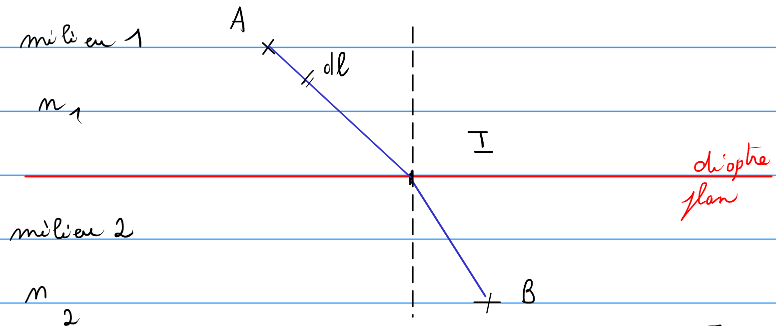
5 | Optique géométrique

Dioptres plans et sphériques

Exercice 1 – Lois de Descartes

Deux milieux transparents homogènes et isotropes (mthi) d'indices respectifs n_1 et n_2 sont séparés par un dioptre plan. On appelle A un point dans le milieu 1, B un point dans le milieu 2 et I un point sur le dioptre.

1/ Exprimer le chemin optique L de A à B passant par I.

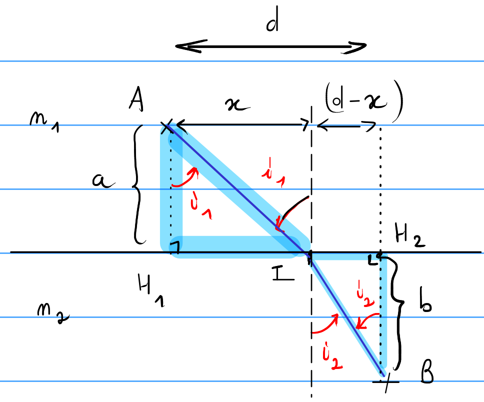


chemin optique $L = \int_A^B n(M)\, dl = \int_A^I \underbrace{n}_{= n_1} dl + \int_I^B \underbrace{n}_{n_2} dl$ chemin passant par I

$L = \int_A^I n_1\, dl + \int_I^B n_2\, dl = n_1 \underbrace{\int_A^I dl}_{\text{distance de A à I} = AI} + n_2 \underbrace{\int_I^B dl}_{IB}$

n_1 constant

2/ A et B étant donnés, montrer que L est extrémal lorsque I est tel que la loi de la réfraction est vérifiée.



triangle AH_1I : $AI^2 = AH_1^2 + H_1I^2$

$AI^2 = a^2 + x^2$

triangle BH_2I : $IB^2 = IH_2^2 + H_2B^2$

$IB^2 = (d-x)^2 + b^2$

chemin optique

$L = n_1 AI + n_2 IB = n_1 \sqrt{\underbrace{a^2 + x^2}_{u(x)}} + n_2 \sqrt{(d-x)^2 + b^2}$

L extrémal si $\left(\dfrac{dL}{dx}\right) = 0$

$$\left(\left[v(x)\right]^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\, v'(x)\, \left[v(x)\right]^{1/2-1} = \frac{1}{2}\, v'(x)\, \left[v(x)\right]^{-1/2}$$

$$L = n_1\sqrt{a^2+x^2} + n_2\sqrt{\underbrace{(d-x)^2}_{d^2-2dx+x^2}+b^2} \Rightarrow \left(\frac{dL}{dx}\right) = 0 = n_1 \frac{\overset{H_1I}{2x}}{\underset{AI}{\sqrt{a^2+x^2}}} - n_2 \frac{\overset{IH_2}{2(d-x)}}{\underset{IB}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}}$$

or $\sin i_1 = \dfrac{H_1I}{AI}$ et $\sin i_2 = \dfrac{IH_2}{IB}$

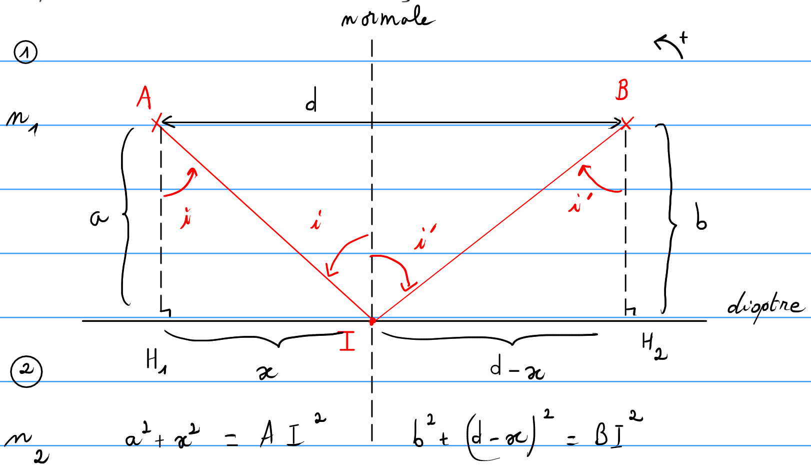
$$\underbrace{\left(\frac{dL}{dx}\right) = 0}_{L \text{ extréma}} = 2\left[n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2\right] \Longleftrightarrow n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

2^e loi de Descartes

3/ Sur quel principe d'optique s'appuie-t-on pour affirmer que L est extrémal ?

Principe de Fermat (L extremum)

4/ Établir de la même façon la loi de la réflexion.



$\sin i = \dfrac{H_1I}{AI}$, $\sin i' = \dfrac{H_2I}{BI}$

$$L = n_1\, AI + n_1\, IB$$
$$= n_1\sqrt{a^2+x^2} + n_1\sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) = 0 = n_1 \frac{\overset{H_1I}{2x}}{\underset{AI}{\sqrt{a^2+x^2}}} - n_1 \frac{\overset{H_2I}{2(d-x)}}{\underset{BI}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}}$$

$\rightarrow \dfrac{H_1I}{AI} = \dfrac{H_2I}{BI} \Leftrightarrow \underline{\sin i = \sin i'}$ soit $\underline{|i| = |i'|}$ $1^{ère}$ loi de Descartes

angles non orientés

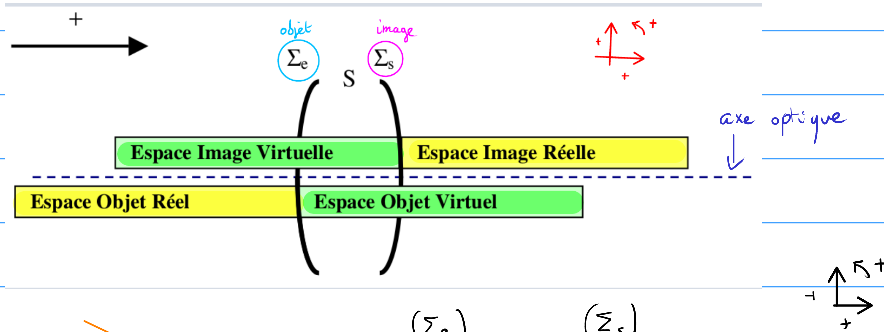
Exercice 2 – Espace objet et espace image

