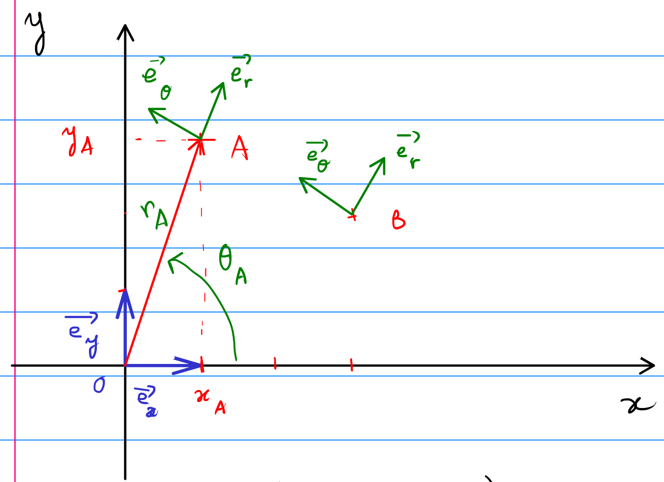
Repérage

Exercice 1 – Repérage dans un plan
A et B sont deux points du plan.

1/ On donne les coordonnées cartésiennes des points $A = (\overset{x_A}{1}, \overset{y_A}{3})$ et $B = (3,2)$. Trouver leurs coordonnées polaires. Donner l'équation de la droite passant par ces points en coordonnées cartésiennes. Écrire cette équation en coordonnées polaires.



• système de coordonnées

↳ cartésiennes : $(O ; (\vec e_x, \vec e_y))$

$A = (x_A, y_A)$

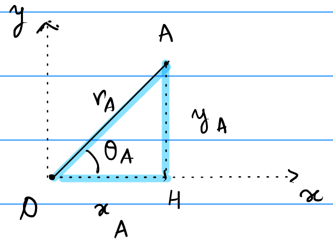
$\vec{OA} = x_A \vec e_x + y_A \vec e_y = \left| \begin{matrix} x_A \\ y_A \end{matrix} \right.$

↳ polaires : $(O, (\vec e_r, \vec e_\theta))$

$A = (r_A, \theta_A)$ $\qquad \vec e_r = \dfrac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$

$\vec{OA} = r_A \vec e_r^{\,(A)}$

avec $r_A = \|\vec{OA}\| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$



triangle OAH

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\theta_A &= \frac{y_A}{r_A} \\ \cos\theta_A &= \frac{x_A}{r_A} \\ \tan\theta_A &= \frac{y_A}{x_A} \end{aligned}}$$

• coordonnées cartésiennes : $\left| \begin{matrix} \vec{OA} = 1\,\vec e_x + 3\vec e_y \\ \vec{OB} = 3\,\vec e_x + 2\,\vec e_y \end{matrix} \right.$

• coordonnées polaires : ↳ $\vec{OA} = r_A \vec e_r$ avec $r_A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\qquad A = (\sqrt{10}, 71{,}5°)$

$\tan\theta_A = \dfrac{y_A}{x_A} = 3$ $\qquad \theta_A = \arctan(3) \simeq 71{,}5°$

↳ $\vec{OB} = r_B \vec e_r$ avec $r_B = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ $\qquad B = (\sqrt{13}, 33{,}7°)$

$\tan\theta_B = \dfrac{2}{3}$ $\qquad \theta_B = \arctan\left(\dfrac{2}{3}\right) \simeq 33{,}7°$

Équation de la droite (AB) :

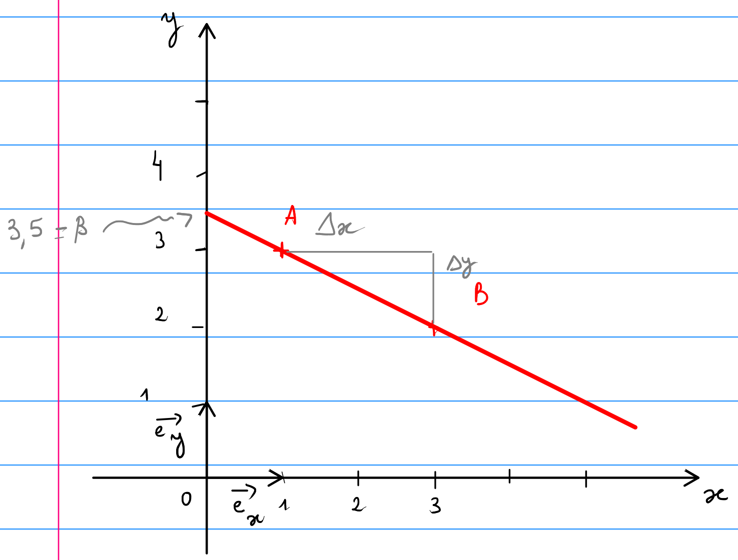
• en coordonnées cartésiennes, l'équation de la droite (AB) s'exprime :

