8 | Cinématique

Définition des vitesses et accélération

Exercice 1 – On commence en vitesse (moyenne)

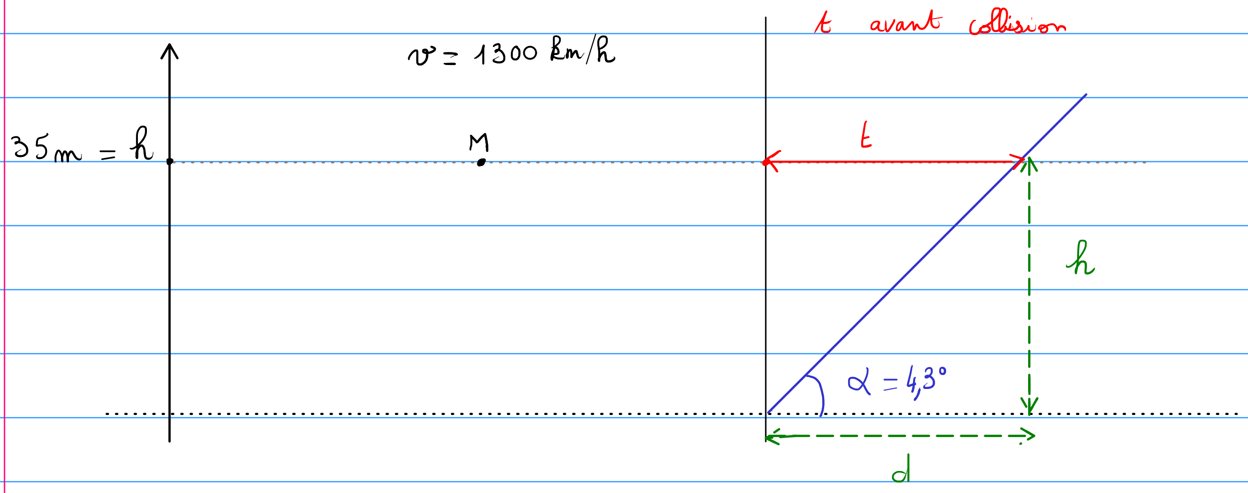
1/ Le record de vitesse au service d'une balle de tennis est de $\boxed{263\,\text{km/h.}}$ Elle parcours environ $\boxed{25\,\text{m}}$ avant de toucher le sol. Quel est le temps de vol de la balle ?

Temps de vol : t

vitesse moyenne : $v_{moy} = \frac{d}{t} \longrightarrow t = \frac{d}{v}$

$$1 \text{ km/h} = \frac{10^3}{60 \times 60} \text{ m/s} \longrightarrow \underline{t} = \frac{25}{263 \times \frac{10^3}{3600}} = \frac{25 \times 3600}{263 \times 10^3} = \underline{0,34\,s}$$

2/ Un pilote de chasse s'exerce au vol en dessous des radars. Il vole horizontalement à une altitude de 35 m à une vitesse de 1300 km/h. Subitement il rencontre un terrain qui a une pente de $4,3^o$. Cette pente est suffisamment douce pour être difficile à détecter. De combien de temps dispose le pilote pour ne pas s'écraser ?



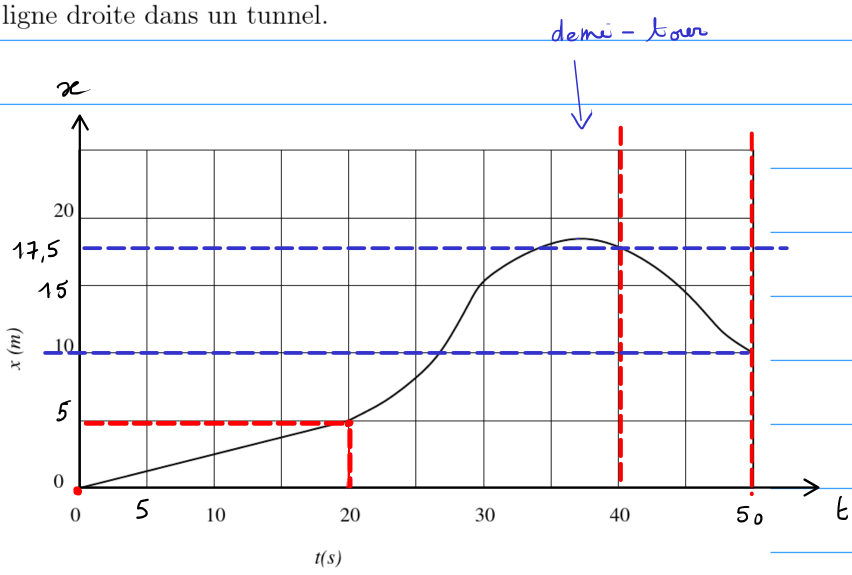
$$v = \frac{d}{t} \quad \text{et} \quad \tan\alpha = \frac{h}{d}$$

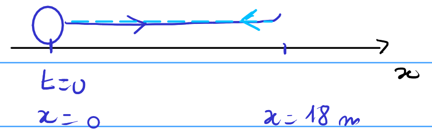
$$\hookrightarrow d = \frac{h}{\tan\alpha}$$

$$\hookrightarrow \underline{t} = \frac{d}{v} = \frac{\overbrace{h}^{m}}{\underbrace{v}_{m/s} \tan(\alpha)} = \frac{35}{1300 \times \frac{10^3}{3600} \times \tan(4,3°)} \simeq \underline{1,29\ s}$$

Exercice 3 – Le lapin

Le graphique de la figure ci-dessous représente la position en fonction du temps d'un lapin courant en ligne droite dans un tunnel.





1/ Quelle est sa vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 20$s et entre $t = 40$s et $t = 50$s ?

- entre $t=0\,s$ et $t=20\,s$: $v_{moy} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(20)-x(0)}{20-0} = \dfrac{5-0}{20} = \dfrac{1}{4}$

$v_{moy} = 0{,}25$ m/s $= 0{,}25 \times 10^{-3} \times 3600 = 900 \times 10^{-3} = 0{,}9$ km/h

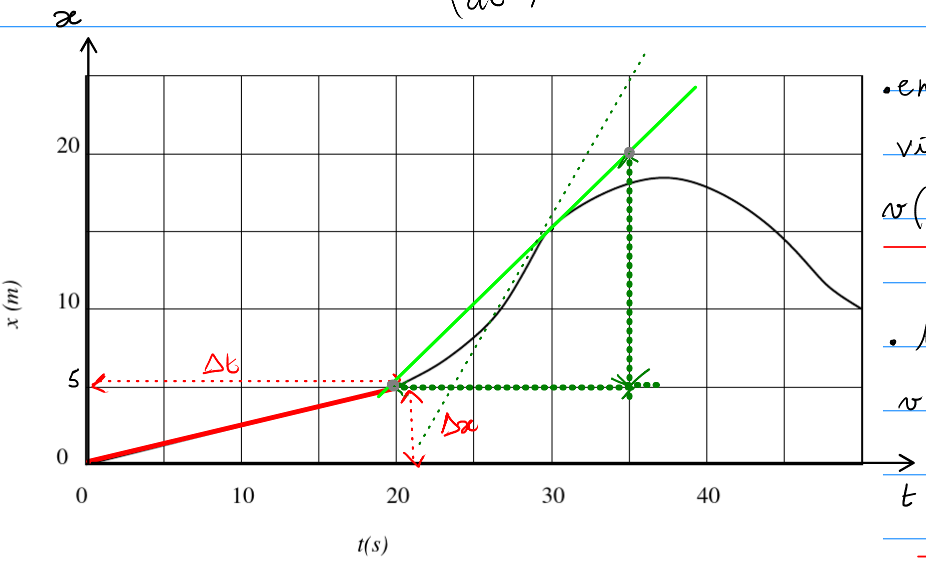
- entre $t=40\,s$ et $t=50\,s$: $v_{moy} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(50)-x(40)}{50-40} = \dfrac{10-17{,}5}{10} = \dfrac{-7{,}5}{10}$

cf. demi-tour

$v_{moy} = -0{,}75$ m/s $= -2{,}7$ km/h (ok : $x(t)$ décroissant)