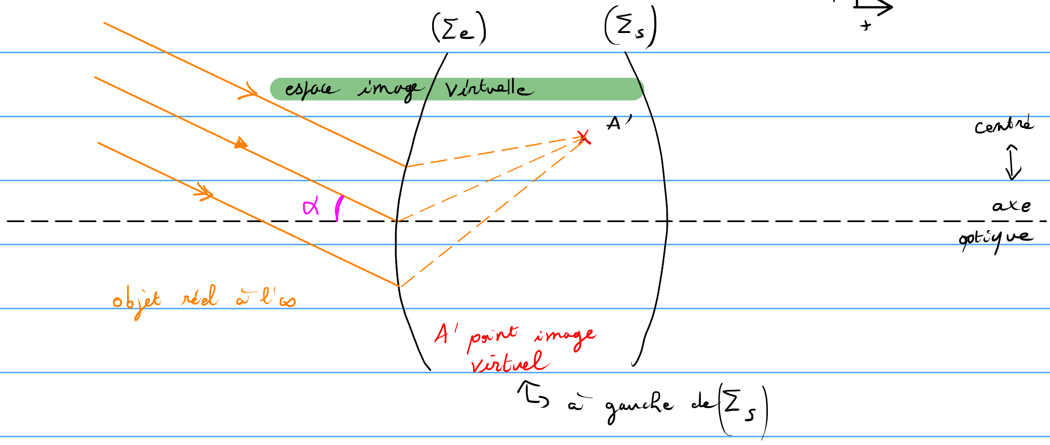
Construire quelques rayons lumineux traversant un système optique centré avec

1/ un objet à l'infini dans la direction α et un point image virtuel, A'

ensemble de rayons parallèles

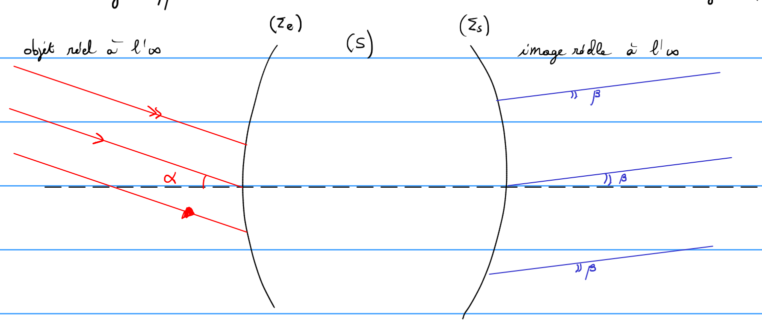
par rapport à l'axe optique



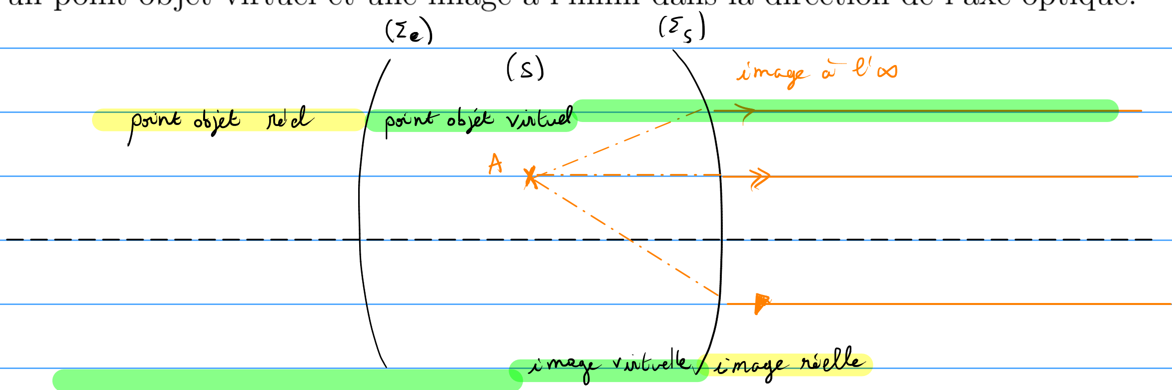


2/ un objet à l'infini dans la direction α et une image à l'infini dans la direction β,

↳ rayons //   ↳ rayons //



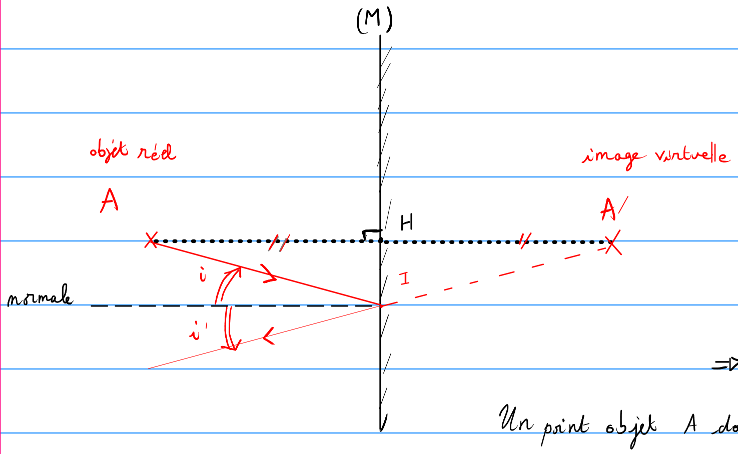
3/ un point objet virtuel et une image à l'infini dans la direction de l'axe optique.



Exercice 3 – Stigmatisme

1/ Montrer que le miroir plan est stigmatique pour tous les points de l'espace.

rigoureusement



1ère loi de Descartes

$i = -i'$

relation de conjugaison :

$\forall i$ $\boxed{\overline{HA} = -\overline{HA'}}$

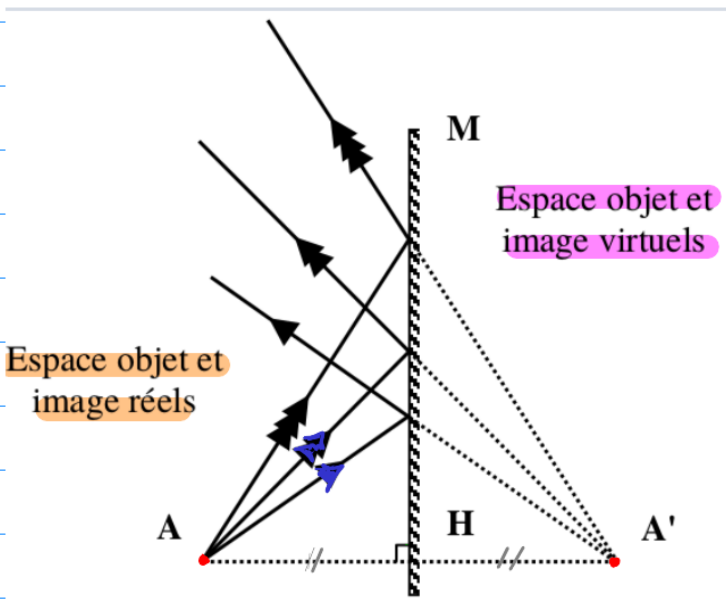
⇒ stigmatisme rigoureux

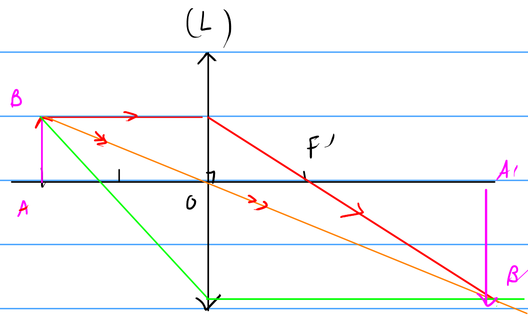
Un point objet A donne à travers le miroir M un point image A', symétrique de A par rapport au miroir plan.

2/ Le point image d'un point objet réel est-il réel ou virtuel ?

miroir : objet réel ⟶ image virtuelle

lentille : objet réel ⟶ image réelle





3/ L'image d'un objet (étendu) lui est-elle superposable ?