$\boxed{y = \alpha x + \beta}$ $\qquad \alpha = ?$ $\qquad \beta = ?$

coefficient directeur $\qquad$ ordonnées à l'origine pour les points A et B : $\begin{cases} y_A = \alpha x_A + \beta \\ y_B = \alpha x_B + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \alpha\, 1 + \beta & (1) \\ 2 = \alpha\, 3 + \beta & (2) \end{cases}$

$(2) - (1)$: $\quad -1 = \alpha\, 2 + 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{2}} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

avec 1 : $\underline{\beta} = 3 - \alpha = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = \underline{3{,}5}$



$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2}$

$\boxed{y = -\frac{1}{2} x + \frac{7}{2}}$

• en coordonnées polaire :

on cherche la fonction $\underline{r(\theta)}$ sachant que A et B vérifient $\left| \begin{array}{l} r(\theta_A) = r_A \\ r(\theta_B) = r_B \end{array} \right.$

$\underline{y = \alpha x + \beta}$, $\alpha = -1/2$ et $\beta = 7/2$

$r \sin\theta = \alpha (r \cos\theta) + \beta$

$r \left[\sin\theta - \alpha \cos\theta\right] = \beta \Rightarrow r(\theta) = \dfrac{\beta}{\sin\theta - \alpha \cos\theta}$

$\underline{r(\theta)} = \dfrac{7/2}{\sin\theta - \left(-\frac{1}{2}\right)\cos\theta} = \dfrac{7}{2\sin\theta + \cos\theta}$

vérification : $r(\theta_A) = \dfrac{7}{2 \sin(71{,}5) + \cos(71{,}5)} \simeq 3{,}16 \approx \sqrt{10} \simeq r_A$ □

2/ On donne les coordonnées polaires des points $r_A = 4$, $\theta_A = 120^o$ et $r_B = 10$, $\theta_B = 330^o$, trouver leurs coordonnées cartésiennes. Trouver une courbe d'équation $r = a\,\theta + b$ en coordonnées polaires passant par ces points (a et b sont deux nombres à déterminer). Tracer cette courbe.

• $A = (4, 120^\circ) \qquad B = (10, 330^\circ)$

↳ en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x_A = r_A \cos(\theta_A) = 4 \overset{-1/2}{\cos(120°)} = -2 \\ y_A = r_A \sin(\theta_A) = 4 \sin(120°) = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \simeq 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B = r_B \cos(\theta_B) = 10 \overset{\sqrt{3}/2}{\cos(330°)} = 5\sqrt{3} \simeq 8,7 \\ y_B = r_B \sin(\theta_B) = 10 \underbrace{\sin(330°)}_{-1/2} = -5 \end{cases}$$

$A = (4, 120°)$ $B = (10, 330°)$

On cherche une courbe, passant par A et B, d'équation : $r(\theta) = a\theta + b$, $a = ?$ $b = ?$

donc : m/° 1 en °

$r(\theta_A) = r_A = 4 = a\,\theta_A + b = a \times 120° + b$

$10 = a \times 330° + b$ ⇒

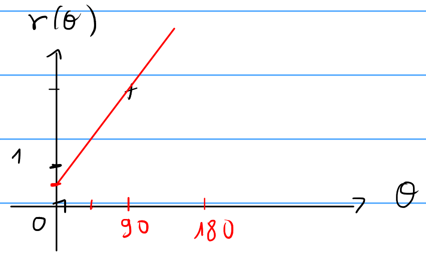
$$\boxed{\begin{cases} 4 = 120°\,a + b & (1) \\ 10 = 330°\,a + b & (2) \end{cases}}$$