2/ Estimez sa vitesse instantanée à t=10s et à t=30s.

par définition, $v(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)(t) =$ tangente à la courbe $x(t)$



- entre $t=0\,s$, et $t=20\,s$, la vitesse est constante

$v(t=10\,s) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$ m/s

pente du tracé — = tangente

- $t=30\,s$,

$v(t=30\,s) \simeq \left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{15}{15}$ m/s

$v(t=30\,s) = 1$ m/s

$= 3{,}6$ km/h

au tracé de la tangente près.

$$v = \text{cste} = V$$
$$= \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

3/ La vitesse du lapin est-elle constante à certaines périodes de temps ? Si oui, indiquez lesquelles.

Si la vitesse est constante : $v = \frac{dx}{dt} = V$ constante

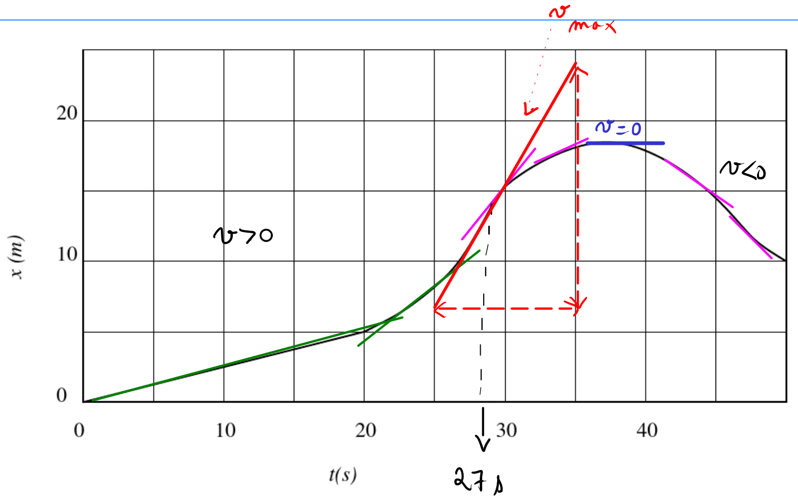
$$\frac{dx}{dt} = V \Longleftrightarrow \int_{x(t=0)}^{x} dx = \int_{t=0}^{t} V\, dt \Longleftrightarrow x(t) - \overbrace{x(t=0)}^{=0} = V\,(t-0)$$
$$x(t) = V\,t$$

↳ $x(t)$ relation linéaire : droite sur graphique

vitesse constante entre $t = 0\,s$ et $t = 20\,s$

4/ À quel moment le lapin atteint-il une vitesse maximale ?

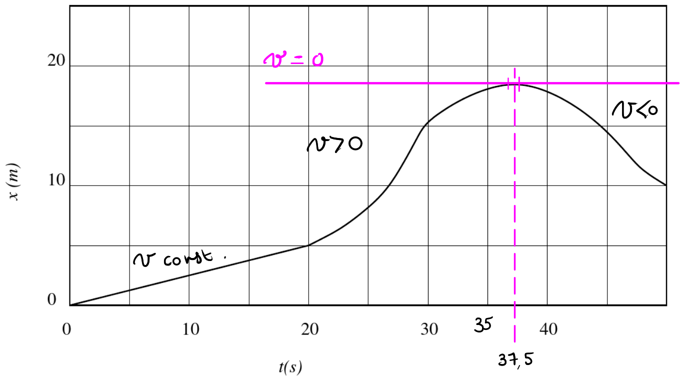
$v = \left(\frac{dx}{dt}\right)$ maximale quand x varie le plus fortement.



$$\underline{v_{max}} = \left(\frac{dx}{dt}\right) = v(t = 27\,s)$$
$$= \frac{3,5 \times 5}{2 \times 5} = \frac{3,5}{2} \simeq \underline{1,8\ m.s^{-1}}$$

5/ Le lapin s'arrête-t-il à un moment quelconque ? Si oui lequel ?

arrêt $\Longleftrightarrow$ $v = 0$ $\Longleftrightarrow$ tangente horizontale à x

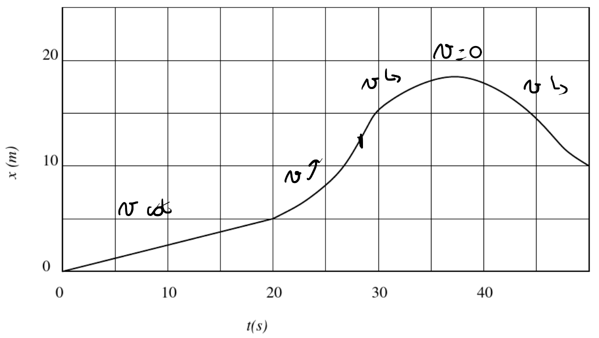


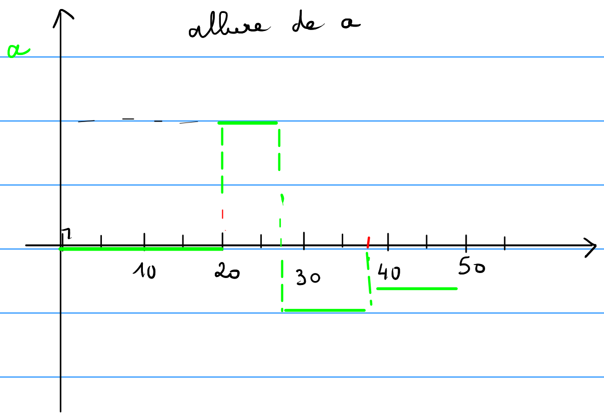
Le lapin s'arrête à $\underline{t \simeq 37,5\,s}$

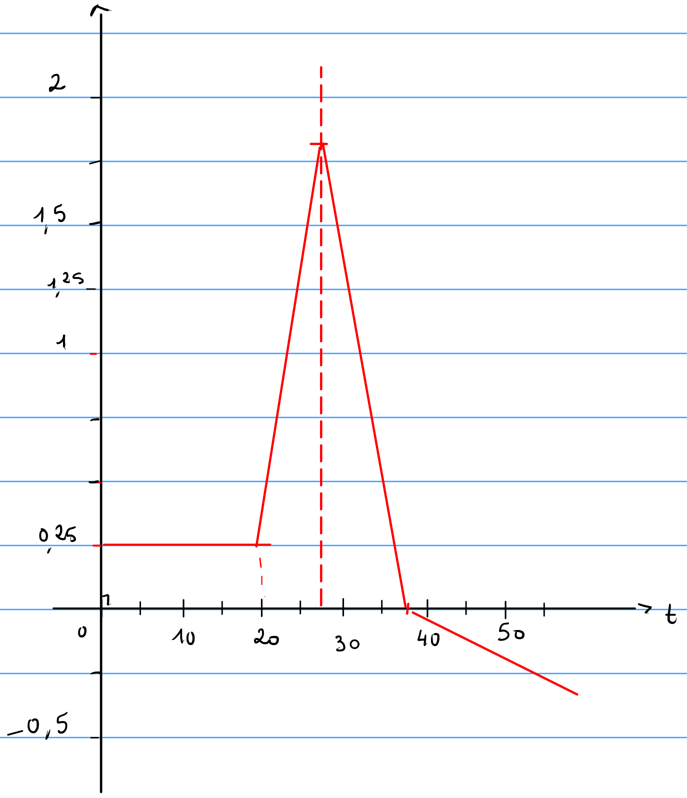
6/ non, il change de direction

à $t = 37,5\,s$: v devient négative

7/ Tracer l'allure les graphes de $a(t)$ et $v(t)$, accélération et vitesse du lapin en fonction du temps.