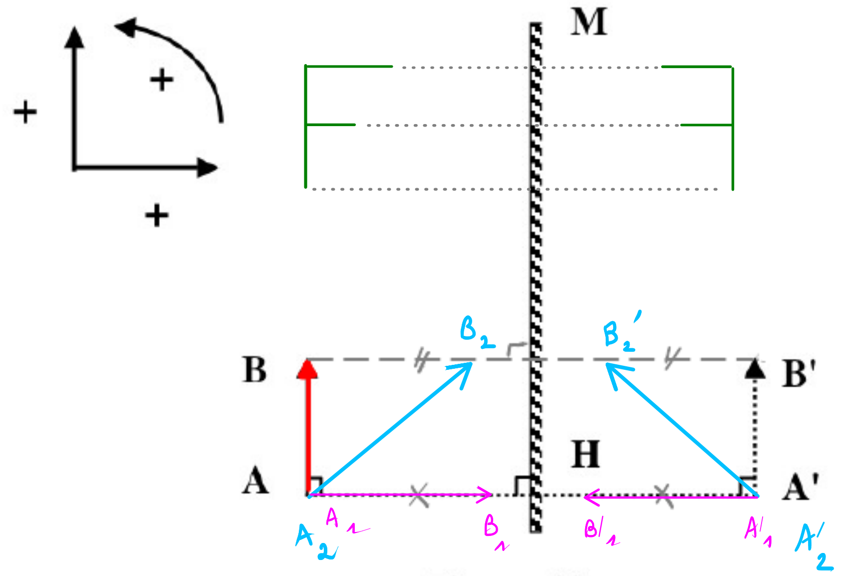


Figure 12

L'image de F est non superposable à l'objet F.

grandissement :

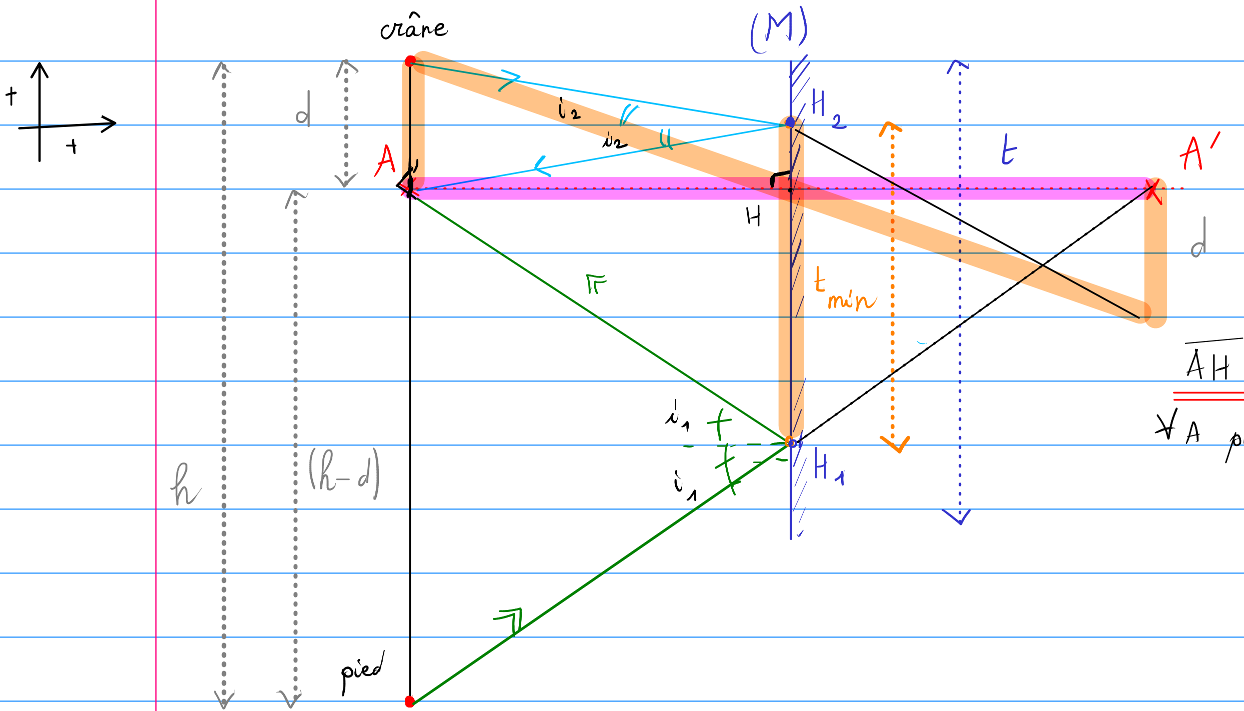
transverse $\gamma_t = 1$

axial $\gamma_a = -1$

Exercice 4 –

Une personne de hauteur h, dont les yeux se trouvent à une distance d au dessous du sommet du crâne, désire se voir entièrement dans un miroir plan.

1/ Faire un schéma avec les rayons nécessaires.



t : taille du miroir

stigmatisme rigoureux

$\overline{AH} = -\overline{A'H}$ (*)

$\forall A$ point objet.

2/ Quelle est la taille minimale du miroir dans le sens de la hauteur ?

t_{min} = taille minimale

① crâne   Théorème de Thalès : $\dfrac{|\overline{AA'}|}{|\overline{AH}|} = 2 = \dfrac{d}{t_{min}} \longrightarrow t_{min} = \dfrac{d}{2}$

② pied : $2 = \dfrac{(h-d)}{t_{min}} \longrightarrow t_{min} = \dfrac{(h-d)}{2} \rightarrow h-d \gg d \Rightarrow \boxed{t_{min} = \dfrac{d}{2}}\ \forall A$

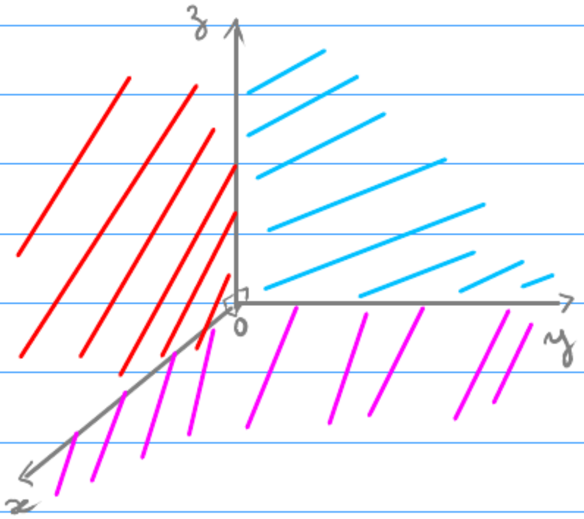
3/ Comment la personne doit-elle poser son miroir ? A quelle distance doit-elle le placer ?

Le miroir doit être droit (⊥ au sol), placé n'importe où.

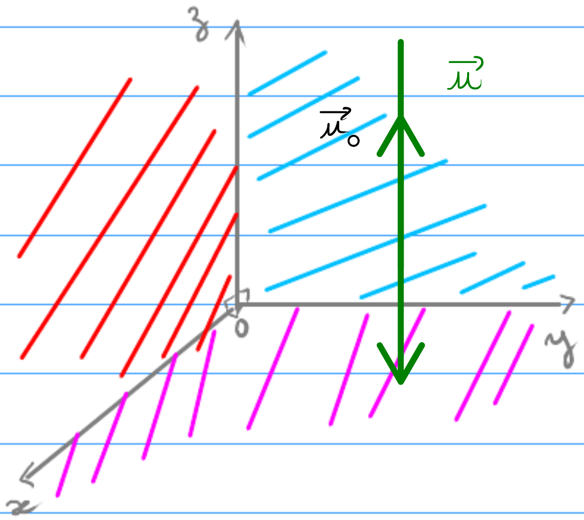
Exercice 5 –

Un catadioptre est constitué de trois miroirs plans perpendiculaires deux à deux (plans (Oxy) , (Oyz) et (Ozx) , par exemple).

Déterminer les directions des rayons réfléchis successifs et caractériser la direction du rayon émergent du catadioptre (rayon qui a donc subi au plus trois réflexions).



1/ Si le rayon incident arrive sur le miroir (Oxy) parallèlement à la direction (Oz).