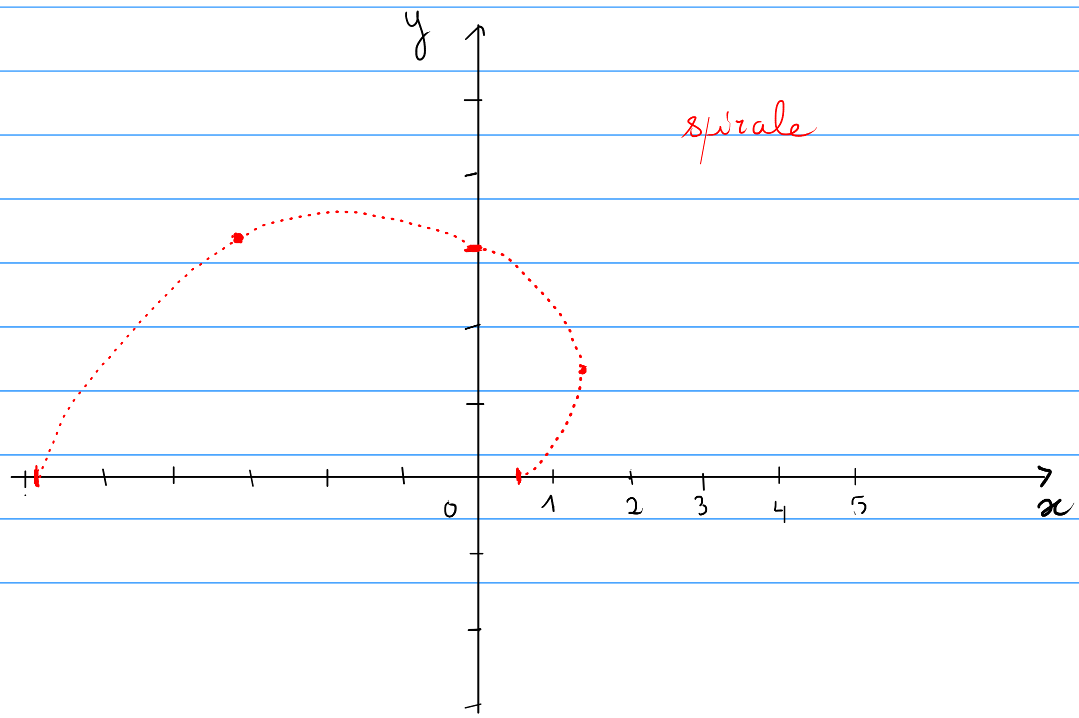
(2) − (1) $6 = 210°\,a$ ⇒ $a = \frac{6}{210°} = \frac{1}{35°}$

$b = 4 - 120 \times \frac{1}{35} = \frac{140 - 120}{35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{\theta°}{35°} + \frac{4}{7}}$$

$\theta°$	0	45°	90°	135°	180°	270°
$r(\theta)$	$\frac{4}{7} \simeq 0,6$	1,9	3,1	4,4	5,7	8,3





Exercice 2 – Représentation de vecteurs dans un plan

Représenter sur un graphique les vecteurs :

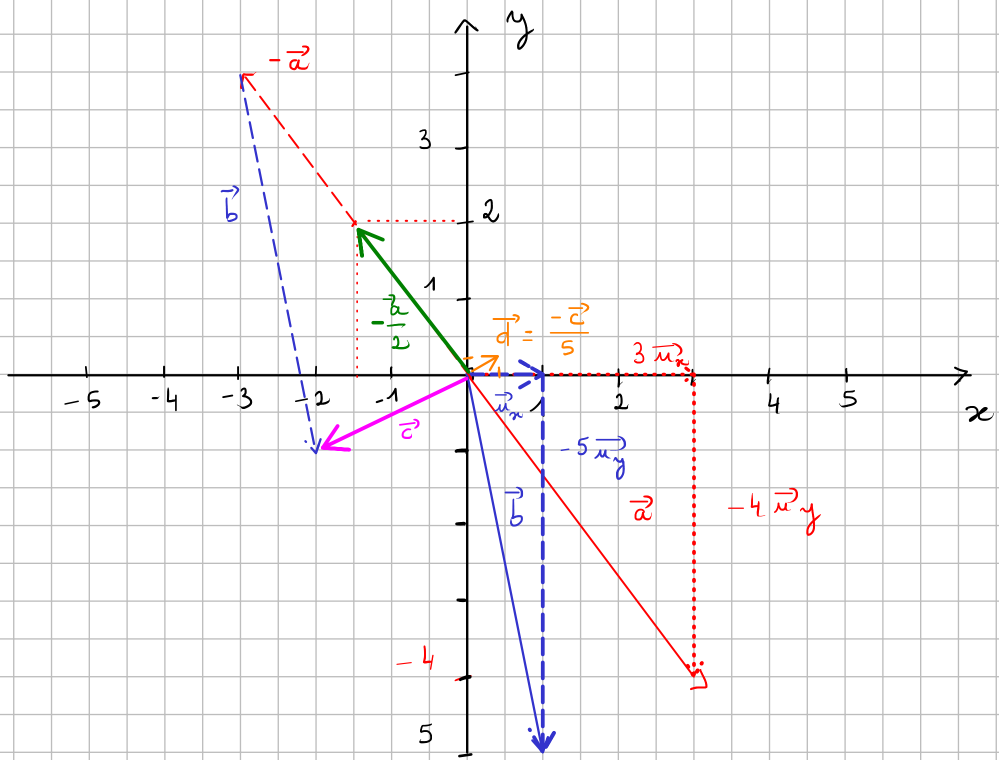
$$\vec{a} = 3\vec{u_x} - 4\vec{u_y},\ \vec{b} = \vec{u_x} - 5\vec{u_y},\ -\frac{1}{2}\vec{a},\ -\vec{a} + \vec{b} \text{ et } \frac{\vec{a} - \vec{b}}{||\vec{a}||}$$

