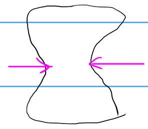
Pour aller plus loin

Exercice 7 – Analyse dimensionnelle d'une explosion

On raconte que c'est grâce à une simple analyse dimensionnelle que Geoffrey Ingram Taylor a pu estimer l'énergie E dégagée par l'explosion d'une bombe atomique, alors que cette information était encore classée secret-défense. Un film de l'explosion avait en effet été rendu public, permettant de connaître la taille r du champignon atomique après un temps t suivant l'explosion de la bombe.

temps t  r $\Rightarrow E\ ?$

1/ Justifier par un argument de dimension, qu'une relation entre E, r et t met nécessairement en jeu une autre grandeur dimensionnée.
On comprend d'ailleurs facilement qu'une caractéristique du milieu dans lequel l'explosion a lieu intervient ; on choisi la masse volumique de l'air ρ.

analyse dimensionnelle : • $[E] = [E_c] = \left[\frac{1}{2} m v^2\right] = [m][v]^2 \times \underbrace{\left[\frac{1}{2}\right]}_{=1}$

donc $[E] = M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}$

• $[r] = L$; $[t] = T$

Pour avoir une relation entre E, r et t, il manque une grandeur dimensionnée

(cf M dans E) ; $[E] \neq [C r^{\alpha} t^{\beta}]$

On ajoute une grandeur : ρ masse volumique de l'air.

2/ En utilisant une analyse dimensionnelle, trouver une expression de r en fonction de t, faisant intervenir E et ρ (et une constante $= C$ sans dimension).

hypothèse : $\boxed{r = C\, t^{\alpha} E^{\beta} \rho^{\gamma}}$ $\alpha = ?$ $\beta = ?$ $\gamma = ?$

avec $[C] = 1$

analyse dimensionnelle :

• $r = C\, t^{\alpha} E^{\beta} \rho^{\gamma}$

$[r] = L$ $[t] = T$ $[C] = 1$ $[E] = ML^2T^{-2}$

$[\rho] = \left[\frac{m}{V}\right] = \frac{[m]}{[\ell^3]} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$

$[r] = [C\, t^{\alpha} E^{\beta} \rho^{\gamma}] = 1 \times [t]^{\alpha} [E]^{\beta} [\rho]^{\gamma}$

$M^0 L^1 T^0 = T^{\alpha} (ML^2T^{-2})^{\beta} (ML^{-3})^{\gamma}$

$= M^{\beta+\gamma} L^{2\beta-3\gamma} T^{\alpha-2\beta}$

3 équations :
$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 & (1) \\ 2\beta - 3\gamma = 1 & (2) \\ \alpha - 2\beta = 0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\beta & (1) \\ 2\beta + 3\beta = 5\beta = 1 & (2) \\ \alpha = 2\beta & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta = \frac{2}{5} & (3) \\ \beta = \frac{1}{5} & (2) \\ \gamma = -\beta = -\frac{1}{5} & (1) \end{cases}$$

$$r = C\, t^{\alpha} E^{\beta} \rho^{\gamma} = C\, t^{\frac{2}{5}} E^{\frac{1}{5}} \rho^{-\frac{1}{5}} = \boxed{C \left(\frac{E t^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{5}}}$$

Vérif. : $\left[\frac{E t^2}{\rho}\right] = \frac{\cancel{M} L^2 \cancel{T^{-2}}\, \cancel{T^2}}{\cancel{M} L^{-3}} = L^2 \times L^3 = L^5$

Ex 8. L'effet Casimir

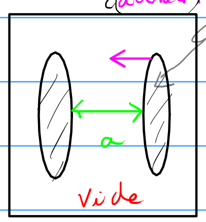
Comme on peut le lire sur Wikipedia : "L'effet Casimir, tel que prédit par le physicien néerlandais Hendrik Casimir en 1948, est une force attractive entre deux plaques parallèles conductrices et non chargées. Cet effet, dû aux fluctuations quantiques du vide..."

