9 | Lois de Newton

Exercice 1 – Tir parabolique

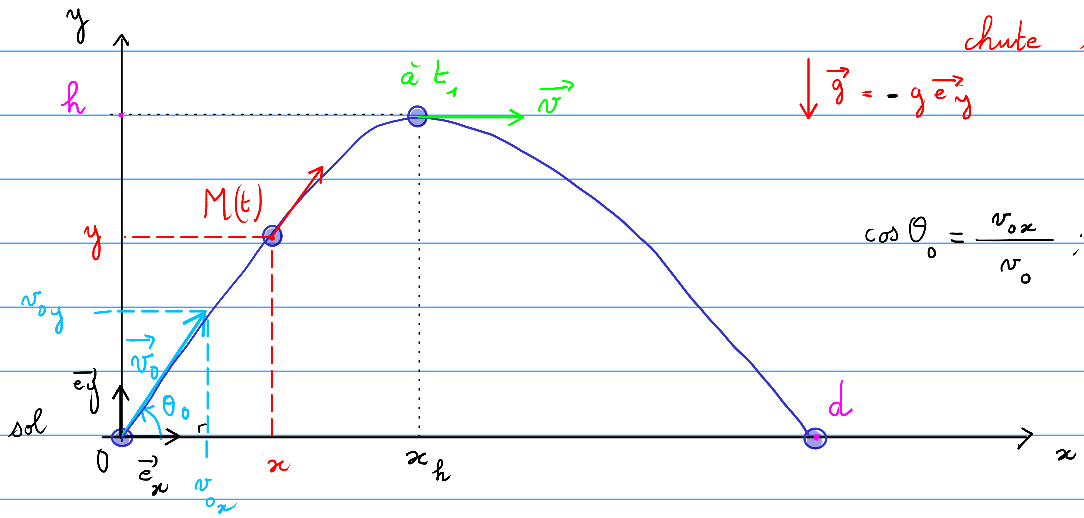
Un projectile est lancé du sol avec une vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle θ_0 avec l'horizontale.

1/ Exprimer la hauteur maximale atteinte par le projectile (en fonction de g, v_0 et θ_0).

2/ À quelle distance d du point de départ atterrit le projectile ?

3/ Montrer qu'il existe un autre angle possible pour atteindre la même distance d. Précisez cet angle.

4/ Pour quelle valeur de l'angle θ_0 la distance d est-elle maximale ?



chute libre (2D)

$\vec{g} = -g\,\vec{e_y}$

$\cos\theta_0 = \dfrac{v_{0x}}{v_0}$; $\sin\theta_0 = \dfrac{v_{0y}}{v_0}$

1/ Hauteur maximale h : $h = y_{max}$

équations horaires : $y(t)$ $x(t)$

trajectoire : $y(x)$

2 Conditions initiales : à $t = 0\,s$,

- $x = y = 0$
- $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0} = v_{0x}\,\vec{e_x} + v_{0y}\,\vec{e_y} = v_0\cos\theta_0\,\vec{e_x} + v_0\sin\theta_0\,\vec{e_y}$

* $\vec{OM}$ position de M : $\vec{OM} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y}$$

2ème loi de Newton : $m\,\vec{a}(M) = \sum_i \vec{F}_{i,ext} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = -g\,\vec{e_y}$

donc

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix} = \vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ 2 équations différentielles du second ordre :

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$$

$\frac{d}{dt}(\dots)$ A, B, C, D constantes

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \ddot{y} = \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_x(t) = A = \overbrace{v_x(t=0)}^{v_0 \cos\theta_0} = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y(t) = -gt + B = -gt + \overbrace{v_y(t=0)}^{v_0 \sin\theta_0} = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_x(t=0)\, t + C = v_x(t=0)\, t + \overbrace{x(t=0)}^{=0} \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y(t=0)\, t + D = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y(t=0)\, t + \underbrace{y(t=0)}_{=0} \end{cases}$$

or $x(t=0) = y(t=0) = 0$ et $v_x(t=0) = v_0 \cos\theta_0$, $v_y(t=0) = v_0 \sin\theta_0$

équations horaires : $\boxed{\begin{array}{ll} x(t) = (v_0 \cos\theta_0)\, t & (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\theta_0)\, t & (2) \end{array}}$

trajectoire $y(x)$: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta_0}$ dans (2) $\longrightarrow$ $\boxed{y(x) = \dfrac{-g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2 + \tan(\theta_0)\, x}$

A la hauteur maximale $y_{max} = h$, la vitesse n'a plus de composante verticale à l'instant t_1 : $v_y(t_1) = 0$ soit :

$$v_y(t_1) = -g t_1 + v_0 \sin\theta_0 = 0 \longrightarrow \boxed{t_1 = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}} \text{ dans (2)}$$

$$h = y(t_1) = -\frac{1}{2} g t_1^2 + v_0 \sin\theta_0\, t_1 = -\frac{1}{2} \cancel{g} \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g^{\cancel{2}}} + \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{g}$$

donc $(LT^{-1})^2$ $[\,] = 1$

$$\boxed{h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}}$$

LT^{-2}

- $v_0 \nearrow$ $h \nearrow$ ok
- $\theta_0 \nearrow$ $h \nearrow$ ok

2/ À quelle distance d du point de départ atterrit le projectile ?