$\vec{OA} = \vec{a} = 3\vec{u_x} - 4\vec{u_y}$

$\vec{OB} = \vec{u_x} - 5\vec{u_y} = \vec{b}$

système de coordonnées cartésiennes :

$(O; (\vec{u_x}, \vec{u_y}))$ 2D



$\vec{a} = 3\vec{u_x} - 4\vec{u_y}$

$\vec{b} = \vec{u_x} - 5\vec{u_y}$

* $-\frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\left(3\vec{u_x} - 4\vec{u_y}\right) = -\frac{3}{2}\vec{u_x} + 2\vec{u_y}$

* $-\vec{a} + \vec{b} = \left(-3\vec{u_x} + 4\vec{u_y}\right) + \left(\vec{u_x} - 5\vec{u_y}\right) = -2\vec{u_x} - \vec{u_y} = \vec{c}$

* $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a}.\vec{a} = x_A^2 + y_A^2 = (3)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{25} = 5$

$\frac{\vec{a} - \vec{b}}{||\vec{a}||} = \frac{2\vec{u_x} + \vec{u_y}}{5} = 0{,}4\,\vec{u_x} + 0{,}2\,\vec{u_y} = \vec{d}$

Addition de vecteurs

Exercice 3 – Petites Questions

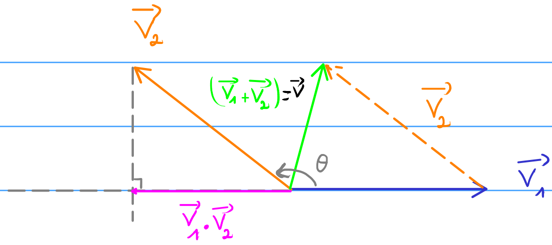
1/ Si $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, $V = ||\vec{V}||$ est-il nécessairement plus grand que $V_1 = ||\vec{V}_1||$ et/ou $V_2 = ||\vec{V}_2||$?

$\|\vec{V}\| > V_1$ et/ou $V_2 \longleftrightarrow \|\vec{V}\|^2 > V_1^2$ et/ou V_2^2

produit scalaire

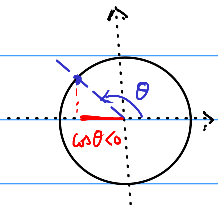
$$V^2 = \|\vec{V}\|^2 = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)\cdot(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{V}_1\cdot\vec{V}_1 + \vec{V}_2\cdot\vec{V}_2 + 2\,\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2$$

$$\hookrightarrow V^2 = \overbrace{V_1^2}^{\geq 0} + \overbrace{V_2^2}^{\geq 0} + \underbrace{2\,\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2}_{<0 \text{ ou } >0} \quad < V_1^2 \text{ et/ou } V_2^2 \text{ si } \vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 < 0$$



angle orienté

$$\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\,\|\vec{V}_2\|\cos\underbrace{\widehat{(\vec{V}_1,\vec{V}_2)}}_{=\theta}$$



ici $\cos\theta < 0$ car $\theta > \frac{\pi}{2}$

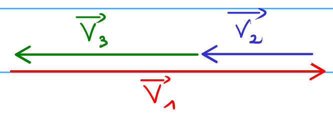
$V < V_1$ ou V_2

2/ La somme de deux vecteurs de normes différentes peut-elle être nulle (ie égale au vecteur nul) ? Est-ce possible avec la somme de trois vecteurs de normes différentes ?