Exercice 7 – Silence, on tourne

Dans le plan xy, un point matériel M effectue un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = 2$ m autour de l'origine O, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. La période du mouvement est $T = 12$ s. À $t = 0$, le point est situé en A (voir figure).

Calculer *(en faisant l'approximation* $\pi \simeq 3$ *pour simplifier les A.N.)* :

1/ ω_0 la vitesse angulaire,

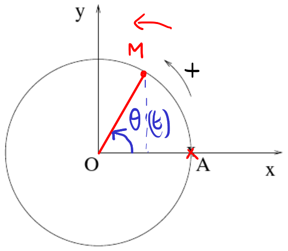
2/ les coordonnées cartésiennes de M aux instants $t_1 = 3$ s et $t_2 = 6$ s,

3/ le vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_m$ entre t_1 et t_2,

4/ les vecteurs vitesse $\vec{v}_1$ à t_1 et $\vec{v}_2$ à t_2 ,

5/ le vecteur accélération moyenne $\vec{a}_m$ entre t_1 et t_2,

6/ les vecteurs accélération $\vec{a}_1$ à t_1 et $\vec{a}_2$ à t_2.

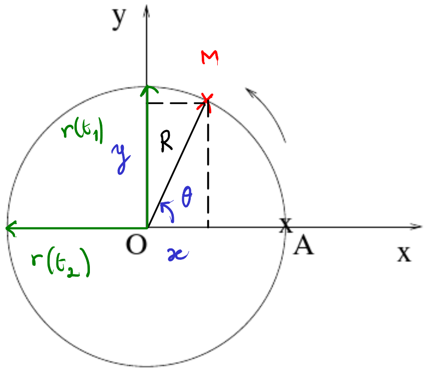


1/ Vitesse angulaire : ω_0 en rad.s^{-1}

Période : $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ rad, rad.s $\longrightarrow$ $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}}$

A.N. : $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2 \times 3}{12} = \dfrac{1}{2} = 0,5$ rad.s^{-1}

2/ les coordonnées cartésiennes de M aux instants $t_1 = 3$ s et $t_2 = 6$ s,



$x^2+y^2=R^2$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \end{aligned}}$$

avec $R = 2\,m$

$$\boxed{\begin{matrix} \theta & \longrightarrow & 2\pi \\ t & \longrightarrow & T \end{matrix}}$$

$\theta \times T = 2\pi\, t$

$\theta = \overset{\omega_0}{2\pi}\frac{t}{T}$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{T}$ constant

↳ mvt circulaire uniforme

$$\begin{cases} x = R\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = R\cos(0{,}5t) \\ y = R\sin(0{,}5t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{R}{2}\sin(0{,}5t) \\ \dot{y}(t) = \frac{R}{2}\cos(0{,}5t) \end{cases}$$

$t_1 = 3s$: $\begin{cases} x(t_1) = 2\cos(0{,}5\times 3) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \simeq 0 \\ y(t_1) = 2\sin(0{,}5\times 3) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \simeq 2 \end{cases}$

$t_1 = \frac{T}{4}$

$t_2 = 6s$: $\begin{cases} x(t_2) = 2\cos(0{,}5\times 6) \simeq 2\cos\left(2\pi\frac{6}{12}\right) = 2\cos(\pi) = -2 \\ y(t_2) = 2\sin(0{,}5\times 6) \simeq 0 \end{cases}$

$t_1 = \frac{T}{2}$

position: $\vec{r} = \vec{OM}$

3/ le vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_m$ entre t_1 et t_2,

$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)}{t_2-t_1}} = \frac{1}{3}\Big(x(6)-x(3) \,;\, y(6)-y(3)\Big) = \frac{1}{3}\left(-2-0\,;\,0-2\right)$$

$$\vec{v}_m = \left(\frac{-2}{3}\,;\,-\frac{2}{3}\right)$$

4/ les vecteurs vitesse $\vec{v}_1$ à t_1 et $\vec{v}_2$ à t_2 ,

$\vec{v} \hat{=} \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\frac{d}{dt}(\cos(\alpha t)) = -\alpha\sin(\alpha t)$

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \\ y(t) = R\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -\overset{m}{R}\,\overset{\sim 0{,}5\ s^{-1}}{\frac{2\pi}{T}}\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \\ \dot{y}(t) = R\frac{2\pi}{T}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \end{cases}$$

$t_1 = 3s = \frac{T}{4}$: $\begin{cases} \dot{x}(t_1) = -\overset{m}{R}\times\overset{s^{-1}}{0{,}5}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{R}{2} \simeq -1\ m.s^{-1} \\ \dot{y}(t_1) = +R\times 0{,}5\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

$\vec{v}_1 = \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right.$

$t_2 = 6s = \frac{T}{2}$: $\begin{cases} \dot{x}(t_2) = -R\times 0{,}5\ \sin(\pi) = 0 \\ \dot{y}(t_2) = R\times 0{,}5\ \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} = -\frac{R}{2} = -1\,m.s^{-1} \end{cases}$

$\vec{v}_2 = \left| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right.$

5/ le vecteur accélération moyenne $\overrightarrow{a}_m$ entre t_1 et t_2,

accélération moyenne :

$$\vec{a}_m \hat{=} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_m = \left[\frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}\right] = \frac{1}{3} \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t_2) - \dot{x}(t_1) = 0-(-1) = 1 \\ \dot{y}(t_2) - \dot{y}(t_1) = -1-0 = -1 \end{array}\right.$$

$$\vec{a}_m = \left| \begin{array}{l} 1/3 \\ -1/3 \end{array}\right. \quad (m \cdot s^{-2})$$

6/ les vecteurs accélération $\overrightarrow{a}_1$ à t_1 et $\overrightarrow{a}_2$ à t_2.

accélération instantanée

$$\vec{a} \hat{=} \frac{d\vec{v}}{dt} = \left| \begin{array}{l} \ddot{x}(t) = -\overset{x}{R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)} \\ \ddot{y}(t) = -\underset{y}{R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)} \end{array}\right. = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. = -\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}_{\omega_0^2} \vec{r}$$

$$\vec{v}(t) = \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = -R \frac{2\pi}{T} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \\ \dot{y}(t) = R \frac{2\pi}{T} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \end{array}\right. , \quad \frac{2\pi}{T} \simeq \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$\vec{a}$ à $t_1 = 3s$:

$$\vec{a}(t_1) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left| \begin{array}{l} 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right. = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -0,5 \end{array}\right.$$

$\vec{a}$ à t_2 6s :

$$\vec{a}(t_2) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left| \begin{array}{l} \frac{-2}{4} \overbrace{\cos(\pi)}^{-1} \\ \frac{-2}{4} \sin(\pi) \end{array}\right. = \left| \begin{array}{l} 0,5 \\ 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4 – Le lièvre et la tortue

L

Après avoir fait la sieste sous un arbre à 20 m de la ligne d'arrivée, le lièvre se réveille et aperçoit la tortue qui le précède d'une distance égale à 19, 5 m.