↳ rayon incident ⊥ au miroir (Oxy)

$(i = 0) \Rightarrow$ incidence normale

rayon émergent selon (Oz)

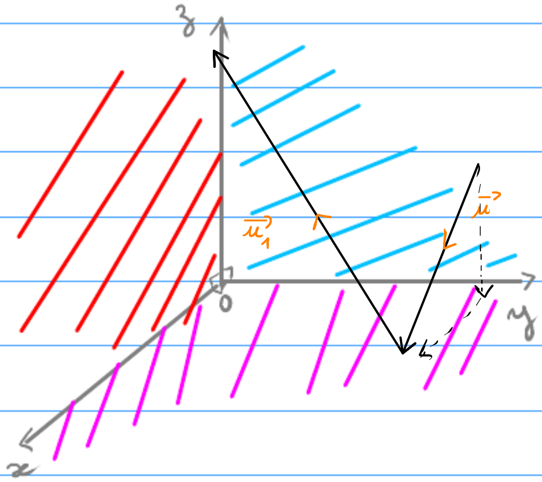
$\vec{u} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$

$a = b = 0$

réflexion $\Leftrightarrow$ composante en z inversée

$\vec{u}_0 = -c\vec{e}_z$, $\vec{e}_z$ normale au miroir

2/ Si le rayon incident arrive sur le miroir (Oxy) parallèlement au plan (Ozx).



Le rayon incident $\vec{u}$ s'écrit :

$\underline{\vec{u}} = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y + c\,\vec{e}_z \qquad (b=0)$

. $\underline{1^{ère} \text{ réflexion sur } (Oxy)}$:

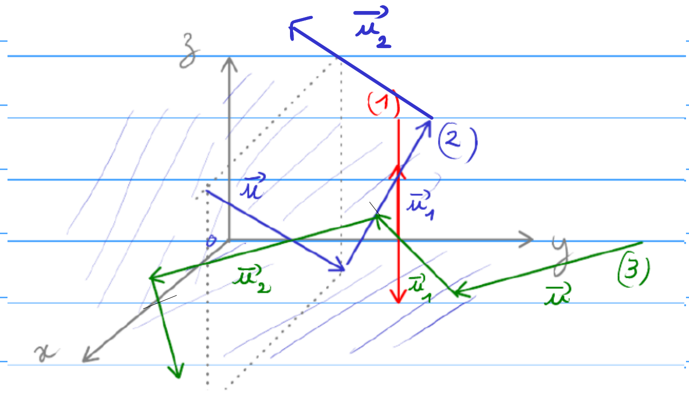
$\underline{\vec{u}_1} = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y - c\,\vec{e}_z \qquad (b=0)$

la composante en $\underline{z}$ est $\underline{\text{inversée}}$ et les composantes en x et y sont conservées.

. $\underline{2^{ème} \text{ réflexion sur } (Oyz)}$:

seule la composante en x est inversée : $\underline{\vec{u}_2} = -a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y - c\,\vec{e}_z \qquad (b=0)$

$= -(a\,\vec{e}_x + c\,\vec{e}_z) = \underline{-\vec{u}}$



3/ * Si le rayon incident arrive sur le miroir (Oxy) sous une incidence quelconque.

a, b, c quelconques

normale au plan

$\vec{u} = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y + c\,\vec{e}_z \xrightarrow[\text{sur}(Oxy)]{\text{réflexion}} \vec{u}_1 = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y - c\,\vec{e}_z$

$\downarrow (Oyz)$

$\underline{\vec{u}_3} = -a\,\vec{e}_x - b\,\vec{e}_y - c\,\vec{e}_z = \underline{-\vec{u}} \xleftarrow[(Oxz)]{} \vec{u}_2 = -a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y - c\,\vec{e}_z$

4/ Quel vous semble pouvoir être l'intérêt d'un tel dispositif ?

L'intérêt de ce système est que le rayon réfléchi repart dans la direction opposée

Lentilles

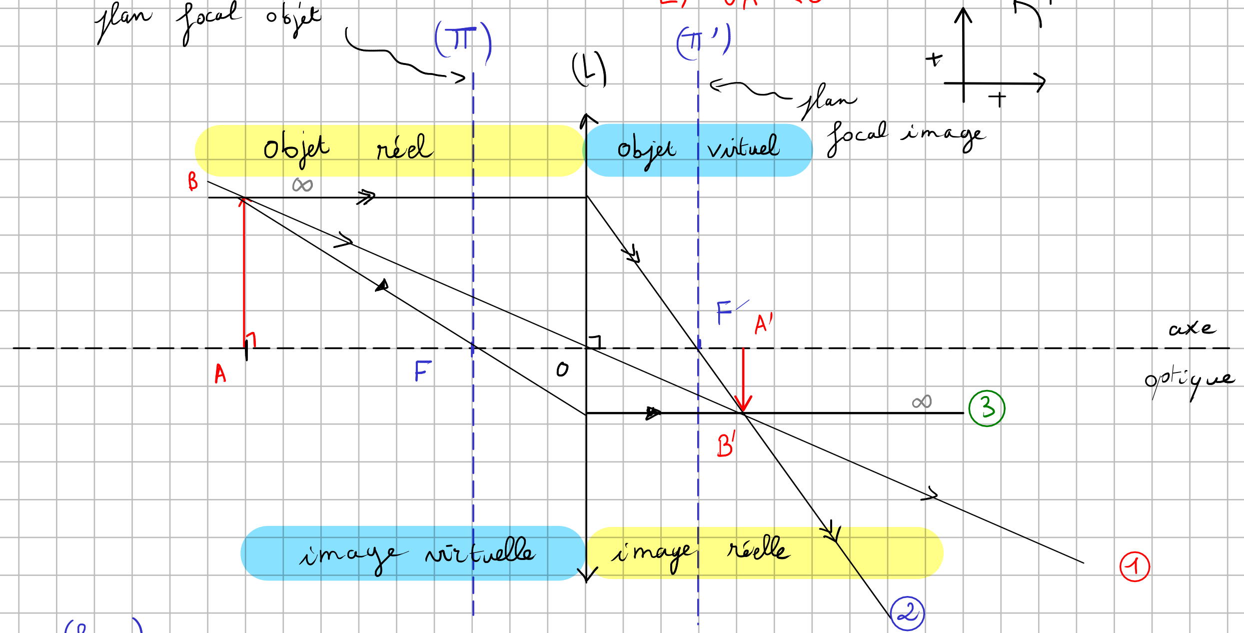
Exercice 6 – Lentilles minces

On considère des lentilles minces utilisées dans les conditions de Gauss pour construire des images.

1/ Pour une lentille convergente lorsque l'objet est (i) réel, (ii) virtuel, les images obtenues sont-elles réelles ou virtuelles ?

1/ i) lentille (L) convergente et objet réel
↳ $\overline{OA} < 0$

plan focal objet



- points focaux (foyer) F et F' : $f' = \overline{OF'} = -\overline{OF}$ et pour une lentille convergente : $\overline{OF'} > 0$
- O : centre optique
- exemple : $\overline{OF'} = -\overline{OF} = 3$ cm avec échelle : 1 carreau ⟷ 1 cm

  $\overline{OA} = -9$ cm objet réel
- construction :

  $AB \xrightarrow{(L)} A'B'$, B' ? A' ?

① rayon qui passe par O, le centre optique, n'est pas dévié.

② Tout rayon, // à l'axe optique, venant de l'∞ (objet réel) sort de la lentille en passant par F'.