* $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \qquad \|\vec{V}_1\| \neq \|\vec{V}_2\| \longrightarrow \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_1 = -\vec{V}_2$

pas possible si $\|\vec{V}_1\| \neq \|\vec{V}_2\|$

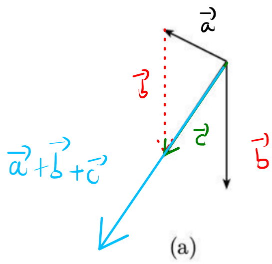
* $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}$ par exemple :



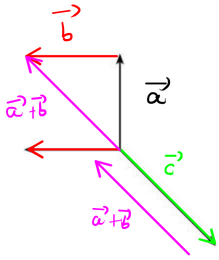
3/ Indiquer si la somme des vecteurs sur les figures suivantes peut avoir une résultante nulle.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$\hookrightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{c} \neq 0$

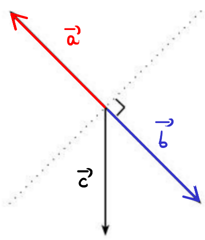


(a)



$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

(b)

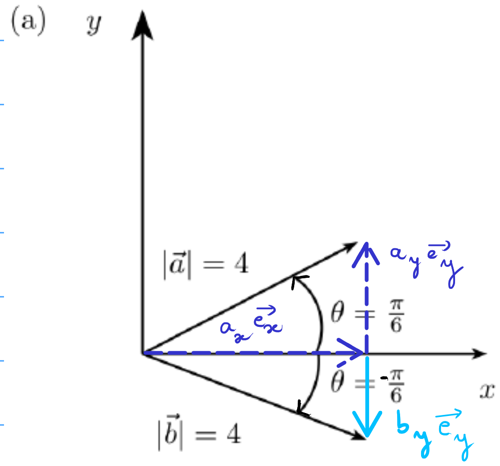


$\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \quad \rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} \neq \vec{0}$

(c)

Produit scalaire

Exercice 5 – Composantes cartésiennes de vecteurs
Trouver les composantes cartésiennes des vecteurs suivants et les indiquer sur le diagramme (la norme des vecteurs est indiquée en unités arbitraires).
Pour le cas (c) projeter les vecteurs sur les axes (x', y') indiqués sur la figure :



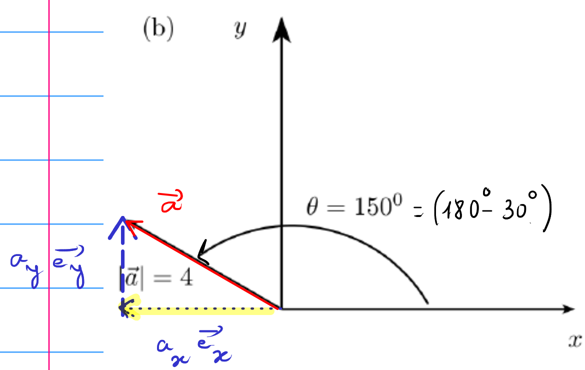
Composantes cartésiennes de :

$* \ \vec{a} = a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y} = \|\vec{a}\| \cos\theta \ \vec{e_x} + \|\vec{a}\| \sin\theta \ \vec{e_y}$

$\boxed{\cos\theta = \frac{a_x}{\|\vec{a}\|}}$, $\boxed{\sin\theta = \frac{a_y}{\|\vec{a}\|}}$ θ : angle orienté

$\hookrightarrow \vec{a} = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e_x} + 4 \times \frac{1}{2} \vec{e_y}$
$= 2\sqrt{3} \vec{e_x} + 2 \vec{e_y}$ $\vec{a} = (2\sqrt{3} ; 2)$

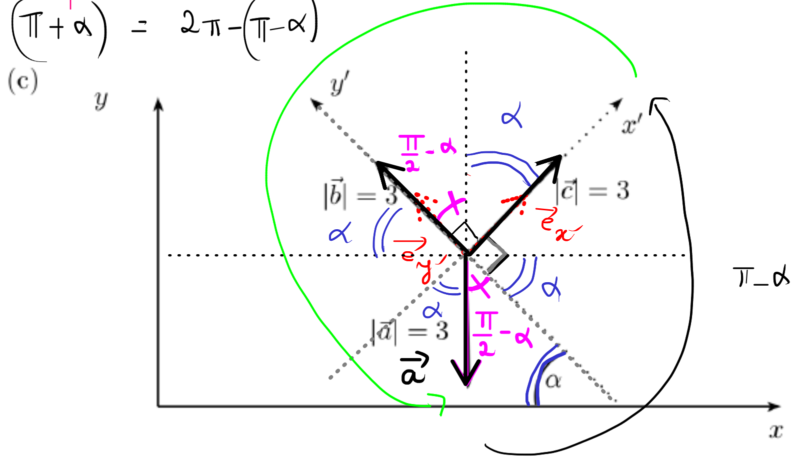
$* \ \vec{b} = 2\sqrt{3} \vec{e_x} - 2 \vec{e_y}$ $\vec{b} = (2\sqrt{3} ; -2)$