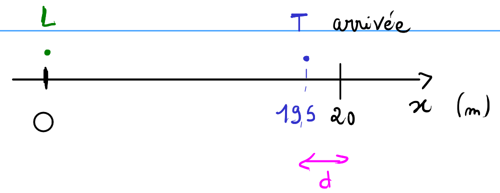
T

Elle file vers le succès dans une dernière ligne droite avec une vitesse de valeur V_o égale à $0,25$ m/s. Le lièvre se met alors à courir en ligne droite avec une accélération de $9\,\mathrm{ms}^{-2}$ jusqu'à atteindre une vitesse de 18 m/s qu'il garde jusqu'à la fin de la course.

On choisira l'origine O pour repérer le mouvement au pied de l'arbre où le lièvre faisait la sieste. Le lièvre et la tortue sont modélisés par des points matériels.

1/ Combien de temps faut-il à la tortue pour atteindre la ligne d'arrivée ? τ_T

$t = 0\,s$:



Il reste $d = 0,5$ m à la tortue avant l'arrivée ; elle a une vitesse constante

$V_o = 0,25\ m \cdot s^{-1} = 0,9\ km/h$

$$\underline{\tau_T} = \left(\frac{d}{V_0}\right) = \frac{\overset{m}{0{,}5}}{\underset{m.s^{-1}}{0{,}25}} = 4 \times 0{,}5 = \underline{2\ s}$$

2/ À la vitesse de pointe de 18 m/s, quelle distance parcourt le lièvre pendant cette durée ? Peut-on faire un pronostic sur le résultat de la course à partir de ces valeurs ?

$v_L = 18\ m/s$, il parcourt donc $\Delta x = v_L \times \tau_T = 18 \times 2 = \underline{36\ m}$. On ne peut pas faire de pronostic car on ne sait pas en combien de temps le lièvre atteint sa vitesse de pointe.

3/ Écrire les équations horaires des mouvements de la tortue ($x_T(t)$) et du lièvre ($x_L(t)$) lors de la première phase de son mouvement.

Tortue : $v_T = V_0 \Longrightarrow \underline{x_T(t)} = \underbrace{V_0}_{0{,}25\ m.s^{-1}}\, t + \overbrace{x_T(t=0)}^{19{,}5\ m} = \underline{0{,}25\ t + 19{,}5}$

$$\dot{x}_T(t) = v_T = \underbrace{\left(\frac{dx_T}{dt}\right)}_{\to} = V_0 \quad \text{constante}$$

constante

$$\int_{x(t=0)}^{x(t)} 1\, dx_T = \int_{t=0}^{t} V_0\, dt = V_0 \int_{t=0}^{t} 1\, dt$$

$$\left[x_T\right]_{x_T(t=0)}^{x(t)} = V_0 \left[t\right]_0^t$$

$$x_T(t) - x_T(t=0) = V_0\,(t - 0)$$

Lièvre : $a_L(t) \hat{=} \left(\frac{dv_L}{dt}\right) = \left(\frac{d^2 x_L}{dt^2}\right) = a_L = 9\ m.s^{-2}$ constante

équations horaires : $v_L(t) = a_L\, t + \underbrace{v_L(t=0)}_{=0\ m.s^{-1}}$; lièvre au repos au départ

donc $x_L(t) = \frac{1}{2} a_L\, t^2 + v_L(t=0)\, t + \underbrace{x_L(t=0)}_{=0\ m}$: lièvre au point de départ.

$\Longrightarrow v_L(t) = 9 \times t$ → il faut 2 s au lièvre pour atteindre sa vitesse de pointe de 18 m/s

$\underline{x_L(t) = 4{,}5\ t^2}$

$\xrightarrow{} d_L$

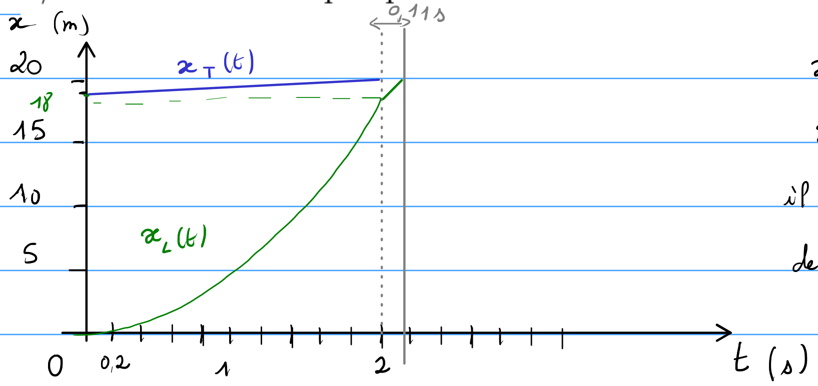
4/ À quelle distance de l'arbre le lièvre se trouve-t-il à la fin de la première phase de son mouvement ? Montrer alors qu'il a perdu la course.

à $t = 2\,s$, à la fin de la $1^{ère}$ phase, $v_L(t) = 18\ m/s$ et $\underline{x_L(t=2s)} = 4,5 \times (2)^2 = \underline{18m}$.

GR, au bout de 2 s, la tortue se trouve à $0,25 \times 2 + 19,5 = 20\,m$, à l'arrivée.

Le lièvre a perdu.

5/ Combien de temps après la tortue le lièvre franchira-t-il la ligne d'arrivée ?



$x_L(t) = 4,5\,t^2$ de $t = 0\,s$ à $t = 2\,s$

$x_L(t) = 18 \times t$ de $t = 2\,s$ à $t = t_f$

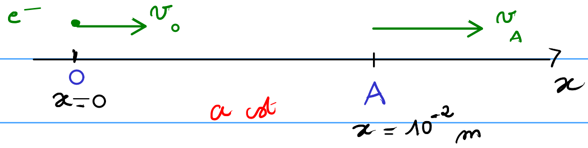
il reste 2 m à parcourir pendant un temps

de $(t_f - 2) = \frac{2}{18} = \underline{0,11\,s}$

Exercice 2 – Et on accélère

1/ Un électron avec une vitesse initiale de $\underline{v_0 = 1,50 \times 10^5\,\mathrm{ms^{-1}}}$ rentre dans une région longue de $\underline{1\,\mathrm{cm}}$ où il est accéléré électriquement. Il sort avec une vitesse de $\underline{5,70 \times 10^5\,\mathrm{ms^{-1}}}$. Supposant que l'accélération est constante, quelle est sa valeur ?

a constante



$\vec{v} = v\,\vec{e}_x$

$\vec{a} = a\,\vec{e}_x = \frac{dv}{dt}\,\vec{e}_x$

- $\frac{dv}{dt} = a = cst \longrightarrow \int_{v(t=0)}^{v(t=t_A)} dv = a \int_{t=0}^{t_A} dt \longrightarrow [v]_{v_0}^{v_A} = a\,[t]_0^{t_A}$

$\underline{(v_A - v_0) = a\,t_A} \Longleftrightarrow v(t) = at + v_0$ pour $t = t_A$

- $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow x(t) - \overset{=0}{x(t=0)} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$