③ un rayon passant par F ressort parallèle à l'axe optique

$\boxed{\infty \longrightarrow F'}$
rayon // à l'axe optique

$\boxed{F \longrightarrow \infty}$
rayon // à l'axe optique

L'image est réelle ($\overline{OA'} > 0$), renversée ($\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} < 0$) et plus petite ($|\gamma| < 1$)

. $\overline{OA'}$? Formules de conjugaison

$*$ $\boxed{-\dfrac{1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}}$ avec $\overline{OA} = -9$ cm , $\overline{OF'} = +3$ cm

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{-9} = \frac{3-1}{9} = \frac{2}{9}$$

donc

$\overline{OA'} = \frac{9}{2} \simeq 4,5$ cm image réelle $(\overline{OA'} > 0)$

$*$ grandissement : par définition, $\gamma \hat{=} \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \overset{\text{Thalès}}{=} \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

$\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{4,5}{-9} = -\dfrac{1}{2}$ image renversée et plus petite $(|\gamma| < 1)$

ii)

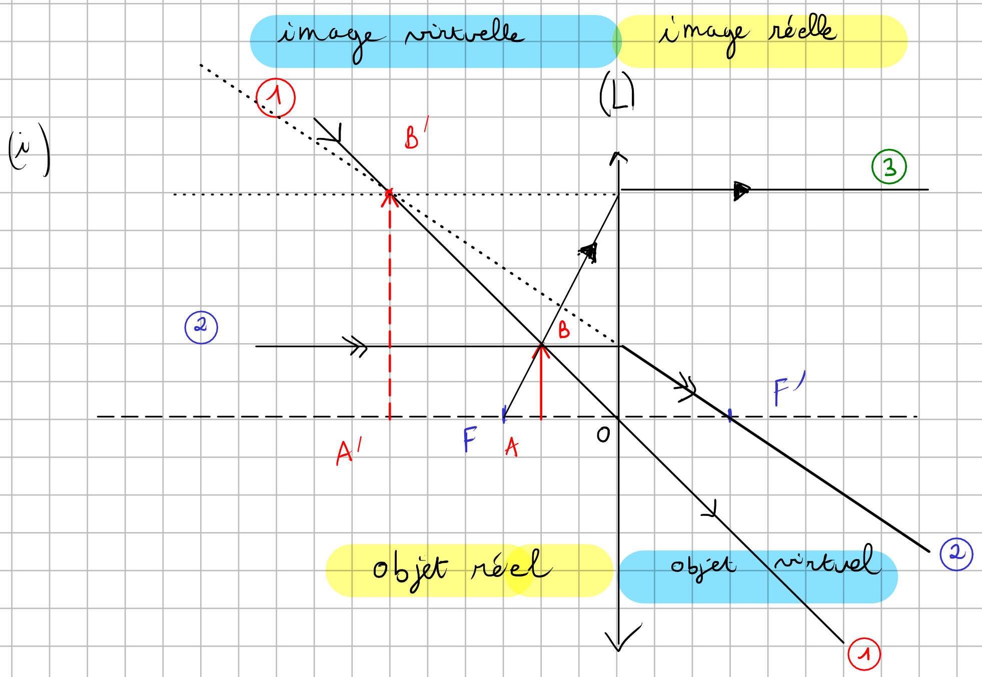


image virtuelle $(\overline{OA'} < 0)$
droite $(\gamma > 0)$ et
plus grande $(\gamma > 1)$

$\overline{OA} = -2$ cm

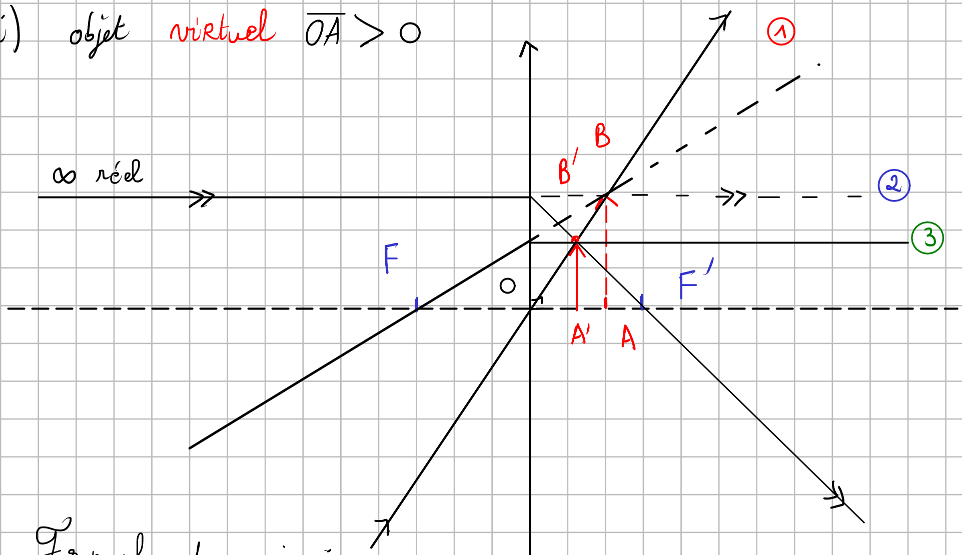
$\overline{OF'} = +3$ cm

$*$ $-\dfrac{1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}} \Rightarrow \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}} + \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{-2} = \dfrac{2-3}{6} = -\dfrac{1}{6}$

donc $\overline{OA'} = -6$ cm image virtuelle

$*$ $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{-6}{-2} = +3$ image droite et 3 fois plus grande que l'objet

(ii) objet virtuel $\overline{OA} > 0$



$f' = \overline{OF'} = 3$ cm

$\overline{OA} = +2$ cm et $\overline{AB} = +3$ cm

- - : virtuel

L'image A'B' est réelle ($\overline{OA'} > 0$), droite ($\gamma > 0$) et plus petite ($\gamma < 1$)

* Formule de conjugaison :

↳ $\boxed{-\dfrac{1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}}} \Rightarrow \dfrac{1}{\overline{OA'}} = \dfrac{1}{\overline{OF'}} + \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow \overline{OA'} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2 \text{ cm} > 0$

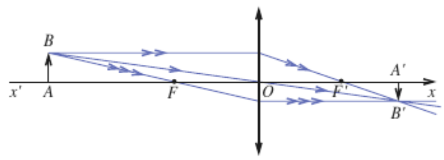
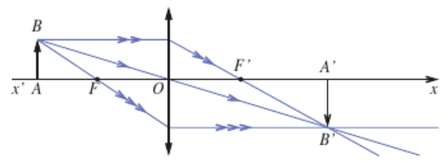
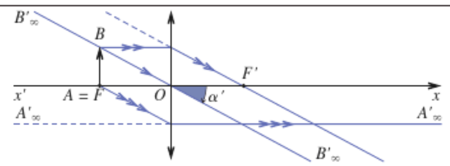
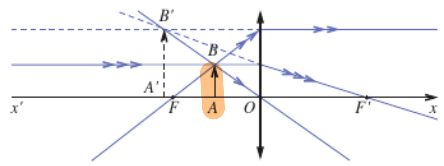
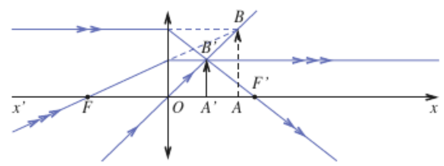
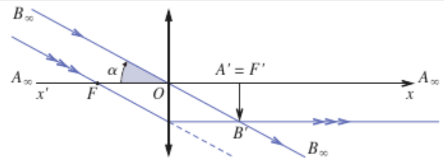
image réelle

* Grandissement : ↳ $\gamma \hat{=} \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{1{,}2}{2} = +0{,}6 < 1$