$* \ \vec{a} = a_x \vec{e_x} + a_y \vec{e_y} = \underbrace{-2\sqrt{3}}_{\cos(150^\circ)} \vec{e_x} + \underbrace{2}_{\sin(150^\circ)} \vec{e_y}$

$\|\vec{a}\|^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 4 \times 3 + 4 = 16$

$(\pi + \alpha) = 2\pi - (\pi - \alpha)$



$\vec{b} = \|\vec{b}\| \vec{e_{y'}} = 3 \vec{e_{y'}}$

$\vec{c} = 3 \vec{e_{x'}}$

Projection sur les axes (x', y')

$\vec{b} = (0, 3)$ $\vec{c} = (3, 0)$

$\vec{a} = \underbrace{a_{x'}}_{<0} \vec{e_{x'}} + \underbrace{a_{y'}}_{<0} \vec{e_{y'}} = \|\vec{a}\| \cos(\pi + \alpha) \vec{e_{x'}} + \|\vec{a}\| \sin(\pi + \alpha) \vec{e_{y'}}$

$= -3 \left[\cos(\alpha) \vec{e_{x'}} + \sin(\alpha) \vec{e_{y'}} \right]$

Exercice 6 – Produit scalaire

1/ On donne une base quelconque du plan usuel : $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. On appelle (x_1, x_2) les composantes d'un vecteur $\vec{x}$ dans cette base.
Calculez $\vec{x} \cdot \vec{e_1}$ et la norme de $\vec{x}$.

base, orthonormée, direct

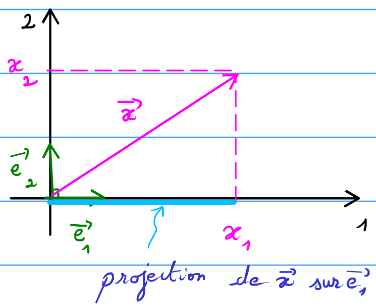
$\hookrightarrow \vec{x} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}$ avec $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ B.O.D

$\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$

$\vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = 1$

• $\vec{x} \cdot \vec{e_1} = (x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}) \cdot \vec{e_1} = (x_1 \underbrace{\vec{e_1} \cdot \vec{e_1}}_{=1} + x_2 \underbrace{\vec{e_2} \cdot \vec{e_1}}_{=0}) = x_1$

projection de $\vec{x}$ sur $\vec{e_1}$ $= x_1$



de même, $\vec{x} \cdot \vec{e_2} = x_2$

• Norme de $\vec{x}$: $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = (x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}) \cdot (x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2})$

$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 \overbrace{\vec{e_1} \cdot \vec{e_1}}^{=1} + x_2^2 \overbrace{\vec{e_2} \cdot \vec{e_2}}^{=1} + x_1 x_2 \overbrace{\vec{e_1} \cdot \vec{e_2}}^{=0} + x_2 x_1 \overbrace{\vec{e_2} \cdot \vec{e_1}}^{=0} = x_1^2 + x_2^2$

$\Rightarrow \boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$

2/ Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ceci implique-t-il que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires ? Et la réciproque ?

$(\vec{a}, \vec{b}$ non nuls$)$

• par définition, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0 \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \pm \frac{\pi}{2} \longrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

• $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$ (modulo π)

$\hookrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

$= \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

3/ Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ceci implique-t-il que $\vec{b} = \vec{c}$? Et la réciproque ?

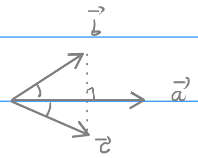
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ non nuls$)$

• $\underline{\vec a . \vec b = \vec a . \vec c} \not\Rightarrow \underline{\vec b = \vec c}$

$$\cancel{\|\vec a\|}\, \|\vec b\| \cos(\widehat{\vec a , \vec b}) = \cancel{\|\vec a\|}\, \|\vec c\| \cos(\widehat{\vec a , \vec c})$$

$$\|\vec b\| \cos(\widehat{\vec a , \vec b}) = \|\vec c\| \cos(\widehat{\vec a , \vec c}) \not\Rightarrow \vec b = \vec c \quad \underline{\text{non}}$$

<u>exemple</u> :



car $\cos(-x) = \cos(x)$

• $\vec b = \vec c \Rightarrow \vec a . \vec b = \vec c . \vec a$ $\quad (\ldots).\vec a$ $\quad \underline{\text{oui}}$