$x(t_A) = d = \frac{1}{2}a\,t_A^2 + v_0\,t_A$

$a = \left(\frac{v_A - v_0}{t_A}\right)$

$\hookrightarrow d = \frac{1}{2}(v_A - v_0)\,t_A + v_0\,t_A = \frac{1}{2}(v_A + v_0)\,t_A$

$(LT^{-1})^2$

$\Rightarrow t_A = \left(\frac{2d}{v_A + v_0}\right)$ et $\boxed{a = \frac{(v_A - v_0)(v_A + v_0)}{2d}}$

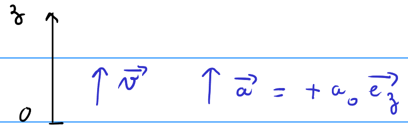
L

A. N : $a = \dfrac{(5,70-1,50)\times 10^{5} \times \left(5,70+1,50\right)\times 10^{5}}{2\times 1\times 10^{-2}} \simeq \underline{1,51 \times 10^{13}\ m.s^{-2}}$

2/ L'ascenseur à l'hôtel Marriott peut monter de 190 m. Il a une vitesse maximale de 305 m/min et son accélération et décélération sont constantes et de même norme : $|a_0| = 1,22\,\mathrm{ms}^{-2}$.

a) Quelle distance est parcourue par l'ascenseur dans la phase d'accélération : repos → vitesse maximale ?

a) Phase d'accélération : $0 \leq t \leq t_{max}$ (1D)



• conditions initiales

à $t=0\,s$, $\left|\begin{array}{l}\vec{v}=\vec{0}\\ z=0\end{array}\right.$ et à $t=t_{max}$: $\vec{v} = v_{max}\,\vec{e}_z$ $\quad v_{max} = 305\ m/min = \dfrac{305}{60}\ m.s^{-1}$

• $\boxed{a = \dfrac{dv}{dt}} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \longrightarrow \displaystyle\int_{v=0}^{v=v(t)} dv = \overset{cst}{a_0}\int_{t=0}^{t} dt \longrightarrow v(t) - 0 = a_0(t-0)$

$\hookrightarrow\ v(t) = a_0 t = \dfrac{dz}{dt} \quad (1) \qquad a_0 = 1,22\ m.s^{-2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{t=0}^{t} dz = \int_{t=0}^{t} \overset{cst}{a_0}\, t\, dt \Rightarrow z(t) - z(t=0) = a_0\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^t$

$\hookrightarrow\ z(t) - \overbrace{z(t=0)}^{=0} = \dfrac{1}{2}a_0 t^2 \longrightarrow z(t) = \dfrac{1}{2}a_0 t^2 \quad (2)$

avec (1) : $v_{max} = v(t_{max}) = a_0 t_{max} \Rightarrow \boxed{t_{max} = \dfrac{v_{max}}{a_0}}$

A.N : $t_{max} = \dfrac{(305/60)}{1,22} \simeq 4,17\ s$

La distance parcourue par l'ascenseur pendant la 1ère phase vaut : $z(t_{max})$

$\underline{z(t_{max})} = \dfrac{1}{2}a_0 t_{max}^2 = \dfrac{1}{2}\cancel{a_0}\left(\dfrac{v_{max}^2}{a_0^{\cancel{2}}}\right) = \boxed{\dfrac{v_{max}^2}{2a_0}} = d_1$

A.N : $z(t_{max}) = \dfrac{(305/60)^2}{2\times 1,22} = \underline{10,59\ m}$

b) Combien de temps faut-il pour faire le trajet de 190 m, commençant et terminant au repos ?

Phase de décélération : $t_{max} \leq t \leq t_f$, t_f : temps à la fin

$d = 190\,m = d_1 + d_2$, d_2 distance parcourue pendant la $2^{ème}$ phase

- $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = -a_0$, $a_0 = 1,22\ m.s^{-2}$

$$\int_{v_{max}}^{v} dv = -a_0 \int_{t_{max}}^{t} dt \Rightarrow v(t) - v_{max} = -a_0(t - t_{max})$$

$$\hookrightarrow v(t) = -a_0(t - t_{max}) + v_{max}$$

à $t = t_f$: $v(t_f) = 0$: $0 = -a_0(t_f - t_{max}) + v_{max}$

$$\hookrightarrow (t_f - t_{max}) = \frac{v_{max}}{a_0}$$

- $v(t) = \frac{dz}{dt} = -a_0(t - t_{max}) + v_{max} \Rightarrow \int_{d_1}^{d} dz = \int_{t_{max}}^{t_f} \left[-a_0(t - t_{max}) + v_{max}\right] dt$

$\boxed{t_{max} = \frac{v_{max}}{a_0}}$

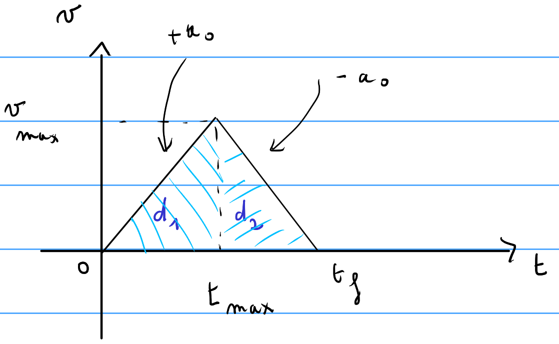
$$\underbrace{(d - d_1)}_{d_2} = \left[-a_0\left(\frac{t^2}{2} - t_{max}\, t\right) + v_{max}\, t\right]_{t_{max}}^{t_f}$$

$$= -a_0\left(\frac{t_f^2}{2} - t_{max}\, t_f\right) + v_{max}\, t_f - \left(-a_0\left(\frac{t_{max}^2}{2} - t_{max}^2\right) + v_{max}\, t_{max}\right)$$

$$-a_0 \frac{t_f^2}{2} + \underbrace{a_0 t_{max}}_{v_{max}} t_f + v_{max}\, t_f \qquad a_0 \frac{t_{max}^2}{2} = \frac{v_{max}^2}{2 a_0} \qquad \frac{v_{max}^2}{a_0}$$

$$d_2 = -a_0 \frac{t_f^2}{2} + 2 v_{max}\, t_f - \frac{3}{2}\frac{v_{max}^2}{a_0} \longrightarrow t_f = \dots$$

ou



$v = \frac{dz}{dt} \rightarrow \Delta z = \int v\, dt =$ aire sous la courbe

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{2} v_{max}\, t_{max} \\ d_2 = \frac{1}{2} v_{max} (t_f - t_{max}) \end{cases} , \ t_f\ ?$$