Thalès

image droite plus petite

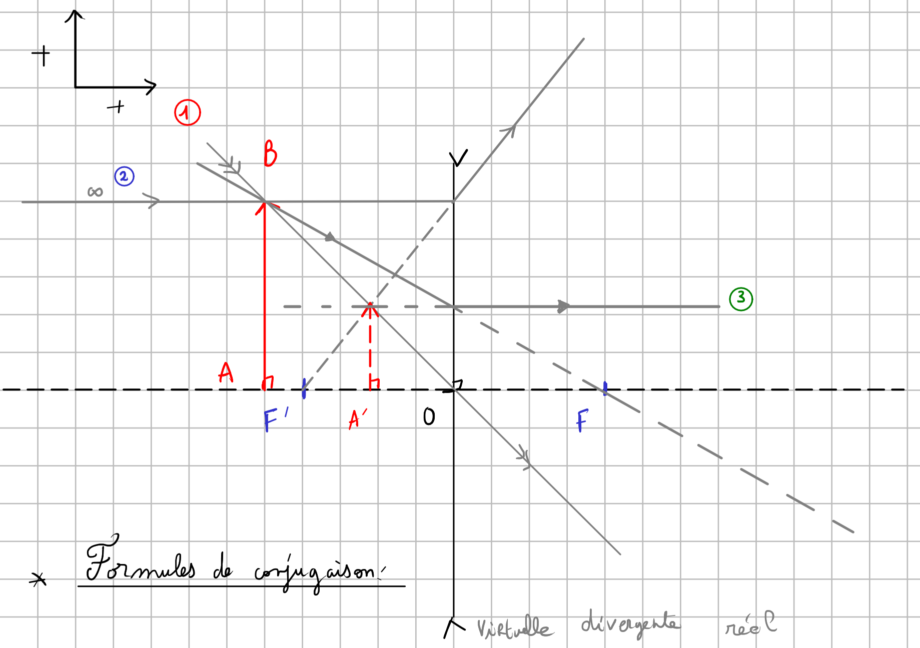
2/ En déduire les conditions dans lesquelles une lentille convergente donne une image (i) plus grande que l'objet, (ii) virtuelle, (iii) non renversée, (iv) de grandissement +1 ou -1.

objet	image	construction
réel $-\infty < \overline{OA} < 2f$ $\gamma = -1$	réelle $-1 < \gamma < 0$ renversée et plus petite	
réel $2f < \overline{OA} < f$	réelle $-\infty < \gamma < -1$ renversée et agrandie	
réel dans le plan focal objet $\overline{OA} = f$	à l'infini $\alpha' = \dfrac{\overline{AB}}{f} = -\dfrac{\overline{AB}}{f'}$	
réel entre le plan focal objet et la lentille $f < \overline{OA} < 0$ $\gamma = 1$	virtuelle $1 < \gamma < \infty$ de même sens et agrandie	
virtuel $0 < \overline{OA} < \infty$	réelle $0 < \gamma < 1$ de même sens et plus petite	
à l'infini, réel ou virtuel $\overline{OA} = \infty$	réelle dans le plan focal image $A' = F'$ $\overline{A'B'} = \alpha f'$	

3/ Reprendre les mêmes questions pour une lentille divergente.

(i) objet réel $\overline{OA} < 0$ et lentille divergente $\Rightarrow$ F et F′ virtuels

$\overline{OA} = -5\,cm$
$\overline{AB} = +5\,cm$
$\overline{OF'} = -4\,cm < 0$



∞	$\longrightarrow$	F′
rayon // à l'axe		
F	$\longrightarrow$	∞
		rayon // à l'axe

* Formules de conjugaison :

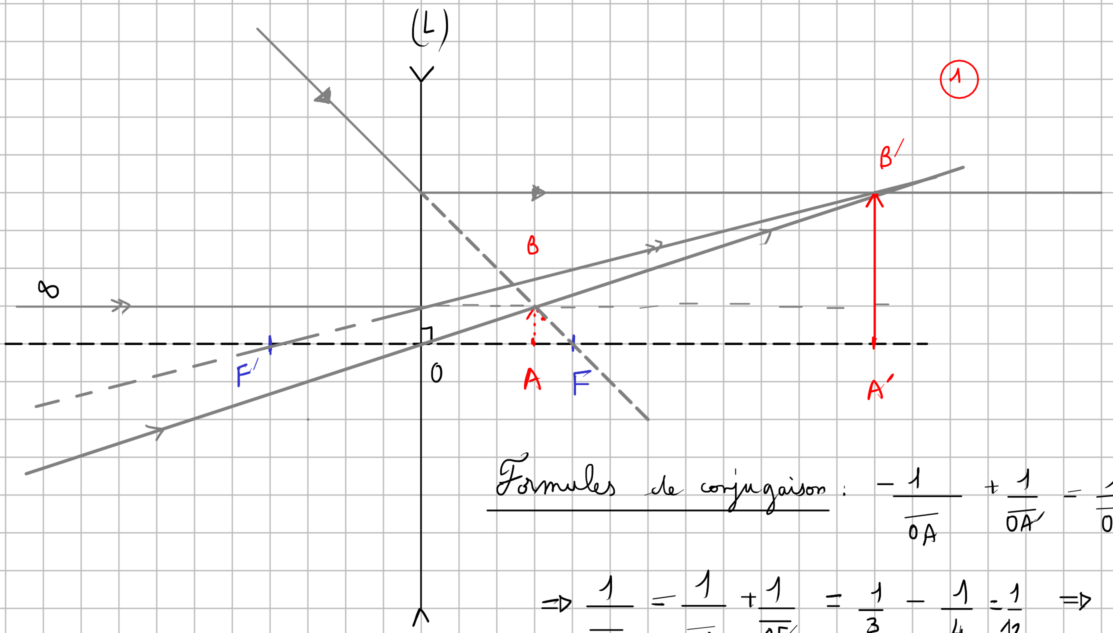
virtuelle divergente réel

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \Rightarrow \underset{<0}{\frac{1}{\overline{OA'}}} = \underset{<0}{\frac{1}{\overline{OF'}}} + \underset{<0}{\frac{1}{\overline{OA}}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{-9}{20} \Longrightarrow \overline{OA'} = \frac{-20}{9} = \underline{-2{,}22\,cm} < 0$$

image virtuelle, droite et plus petite

* Grandissement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{-20/9}{-5} = +\frac{4}{9} \simeq 0{,}44 < 1$

ii) objet virtuel : $\overline{OA} = +3\,cm$, $\overline{AB} = +1\,cm$, $\overline{OF'} = -4\,cm < 0$



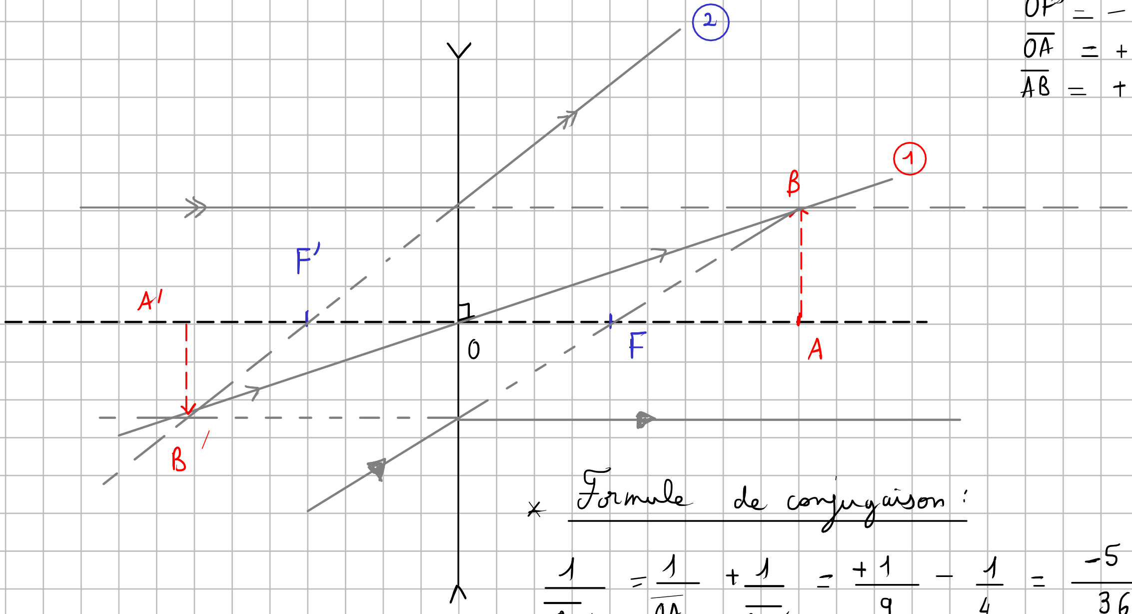
Formules de conjugaison : $-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow \underline{\overline{OA'} = +12\,cm}$$

