ donc n'a pas de solution.

Pour $x \neq 0$, on définit $\phi : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$.

$\phi'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = e^x \dfrac{x-1}{x^2}$

Pour $x < 1$, $\phi'(x) > 0$ donc la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1$.

Pour $x > 1$, ϕ est strictement croissante.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \phi(x) = +\infty$

De plus ϕ est continue sur $]-\infty; 0[$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}^-$.

On a $\phi(1) = e$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \phi(x) = +\infty$

Donc ϕ réalise une bijection de $]0; 1]$ dans $[e; +\infty[$ et de $[1; +\infty[$ dans $[e; +\infty[$. Finalement,

- Si $m > e$ ou $0 < m < e$, il y a deux solutions.
- Si $m = e$, il y a une unique solution
- Si $m = 0$ pas de solution.

— Si $m < 0$, une seule solution ¨

Exercice 2

1. Montrer que, si f est strictement croissante, on a l'équivalence :

$$(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 + x - 1$pour $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que f est bijective.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = f^{-1}(x)$.

Solution

1. On a $x \leq f(x) \implies f(x) \leq f(f(x)) \implies f(x) \leq x$. Donc si $x \leq f(x)$ alors $x = f(x)$
   De même $x \geq f(x) \implies f(x) \geq f(f(x)) \implies f(x) \geq x$. Donc si $x \geq f(x)$ alors $x = f(x)$
   Dans tous les cas, si $f((f(x)) = x$ alors $f(x) = x$
   La réciproque est évidente.
2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5x^4 + 1$
   On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$
   Or la fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue. L'image d'un intervalle étant un intervalle, l'image de $]-\infty; +\infty[$ est donc $]-\infty; +\infty[$. Par ailleurs, f étant strictement croissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) On résout $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x$ car f est strictement croissante.
   $\Leftrightarrow x^5 + x - 1 = x$
   $\Leftrightarrow x^5 = 1$

   Dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^5$ étant strictement croissante, 1 admet un unique antécédent : 1 qui est la solution de l'équation.