Précisons-le bien, la force dont il est ici question se manifeste alors que les plaques conductrices sont dans le vide.

Le phénomène étant fondamentalement d'origine quantique, nous supposerons que cette force dépend de la constante de Planck h (celle permettant de connaître l'énergie d'un photon de fréquence ν : $E = h\nu$) ; le caractère conducteur des plaques indique que des propriétés électromagnétiques sont en jeu, et nous supposerons donc aussi que cette force dépend de c, la vitesse de la lumière.

En utilisant une analyse dimensionnelle, trouver une expression de la force par unité de surface s'exerçant entre ces plaques en fonction de h, c et a la distance séparant les plaques.

$\vec{F}_c$(attract)



plaques conductrices et non chargées

électromag

$\Rightarrow$ effet Casimir (quantique : h)

ρ_0

Force $\vec{F}_c$ par unité de surface : (h, c, a interviennent)

analyse dimensionnelle :

- $[a] = L$ et $[c] = L T^{-1}$
- $[F_c] = \left[\frac{f}{S}\right] = \frac{[m a]}{L^2} = \frac{M L T^{-2}}{L^2} = M L^{-1} T^{-2}$ $\begin{cases} S : \text{surface en } m^2 \\ f : \text{force en } N \end{cases}$
- $[h]$? or on sait $E = h\nu$ avec $\nu = \frac{1}{T}$: ν fréquence (H_z ou s^{-1}), T période (en s)

$[E] = [m c^2] = [h][\nu] = [h]\, T^{-1}$

$M (L T^{-1})^2 = [h]\, T^{-1}$

$\Rightarrow [h] = M (L T^{-1})^2\, T = M L^2 T^{-2}\, T$

$$\boxed{[h] = M L^2 T^{-1}}$$

constante sans dimension

$[A] = 1$

Méthode 1 : hypothèse : $F_c = A\, \hbar^{\alpha}\, c^{\beta}\, a^{\gamma}$

$\alpha ?$
$\beta ?$
$\gamma ?$

Equation aux dimensions : $[F_c] = 1 \times [\hbar]^{\alpha} [c]^{\beta} [a]^{\gamma}$

$[a] = L$ $\qquad$ $[c] = L\,T^{-1}$

$[F_c] = M\,L^{-1}\,T^{-2}$ $\qquad$ $[\hbar] = M\,L^{2}\,T^{-1}$

donc : $M^{1}\, L^{-1}\, T^{-2} = \left(M\, L^{2}\, T^{-1}\right)^{\alpha} \left(L\, T^{-1}\right)^{\beta} L^{\gamma}$
$= M^{\alpha}\, L^{2\alpha+\beta+\gamma}\, T^{-\alpha-\beta}$

3 équations : $\begin{cases} 1 = \alpha \\ -1 = 2\alpha + \beta + \gamma \\ +2 = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = -1 - 2\alpha - \beta = -4 \\ \beta = 2 - \alpha = 1 \end{cases}$

$$\boxed{F_c = A\, \hbar^{\alpha}\, c^{\beta}\, a^{\gamma} = A\, \hbar^{1}\, c^{1}\, a^{-4} = A\, \frac{\hbar c}{a^{4}}}$$

Méthode 2 : $[F_c] = M\, L^{-1}\, T^{-2} = \left(\underbrace{[\hbar]\, L^{-2}\, T^{1}}_{[M]}\right) L^{-1}\, T^{-2} = [\hbar]\, \underbrace{L^{-3}\, T^{-1}}_{\underbrace{(L^{-4})}_{[a]^{-4}}\, \underbrace{(L)\, T^{-1}}_{[c]}}$

$[F_c] = [\hbar][c][a]^{-4}$

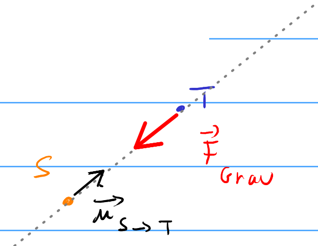
C.Q.F.D

Ex 9. Masse d'un trou noir

À partir des lois de Newton, il est possible de retrouver la troisième loi de Kepler donnant la période de rotation T d'une planète située à une distance R du soleil de masse M_S :