* Grandissement :

$\underline{\gamma} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{12}{3} = \underline{+4\,cm}$ image droite et agrandie

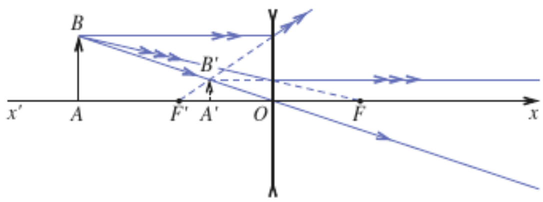
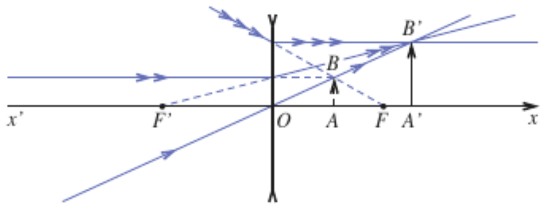
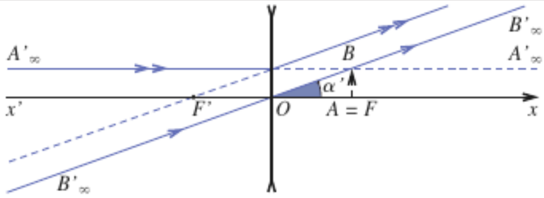
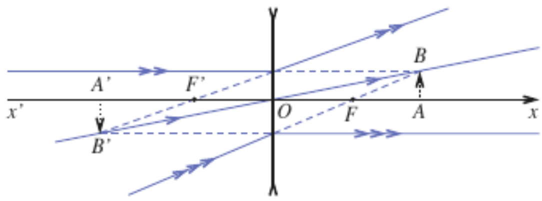
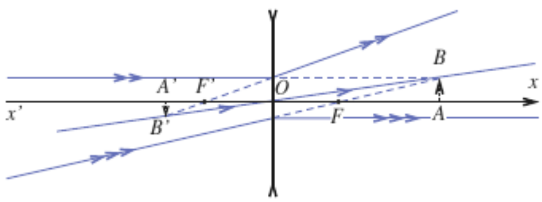
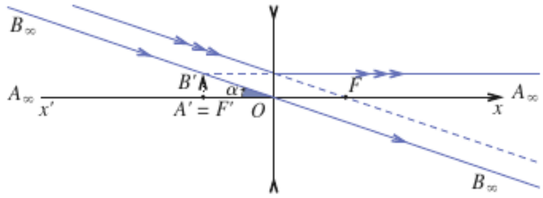
$\overline{OF'} = -4 \text{ cm}$
$\overline{OA} = +9 \text{ cm}$
$\overline{AB} = +3 \text{ cm}$



* Formule de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = +\frac{1}{9} - \frac{1}{4} = \frac{-5}{36} \Rightarrow \overline{OA'} = -\frac{36}{5} = -7{,}2 \text{ cm}$$

* $$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{-36/5}{9} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \overline{A'B'} = -\frac{4}{5}\,\overline{AB} = -2{,}4 \text{ cm}$$

objet	image	construction
réel $\overline{OA} < 0$	virtuelle $0 < \gamma < 1$ de même sens et plus petite	
virtuel entre le plan focal objet et la lentille $0 < \overline{OA} < f$	réelle $1 < \gamma < \infty$ de même sens et agrandie	
virtuel dans le plan focal objet $\overline{OA} = f$	à l'infini $\alpha' = \frac{\overline{AB}}{f} = -\frac{\overline{AB}}{f'}$	
virtuel $f < \overline{OA} < 2f$	virtuelle $-\infty < \gamma < -1$ renversée et plus grande	
virtuel $2f < \overline{OA} < \infty$	virtuelle $-1 < \gamma < 0$ renversée et plus petite	
à l'infini, réel ou virtuel $\overline{OA} = \pm\infty$	virtuelle dans le plan focal image $A' = F'$ $A'B' = \alpha f'$	

Exercice 7 – Deux lentilles convergentes

Soit un système formé de deux lentilles minces convergentes L_1 et L_2 respectivement de foyers objets F_1 et F_2, de foyers images F'_1 et F'_2, de focales $f'_1 = 5\,\text{cm}$ et $f'_2 = 10\,\text{cm}$, et de centres O_1 et O_2. Elles sont disposées de façon à former un *système afocal* (les rayons venant de l'infini repartent à l'infini).

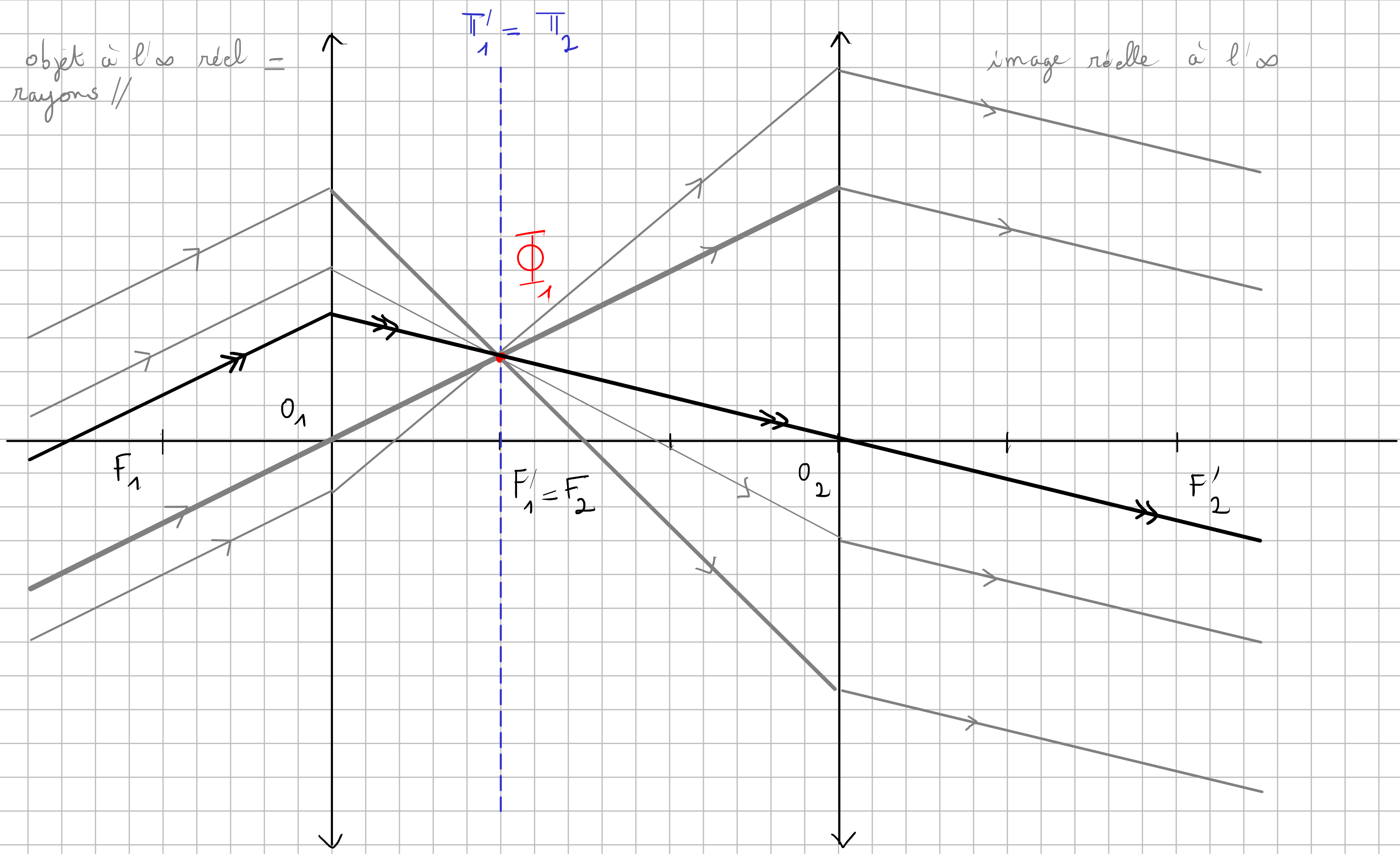
1/ Faire un schéma du dispositif.