4/ En utilisant la définition du produit scalaire de deux vecteurs, calculer les produits scalaires des vecteurs de base des repères cartésien et ~~polaire~~. cylindrique

B.O.D $\longrightarrow$
$$\left| \begin{array}{l} \|\vec e_x\| = \|\vec e_y\| = \|\vec e_z\| = 1 \\ \vec e_x . \vec e_y = \vec e_x . \vec e_z = \vec e_y . \vec e_z = 0 \end{array} \right.$$
"normé"
"ortho"

$\longrightarrow$
$$\left| \begin{array}{l} \|\vec e_r\| = \|\vec e_\theta\| = \|\vec e_z\| = 1 \\ \vec e_r . \vec e_\theta = \vec e_r . \vec e_z = \vec e_\theta . \vec e_z = 0 \end{array} \right.$$

5/ En utilisant la propriété de distributivité du produit scalaire sur l'addition, montrer que : si $\vec a = a_x \vec u_x + a_y \vec u_y + a_z \vec u_z$ et $\vec b = b_x \vec u_x + b_y \vec u_y + b_z \vec u_z$, alors : $\vec a . \vec b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. En déduire l'expression de $a = ||\vec a||$ (on rappelle que $||\vec a||^2 = \vec a . \vec a$).

$\vec u_x . \vec u_x = 1$ $\quad$ $=0$

$$\vec a . \vec b = (a_x \vec u_x + a_y \vec u_y + a_z \vec u_z) . (b_x \vec u_x + b_y \vec u_y + b_z \vec u_z) = a_x b_x \times 1 + a_y b_y \times 1 + a_z b_z \times 1 + 0$$

$\vec u_x . \vec u_y = 0$ $\quad$ $=0$

$$\underline{\vec a . \vec b} = \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. \cdot \left| \begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array} \right. = \underline{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\|\vec a\| = \sqrt{\vec a . \vec a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

6/ Trouver l'angle formé par les vecteurs : $\vec a = 3\vec u_x + 2\vec u_y - \vec u_z$ et $\vec b = -\vec u_x + 2\vec u_z$.

$$\vec a . \vec b = \|\vec a\| \|\vec b\| \cos(\widehat{\vec a , \vec b}) \quad , \quad \theta = (\widehat{\vec a , \vec b})$$

↳ $\|\vec a\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

↳ $\|\vec b\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$

$\vec{a} = 3\vec{u_x} + 2\vec{u_y} - \vec{u_z}$ et $\vec{b} = -\vec{u_x} + 2\vec{u_z}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underbrace{\sqrt{14}\times\sqrt{5}}_{\sqrt{70}}\cos(\theta) = 3\times(-1) + 2\times 0 + (-1)\times 2 = -5$$

$$\sqrt{70}\cos\theta = -5 \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{70}} \quad \rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{70}}\right) \simeq 126{,}7^\circ$$

$$\bullet\ \vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{array}{|c|c|} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{array} = \begin{array}{|l} \bullet\ 2\times 2 - (-1)\times 0 = 4 \\ \bullet\ (-1)\times(-1) - 3\times 2 = 1-6 = -5 \\ \bullet\ 3\times 0 - 2\times(-1) = 2 \end{array}$$

Exercice 4 – En force

O_1 et O_2 sont deux points de l'espace. Un point matériel M du plan subit deux forces : $\vec{F_1} = -k\,\vec{r_1}$ due à O_1 et $\vec{F_2} = k\,\vec{r_2}$ due à O_2 (k est une constante et les vecteurs positions $\vec{r_i} = \overrightarrow{O_iM}$ repèrent M par rapport à chacun des deux points O_1 et O_2).

1/ Calculer la force totale $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ subie par M.

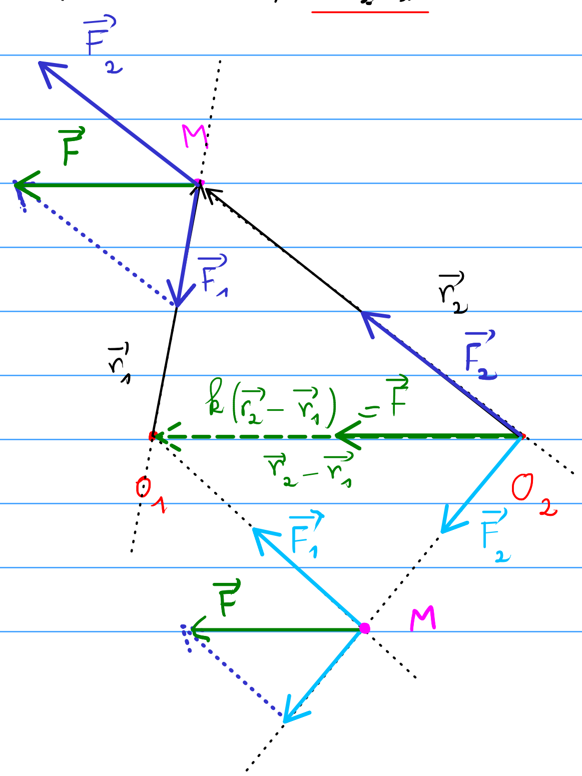
2/ Faire un schéma pour plusieurs positions du point M.