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_S}}.$$

a) Montrer que le terme à droite de l'égalité est bien homogène à un temps.



a) $\left[\sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_S}}\right] \overset{?}{=} T$

or $[4\pi^2] = 1$; $[R] = L$; $[M_S] = M$

et $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$

cf $\vec{F}_{Grav} = -G \frac{M_T M_S}{r_{TS}^2} \vec{u}_{S\to T}$

on cherche à voir si $\left[\sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_S}}\right]^2 = \left[\left(\frac{R^3}{GM_S}\right)^1\right] \overset{?}{=} T^2$

$[F] = [ma]$
$= M[a]$

force

$[F_{\text{astre}\to\text{planète}}] = [G]\left[\frac{mM}{R^2}\right]$ car $[\vec{u}_{M\to P}] = 1$ sans dimension

$M(LT^{-2}) = [G]\, M^2 L^{-2} \Rightarrow (MLT^{-2})(M^{-2}L^2) = [G]$

donc $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$

$\Rightarrow \left[\frac{R^3}{GM_S}\right] = \frac{[R]^3}{[G][M_S]} = \frac{L^3}{(M^{-1}L^{+3}T^{-2})M^1} = L^3 \times (M^1 L^{-3} T^{+2}) M^{-1} = T^2$

b) À partir de vos connaissances et de la troisième loi de Kepler, donner un ordre de grandeur de la masse du Soleil.

$M_S \approx ?$

$\left[\sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_S}}\right] = T$ donc $T^2 = C\,\frac{4\pi^2 R^3}{GM_S}$

$[C] = 1$

↳ $M_S = C\,\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, l'ordre de grandeur de M_S est donnée par :

A.N:

- T : période de rotation de la Terre $T = 365{,}25$ jours $= (365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60)$ s
- R : distance Terre Soleil $R_T \simeq 1{,}50 \times 10^{11}$ m $\approx 10^{11}$ m
- $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$

$M_S \approx \frac{4\pi^2}{(365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60)^2} \times \frac{[1{,}5 \times 10^{11}]^3}{6{,}67 \times 10^{-11}}$ (kg)

$40 \sim 10^1$; $(10^7)^2 \simeq 10^{14}$; 10^{33} ; 10^{-10}

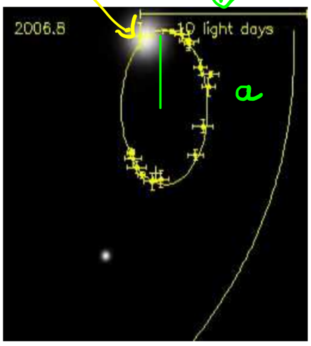
$$M_S \sim \frac{10^{34}}{10^{14}\,10^{-10}} \sim 10^{(34-14+10)} = 10^{30}\ \text{kg}$$

M_S est de l'ordre de 10^{30} kg

c) À partir de la figure ci-dessous, donner un ordre de grandeur de la masse de ce trou noir (situé au centre de notre galaxie).

échelle de longueur : 1 ld = 1 jour-lumière

étoile



Trajectoire d'une étoile entre janvier 1992 et juillet 2006. → T

- trajectoire elliptique de demi-grand axe a : $a = 4,5$ jour-lumière
  $a = 4,5 \times 24 \times 3600$ seconde-lumière
- période de révolution de l'étoile : $T_E = 14,5$ ans

période de révolution de la Terre

$[C] = 1$. 3^e loi de Kepler par analyse dimensionnelle : $T_T^2 = C\,\dfrac{4\pi^2 R^3}{G M_S}$

"taille" de la trajectoire

masse de l'étoile = Soleil

↳ système Soleil-Terre : $M_S = C\,\dfrac{4\pi^2 R^3}{G T^2}$

3^e loi de Kepler valable quelque soit le système étudié :