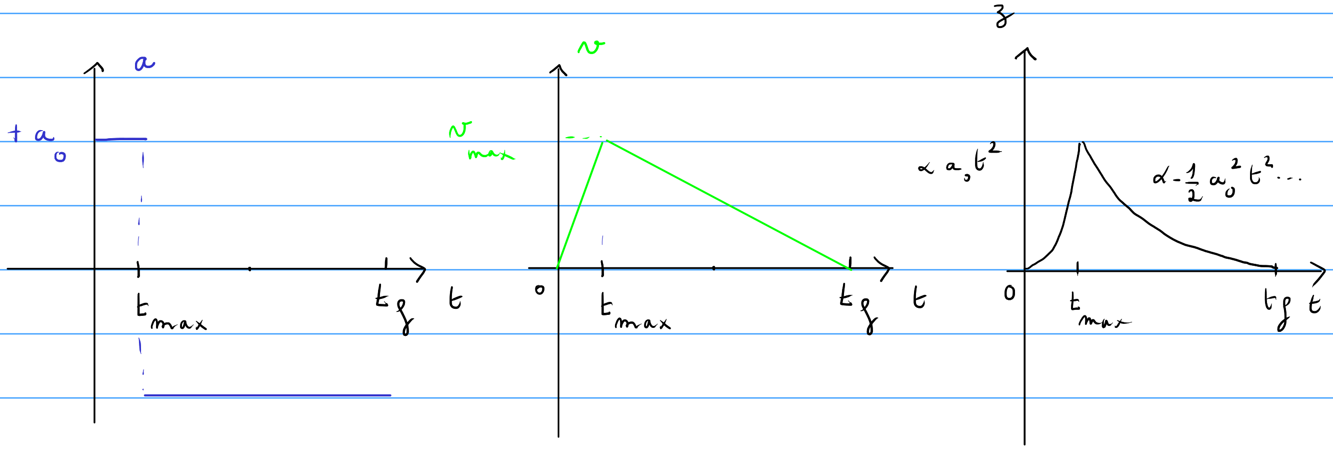
$$d_2 = d - d_1 = \frac{1}{2} v_{max} (t_f - t_{max}) \Rightarrow \boxed{t_f = \frac{2(d-d_1)}{v_{max}} + t_{max}}$$

$$\underline{\underline{A.N:}} \quad t_f = \frac{2(190 - 10,59)}{\left(\frac{305}{60}\right)} + 4,17 \simeq \underline{74,75\,s}$$

$t_{max} = 4,17\,s$

$t_f = 74,75\,s$

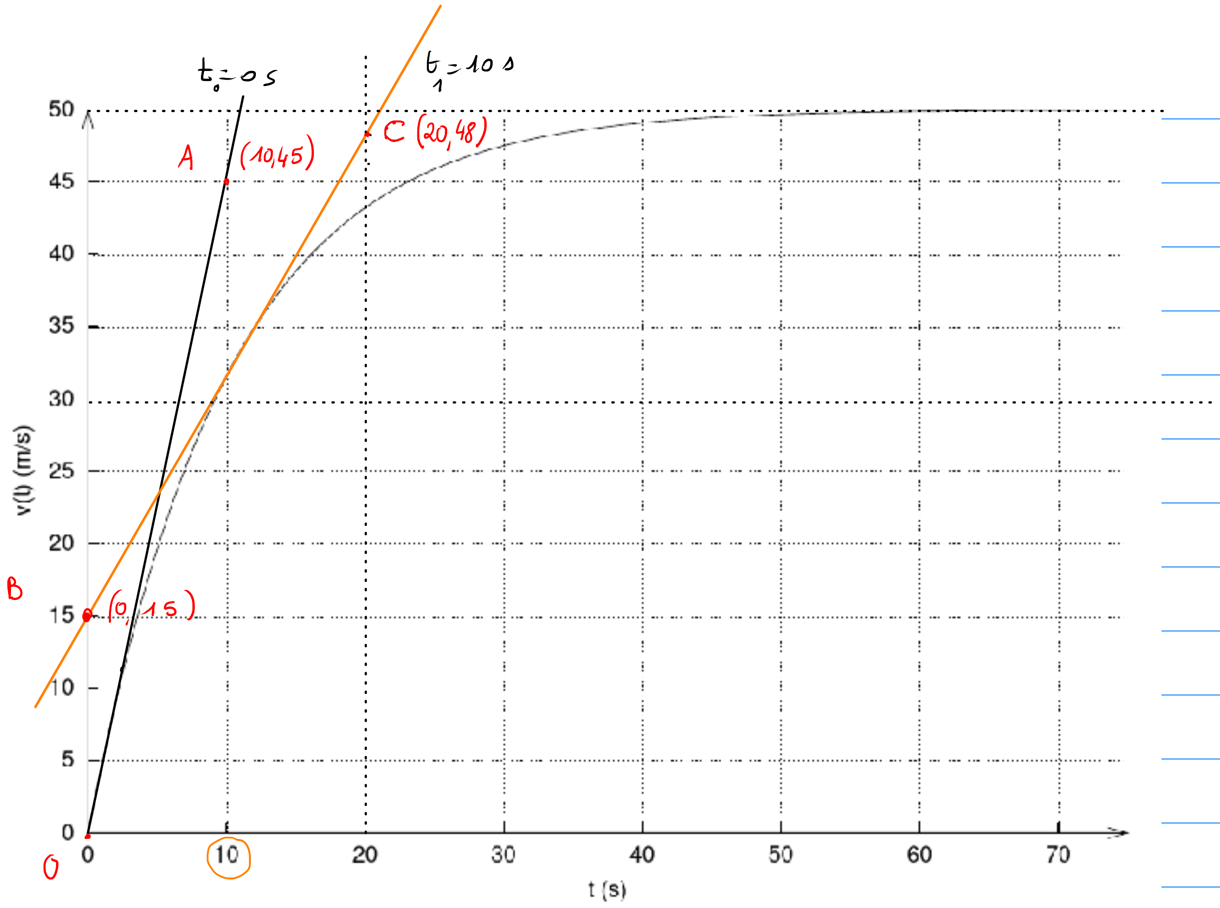
3)



Exercice 5 En voiture

Les performances d'une voiture au démarrage sont transcrites sur la figure. On fixe les origines de temps et d'espace pour que $x(t = 0s) = 0\,\mathrm{m}$.

1/ Au voisinage de $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ et $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, déterminer (avec une précision acceptable) l'équation de la tangente à la courbe de vitesse $v(t)$ donnée sur la figure. En déduire la valeur de l'accélération à ces deux instants et une approximation par un polynôme ordre deux en Δt de la position $x(t_i + \Delta t)$.



1) Equation de la tangente : $y(t) - y(t_0) = v'(t_0)\,(t - t_0)$

$$y(t) = v'(t_0)\,(t - t_0) + y(t_0) \quad , \; t_0 = 0\,s$$

- à $t_0 = 0$ s, la tangente passe par les deux points O : (0,0) et A : (10,45)

  à $t_1 = 10$ s, " " " " " " " B : (0,15) et C : (20,48)

- Tangente à t_0 : $v = \alpha_0 t + \beta_0$ avec $\begin{cases} 0 = \alpha_0 \times 0 + \beta_0 & \text{en } O \\ 45 = \alpha_0 \times 10 + \beta_0 & \text{en } A \end{cases}$

donc $\beta_0 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 45 = \alpha_0 \times 10 + 0 \longrightarrow \alpha_0 = \dfrac{45}{10} = 4{,}5 \end{array}\right\} \quad v = 4{,}5\,t \quad \text{à } t_0$$

- Tangente à t_1 : $v = \alpha_1 t + \beta_1$ avec $\begin{cases} 15 = \alpha_1 \times 0 + \beta_1 & \text{en } B \\ 48 = \alpha_1 \times 20 + \beta_1 \end{cases}$

donc $\beta_1 = 15$

$$48 = \alpha_1 \times 20 + 15 \longrightarrow \alpha_1 = \frac{48 - 15}{20} = \frac{33}{20} = \frac{3{,}3}{2} = 1{,}65 \; m.s^{-2}$$

$$v = 1{,}65\,t + 15 \quad \text{à } t_1$$

- Valeur de l'accélération : $a(t) = \left(\frac{dv}{dt}\right)(t) = \frac{d(v(t))}{dt}$

$*$ $a(t_0) = \left(\frac{dv}{dt}\right)(t = t_0) = \frac{d}{dt}\left(v(t_0)\right) = \frac{d}{dt}\left(4,5\,t\right) = 4,5$