$$1/\ \begin{cases} \vec{r_1} = \overrightarrow{O_1M} \\ \vec{r_2} = \overrightarrow{O_2M} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \vec{F_1} = -k\vec{r_1} \\ \vec{F_2} = +k\vec{r_2} \end{array}$$

Force totale subie par M : $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = -k\,\vec{r_1} + k\,\vec{r_2}$

$$= k(\vec{r_2} - \vec{r_1}) = k\left(\overrightarrow{O_2M} - \overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\hookrightarrow \vec{F} = k\left(\overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{MO_1}\right) = k\,\overrightarrow{O_2O_1}$$



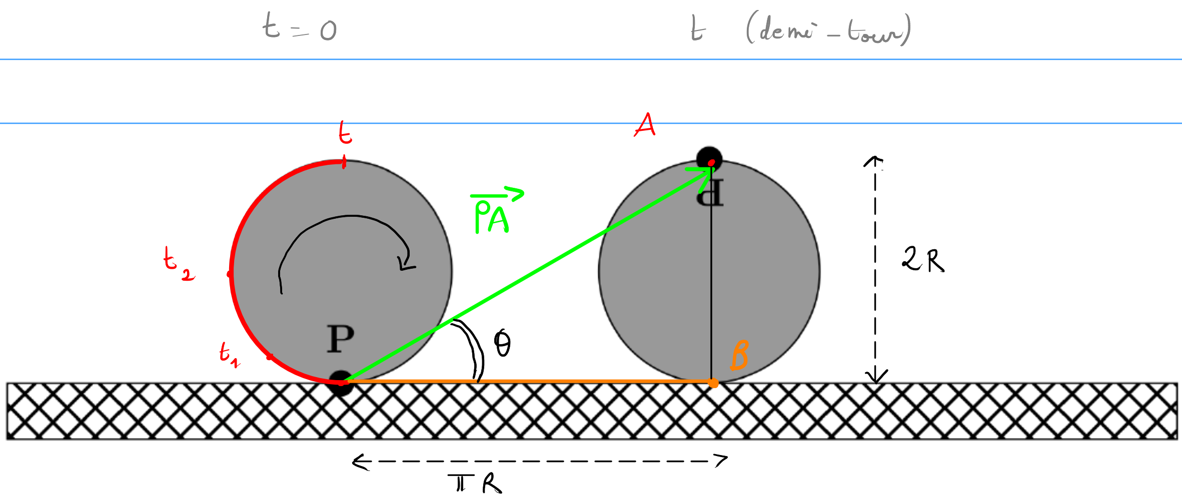
$k = \frac{1}{2}$

Exercice 9 – Et pour terminer *

Une roue d'un rayon de $R = 45\,\text{cm}$ roule sans glissement d'un demi-tour. On repère le point de contact avec le sol à $t = 0$ avec la lettre **P**.

1/ Trouver la norme du vecteur déplacement du point **P** lors de ce déplacement.

2/ Trouver l'angle par rapport au sol du vecteur déplacement du point **P** lors de ce déplacement.



1/ Vecteur déplacement du point : entre le point P et le point d'arrivée A

• Quand P va du sol au sommet A, la roue a parcouru la distance PB :

$$PB = \frac{1}{2}\text{ périmètre} = \frac{1}{2}(2\pi R) = \pi R$$

• triangle PAB rectangle en B :

$$(PB)^2 + (AB)^2 = (PA)^2$$

$R = 45\,\text{cm}$

$$\|\vec{PA}\| = \sqrt{(PB)^2 + (AB)^2} = \sqrt{(\pi R)^2 + (2R)^2} = R\sqrt{\pi^2 + 4} \simeq 167{,}6\,\text{cm}$$

2/ Angle θ :

$$\tan\theta = \frac{AB}{PB} = \frac{2R}{\pi R} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\left(\frac{2}{\pi}\right)} \simeq 32{,}5°$$