↳ trajectoire de l'étoile autour du trou noir de masse M_{BH} $\Big\}$ $T_E^2 = C\,\dfrac{4\pi^2 a^3}{G M_{BH}}$ M_{BH} ?

donc $$\left(\frac{T_T^2}{T_E^2}\right) = \left(\cancel{C}\,\frac{\cancel{4\pi}^2 R^3}{\cancel{G} M_S}\right) \times \left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{C}}\,\frac{\cancel{G} M_{BH}}{\cancel{4\pi}^2 a^3}\right) = \left(\frac{R^3}{a^3}\right)\left(\frac{M_{BH}}{M_S}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{BH} = M_S \times \left(\frac{a}{R}\right)^3 \times \left(\frac{T_T}{T_E}\right)^2}$$

avec
- $R = 150 \times 10^6$ km
- $a = (4,5 \times 24 \times 3600) \times 3 \times 10^5$ km

car 1 seconde-lumière $= 3 \times 10^5$ km

$$\left(\frac{(4,5\times 24\times 3600)\times 3\times 10^5}{150\times 10^6}\right)^3 \left(\frac{1}{14,5}\right)^2$$

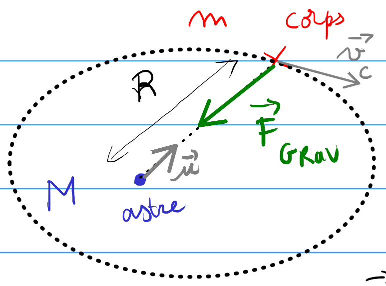
A.N. : $M_{BH} \simeq 2,2 \times 10^9\ M_S$

Ex 10. Rayon de Schwarzschild

La vitesse de libération d'un corps est la vitesse minimale à communiquer à ce corps pour échapper à l'attraction gravitationnelle d'un astre de masse M. À partir de la conservation de l'énergie, on peut montrer que la vitesse de libération v vérifie l'équation :

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = 0, \tag{1}$$

où m est la masse du corps dont on cherche la vitesse et R est le rayon de l'astre en question.



$$\vec{F}_{Grav} = \vec{F}_{astre \to corps} = -G\frac{mM}{R^2}\vec{u}$$

système Σ étudié : $\Sigma = \{\text{corps de masse } m\}$

dès que vitesse du corps $\vec{v}_c$: $\|\vec{v}_c\| > v \Rightarrow$ libération du corps de l'attraction gravitationnelle $\vec{F}_{Grav}$

a) Sur Terre

1. Exprimer v en fonction des données du problème.
2. Calculer la vitesse de libération d'une fusée sur Terre.

1. $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = G\frac{\cancel{m}M}{R} \Rightarrow v^2 = G\frac{2M}{R}$

$$\boxed{v = \sqrt{G\frac{2M}{R}}}$$

$m^3 . kg^{-1} . s^{-2}$; kg ; m

$(m^3\,\cancel{kg}^{-1}\,s^{-2}) \times \cancel{kg} \times \left(\frac{1}{m}\right) = m^2 s^{-2} = (m.s^{-1})^2$

2. $R = R_T = 6{,}37 \times 10^6\ m$ et $M = M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 . kg^{-1} . s^{-2}$

$\Rightarrow v = 1{,}12 \times 10^4\ m.s^{-1}$

b) Un trou noir est caractérisé par son rayon de Schwarzschild R_S : la distance en-dessous de laquelle même la lumière ne peut s'échapper du trou noir. Calculer puis donner la valeur du rayon de Schwarzschild du trou noir précédemment étudié.

a lumière
t à la
mite de
a libération
trou noir.

R_S tel que $\underbrace{v = c}_{\text{lumière}} = 3 \times 10^8\ m.s^{-1}$; $M = M_{BH}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - G\frac{M\cancel{m}}{R} = 0$ devient $\frac{1}{2}c^2 = G\frac{M_{BH}}{R_S}$

donc $R_S = \frac{2GM_{BH}}{c^2} = 6{,}53 \times 10^{12}\ m$