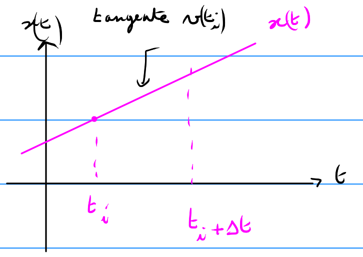
$*$ $a(t_1) = \left(\frac{dv}{dt}\right)(t = t_1) = \frac{d}{dt}\left(v(t_1)\right) = \frac{d}{dt}\left(1,65\,t + 15\right) = 1,65$

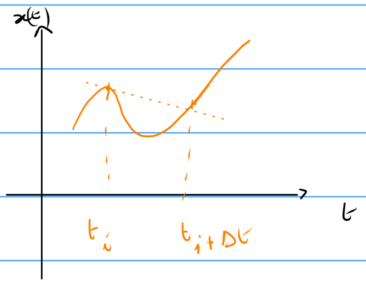
- $x(t_i + \Delta t)$: développement limité de Taylor

$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \overbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_i}}^{v(t_i)} \left[(t_i + \Delta t) - t_i\right] + \frac{1}{2} \overbrace{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t_i}}^{a(t_i)} \left[(t_i + \Delta t) - t_i\right]^2 + \ldots$$

$$\boxed{x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + v(t_i)\,\Delta t + \frac{1}{2}\,a(t_i)\,(\Delta t)^2}$$

exemple :





- $t = t_0$: $x(0 + \Delta t) = \underbrace{x(0)}_{=0} + \underbrace{v(0)}_{=0}\,\Delta t + \frac{1}{2}\underbrace{a(0)}_{4,5}(\Delta t)^2 = \frac{4,5}{2}(\Delta t)^2$

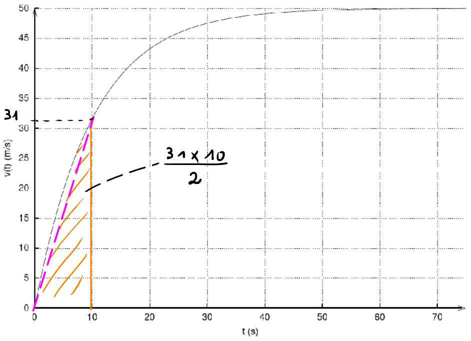
$x(\Delta t) = \frac{4,5}{2}(\Delta t)^2$

- $t = t_1$: $x(10 + \Delta t) = \overbrace{x(10)}^{?} + \underbrace{v(10)}_{31,5}\,\Delta t + \frac{1}{2}\underbrace{a(10)}_{1,65}(\Delta t)^2 = 155 + 31,5\,\Delta t + \frac{1,65}{2}(\Delta t)^2$

$x(10)$? $v(t) = \frac{dx}{dt} \longrightarrow \int_{x(0)}^{x(10)} dx = \int_{t=0}^{t=10} v\,dt$ donc $\left[x\right]_{x(0)=0}^{x(10)} = \int_0^{10} v(t)\,dt$

$x(10) = \int_0^{10} v(t)\,dt$: aire sous la courbe $v(t)$ entre 0 et 10

$x(10) = \frac{31 \times 10}{2} = 155\ m$



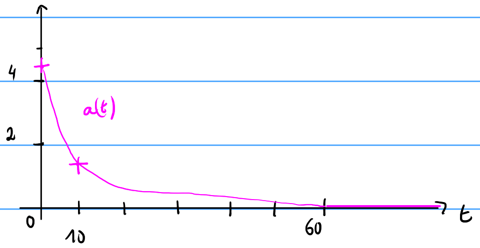
2/ Donnez le comportement asymptotique de $v(t)$, $a(t)$ et $x(t)$ $(t \to \infty)$.

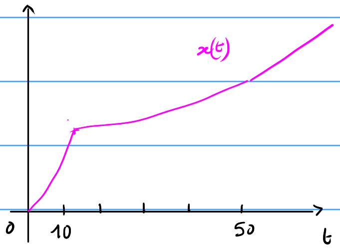
- $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = 50 \ m/s$ $\quad v(t) = \text{constante} = 50 \ m/s$ quand $t > 50 \ s$

- $a(t) = \left(\dfrac{dv}{dt}\right) \longrightarrow v = cst \longrightarrow a = 0$ donc $\lim\limits_{t \to \infty} a(t) = 0 \ m/s^2$

- $x(t) = \displaystyle\int_0^t v \, dt$: aire sous la courbe de $v(t)$; $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \infty$

3/





Exercice 6 – Dans le plan

Un objet assimilable à un point matériel M se déplace et peut y être repéré à tout instant t par ses coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$ et/ou ses coordonnées polaires $(r(t), \theta(t))$. t est mesuré en secondes, les longueurs en mètres et les angles en radians.

On donne :

entre $t = 0,00$ s et $t = 2,00$ s : M a une vitesse constante $\overrightarrow{v_M} = v_0\,(\overrightarrow{u_x} + 6\,\overrightarrow{u_y})$ avec $v_0 = 3\,\mathrm{ms}^{-1}$.

entre $t = 2,00$ s et $t = 5,00$ s : y reste constant et $x(t) = 2\,t^2 - 2$.

entre $t = 5,00$ s et $t = t_f$ s : r reste constant et M a une vitesse angulaire constante $\omega_0 = -0,25\,\mathrm{rd\,s}^{-1}$.

à t_f, M a atteint l'axe des y et s'y arrête.

1/ Trajectoire de M : $y = f(x) \longleftarrow$ équations horaires

- $0 \leq t \leq 2,00 s$: $\quad \vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \dfrac{dx}{dt} = \\ \dfrac{dy}{dt} \end{vmatrix} \begin{matrix} v_0 \\ 6v_0 \end{matrix}$ $\quad$ car $\vec{v}(M) = v_0 \,\vec{u_x} + 6 v_0 \,\vec{u_y}$

$$\frac{d(\ldots)}{dt}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \\[2ex] v_y = \dfrac{dy}{dt} = 6 v_0 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) = v_0 t + \underbrace{x(0)}_{=0} \\[2ex] y(t) = 6 v_0 t + \underbrace{y(0)}_{=0} \end{array} \right.$$

on choisit de poser à $t = 0 \ s$: $\underline{x(t=0) = 0 = y(0)}$

$\longrightarrow \boxed{y = 6x}$ droite

$\begin{vmatrix} y(2) = 6 \times v_0 \times 2 = 6 \times 3 \times 2 = 36 \ m \\ x(2) = v_0 \times 2 = 6 \ m \end{vmatrix}$