- système afocal : $\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} \infty$ $\qquad \Pi'_1 = \Pi_2$

donc $\overline{O_1F'_1} = f'_1$ $\qquad \overline{O_1O_2} = \underbrace{\overline{O_1F'_1}}_{f'_1} + \underbrace{\overline{F'_1O_2}}_{\overline{F_2O_2} = -\overline{O_2F_2} = -f_2 = f'_2} = f'_1 + f'_2 = 15\text{ cm}$

$\overline{O_2F'_2} = f'_2$

- échelle : 1 carreau ⟷ 1 cm



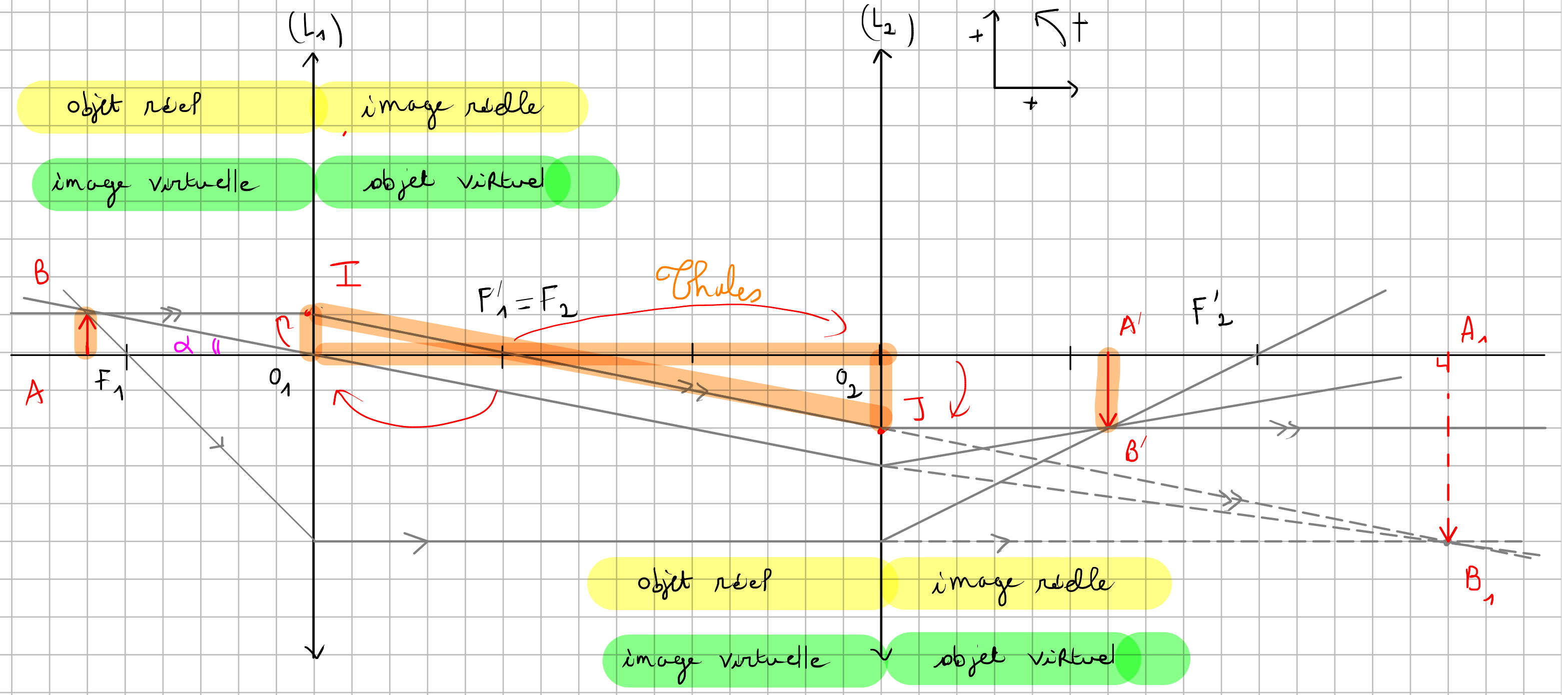
$\overline{AB} = 1\text{cm}$ $\qquad \overline{O_1A} = -6\text{ cm}$

2/ On veut former une image réelle $A'B'$ d'un objet réel de hauteur 1 cm. On place l'objet AB tel que $\overline{O_1A} = -6\text{cm}$ et AB orthogonal à l'axe optique. Construire l'image A'B' (justifier l'utilisation des conditions de Gauss). Cette image est-elle réelle ?

3/ Tracez un faisceau de rayons issu de B à travers ce système optique.

Échelle : 1 carreau $\longleftrightarrow$ 1 cm

$$\Sigma = \{L_1 + L_2\}$$



$$\boxed{AB \xrightarrow{(L_1)} A_1B_1 \xrightarrow{(L_2)} A'B'}$$

avec $\tan\alpha = \dfrac{AB}{O_1A} = \dfrac{1}{6}$

↳ $\alpha \approx 9{,}5°$ petit

objet réel

- image intermédiaire réelle
- objet virtuel pour L_2

- image définitive réelle pour $(\Sigma) = \{L_1 + L_2\}$

* Formules de conjugaison : $\overline{O_1A} = -6$ cm , $\overline{AB} = 1$ cm , $f'_1 = 5$ cm , $f'_2 = 10$ cm

L_1 :

- $-\dfrac{1}{\overline{O_1A}} + \dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} = \dfrac{1}{f'_1} \Rightarrow \dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} = \dfrac{1}{f'_1} + \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{-6} = \dfrac{6-5}{30} = \dfrac{1}{30}$

$\Rightarrow \overline{O_1A_1} = +30$ cm donc $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -15 + 30 = +15$ cm

- $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \dfrac{30}{-6} = -5 \Rightarrow \overline{A_1B_1} = -5\,\overline{AB} = -5$ cm

L_2 :

- $\dfrac{-1}{\overline{O_2A_1}} + \dfrac{1}{\overline{O_2A'}} = \dfrac{1}{f'_2} \Rightarrow \dfrac{1}{\overline{O_2A'}} = \dfrac{1}{f'_2} + \dfrac{1}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{1_{\times 3}}{10_{\times 3}} + \dfrac{1_{\times 2}}{15_{\times 2}} = \dfrac{5}{30}$

$\Rightarrow \overline{O_2A'} = \dfrac{30}{5} = 6$ cm image réelle

- $\gamma_2 = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 \Rightarrow \overline{A'B'} = \gamma_2\,\overline{A_1B_1} = 0{,}4 \times -5 = -2$ cm

image renversée.

4/ Calculer le grandissement transversal de ce système optique (pourquoi peut-on définir un grandissement pour ce système optique ?).

- $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_2 \gamma_1 = 0,4 \times -5 = \underline{-2}$

image renversée deux fois plus grande.

Thalès

- $\underline{\gamma} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{O_2J}}{\overline{O_1I}} = \dfrac{\overline{F_2O_2}}{\overline{F'_1O_1}} = \dfrac{-f_2}{-f'_1} = \dfrac{f'_2}{-f'_1} = \underline{-\dfrac{f'_2}{f'_1}} = -\dfrac{10}{5} = -2$

, on peut définir un grandissement car les objets et images ~~sont~~ de tailles finies.