à t_2, $y(t_2) = 0$ et $x(t_2) = d$: portée

$$\hookrightarrow y(t_2) = 0 = -\frac{1}{2} g t_2^2 + (v_0 \sin\theta_0)\, t = t_2 \underbrace{\left[-\frac{1}{2} g t_2 + v_0 \sin\theta_0\right]}_{=0}$$

2 solutions : $t_2 = 0$ (condition initiale)

$$-\frac{1}{2} g t_2 + v_0 \sin\theta_0 = 0 \longrightarrow \boxed{t_2 = \frac{2 v_0 \sin\theta_0}{g}} = 2 t_1$$

$L^2 T^{-2}$

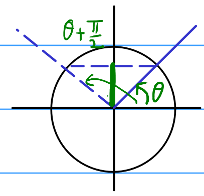
$$\text{donc} \quad d = x(t_2) = (v_0 \cos\theta_0)\, t_2 = \frac{2 v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

$L\,T^{-2}$

3/ Montrer qu'il existe un autre angle possible pour atteindre la même distance d. Précisez cet angle.

$$d = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0) \longleftrightarrow \sin(2\theta_0) = \frac{d\,g}{v_0^2}$$

$$\text{ou} \quad \sin\left(2\theta_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{d\,g}{v_0^2}$$



$\sin(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{donc} \quad \theta_0 = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{d\,g}{v_0^2}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\theta_0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{d\,g}{v_0^2}\right)$$

4/ Pour quelle valeur de l'angle θ_0 la distance d est-elle maximale ?

$d = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0)$ maximale lorsque $\sin(2\theta_0) = 1$ soit $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

donc la distance d est maximale lorsque l'angle θ_0 vaut $\frac{\pi}{4}$ (ou 45°)

<u>remarque</u> : * autre calcul pour la hauteur maximale : y maximale soit

$$\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{d}{dx}\left(-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2 + \tan(\theta_0)\, x\right) = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta_0} x + \tan\theta_0$$

$$x_h = \frac{v_0^2}{g} \tan\theta_0 \cos^2\theta_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0$$

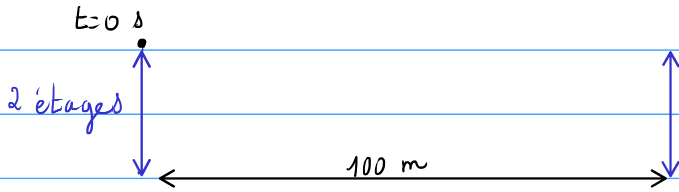
$$y_{max} = h = y(x_h) = \frac{-\cancel{g}}{2 \cancel{v_0^2} \cancel{\cos^2\theta_0}} \times \left(\frac{v_0^{\cancel{4}\,2}}{g^{\cancel{2}}} \sin^2\theta_0 \cancel{\cos^2\theta_0}\right) + \frac{v_0^2}{g} \underbrace{\tan\theta_0 \sin\theta_0 \cos\theta_0}_{\sin^2\theta_0}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2\theta_0 + \frac{v_0^2}{g} \sin\theta_0 = \frac{v_0^2 \sin\theta_0}{2g}$$

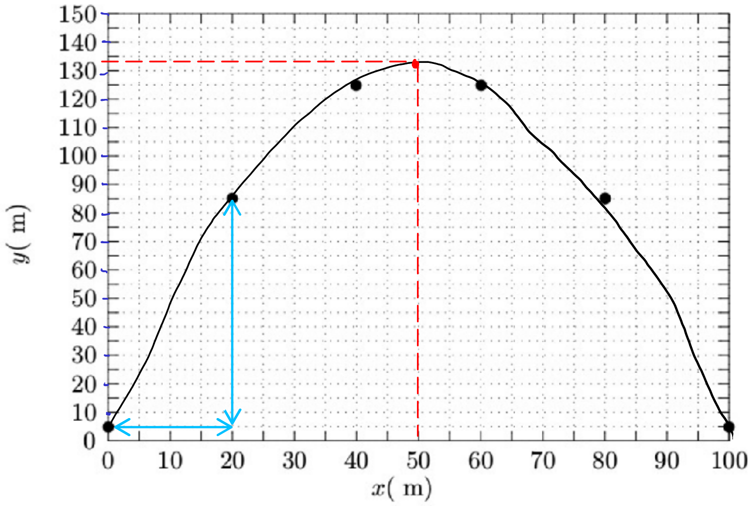
Exercice 2 – Une balle en l'air

Une balle est lancée à partir du deuxième étage d'une maison vers une personne se trouvant aussi au deuxième étage d'un immeuble distant de 100 m. Une photographie stroboscopique de ce lancer est prise et présentée dans le graphique ci-dessous. Les éclairs ont lieu toutes les 2 s, et la balle a été lancée à $t = 0$ s. On prendra $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

1/ Quelle est la vitesse initiale de la balle (trouver plusieurs façons de la déterminer et préciser celle qui vous semble la plus fiable) ?



$g = 10\ m/s^2$



vitesse initiale : à $t = 0$,

$v_x = v_x^{moy}$ entre $t = 0$ s et 2 s

idem pour v_y :

$v_x(t=0) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{20}{2} = 10\ m/s$

$v_y(t=0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{80}{2} = 40\ m/s$

↳ plus fiable