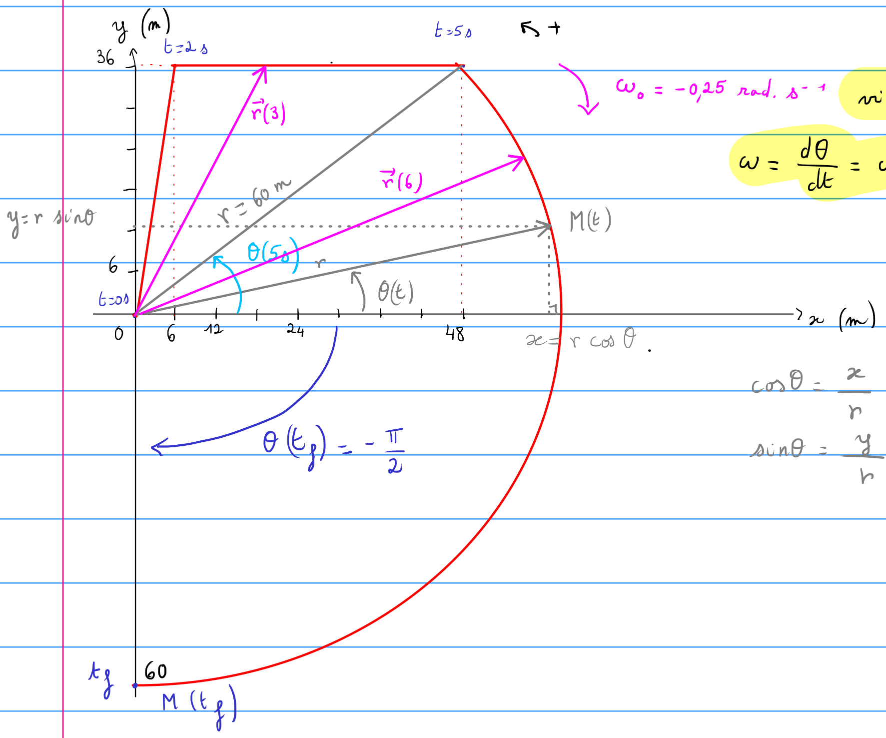
$2s \leq t \leq 5s$: $y = cst = y(2s) = 36 m$ trajectoire

$x(t) = 2t^2 - 2 \longrightarrow x(2) = 2 \times 2^2 - 2 = 6 m$

$\longrightarrow x(5) = 2 \times 5^2 - 2 = 50 - 2 = 48 m$

$5s \leq t \leq t_f$: $r = cst = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x(5)^2 + y(5)^2} = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60$

à $t = t_f$: $x(t_f) = 0$. La trajectoire est celle d'un cercle de centre $O = (0,0)$ et de rayon $r = 60 m$



$\omega_0 = -0,25 \ rad.s^{-1}$ vitesse angulaire

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ constante

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ et $\tan\theta = \frac{y}{x}$

2) Vitesse :

- $0s \leq t \leq 2s$: $\vec{v} = \begin{vmatrix} v_0 \\ 6v_0 \end{vmatrix}$ donc $\begin{cases} v_x(2s^-) = v_0 = 3 m.s^{-1} \neq v_x(2s^+) \\ v_y(2s^-) = 6v_0 = 18 m.s^{-1} \neq v_y(2s^+) \end{cases}$

- $2s \leq t \leq 5s$: $* \ y = cst \Rightarrow v_y = \frac{dy}{dt} = 0$

$v_y(2s^+) = 0 \ m.s^{-1}$ et $v_y(5s^-) = 0 \ m.s^{-1}$

$* \ x(t) = 2t^2 - 2 \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \times (2t) - 0 = 4t$ $\begin{cases} v_x(2_s^+) = 4 \times 2 = 8 m.s^{-1} \\ v_x(5s^{-1}) = 4 \times 5 = 20 m.s^{-1} \end{cases}$

discontinuité de la vitesse à $t = 2s$: v n'est pas défini

$\Rightarrow \underline{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \underline{20 m.s^{-1}}$

• $5s \leq t \leq t_f$: trajectoire circulaire $r = cst$, la vitesse v vaut $r\omega_0$

↳ $\vec{OM} = r\,\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \underbrace{\dot{r}}_{=0}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\vec{u}}_r = r\,\underbrace{\dot{\theta}}\,\vec{u}_\theta = r\,\omega_0\,\vec{u}_\theta$

ω_0 vitesse angulaire

↳ en coord. cartésiennes : $\vec{OM} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y = r\cos\theta\,\vec{u}_x + r\sin\theta\,\vec{u}_y$

car $\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y$ et $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y$

donc $v = \|\vec{v}\| = |r\omega_0| = 60 \times 0{,}25 = 15\ m.s^{-1} \neq 20\ m.s^{-1}$

discontinuité de la vitesse $\Rightarrow$ v pas définie à $t = 5s$.

3/ t_f : à t_f , M se trouve sur l'axe des y donc à $x = 0$

$\vec{OM} = r\,\vec{u}_r = r\cos\theta\,\vec{u}_x + r\sin\theta\,\vec{u}_y$ et $r\cos\theta(t_f) = 0 \rightarrow \theta(t_f) = -\frac{\pi}{2}$

or la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante : $\dot{\theta} = \omega_0$

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 \longrightarrow \boxed{\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0}$ $\quad \begin{cases} \theta(5s) = \omega_0 \times 5 + \theta_0 \\ \theta(t_f) = \omega_0\,t_f + \theta_0 \end{cases}$

$\theta(5s)$ tel que $\tan\theta(5s) = \frac{y}{x} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4} \rightarrow \theta(5s) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

$\theta(t_f) - \theta(5s) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = \omega_0\,(t_f - 5)$

$$\boxed{t_f = 5 - \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)}{\omega_0}}$$

A.N : $t_f \simeq 13{,}86\,s \approx 14\,s$

4/ Vitesse instantanée :

• à $t = 3s$: $\begin{cases} v_x\,(t = 3s) = 4t = 4 \times 3 = 12\ m.s^{-1} \\ v_y\,(t = 3s) = 0\ m.s^{-1} \end{cases}$ $\quad v = 12\ m.s^{-1}$

• à $t = 5s$: $\begin{cases} v\,(5s^-) = 4 \times 5 = 20\ m.s^{-1} \\ v(5s^+) = |r\omega_0| = 15\ m.s^{-1} \end{cases}$

• à $t = 6s$: $v(6s) = |r\omega_0| = 15\ m.s^{-1}$

5/ Calculer sa vitesse moyenne entre $t = 3,00$ s et $t = 6,00$ s.

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\overrightarrow{M(t_1)\,M(t_2)}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(6) - \vec{r}(3)}{6 - 3}$$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

- $\vec{r}(3) = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y = \left(2 \times (3)^2 - 2\right)\vec{u}_x + 36\,\vec{u}_y$

$$= 16\,\vec{u}_x + 36\,\vec{u}_y$$

- $\vec{r}(6) = r\cos\theta(6)\,\vec{u}_x + r\sin\theta(6)\,\vec{u}_y$

or $\theta(t) = \omega_0(t-5) + \theta(5) = \omega_0(t-5) + \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$ d'où $\theta(6) = \omega_0(6-5) + \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0{,}39\,\text{rad}$

$$\vec{r}(6) = \begin{vmatrix} x = 60\cos(\theta(6)) \simeq 55{,}4\,\text{m} \\ y = 60\sin(\theta(6)) = 23{,}0\,\text{m} \end{vmatrix} \longrightarrow \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 55{,}4 \\ 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 36 \end{pmatrix}\right)$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} 13{,}13 \\ -4{,}3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|\langle \vec{v} \rangle\| \simeq 12{,}4\,\text{m.s}^{-1}$$

6/ Tracer les graphes de $x(t)$ et $y(t)$.

- $0\,\text{s} \leq t \leq 2\,\text{s}$: $x(t) = 3t$ $y(t) = 18t$
- $2\,\text{s} \leq t \leq 5\,\text{s}$: $x(t) = 2t^2 - 2$ $y(t) = 36$
- $5\,\text{s} \leq t \leq t_f$: $\begin{cases} x(t) = 60\cos\theta(t) \\ y(t) = 60\sin\theta(t) \end{cases}$ avec $\theta(t) = -\frac{1}{4}(t-5) + \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$