TD3 : Analyse dimensionnelle

Exercice 1

1/ $[F] = [q][v][B] \Rightarrow [B] = \frac{M^1 \cancel{L} T^{-2}}{I \cancel{T} \cancel{L} \cancel{T}^{-1}} = \underline{M T^{-2} I^{-1}}$

2/ Dimension et unité S.I de μ_0 : $[\mu_0]$? , unité ?

étude d'un solénoïde $\longrightarrow$ champ magnétique $\vec{B}$ tel que

$$\boxed{B = \mu_0 \left(\frac{N}{\ell}\right) I}$$

analyse dimensionnelle :

- $[N] = 1$ sans dimension ⚠ car N = nbre de spires
- $[B] = M T^{-2} I^{-1}$
- $[\ell] = L$
- $[I] = I$

or $\boxed{\mu_0 = \frac{B \ell}{N I}} \Rightarrow [\mu_0] = \frac{[B][\ell]}{[N][I]} = \frac{(M^1 T^{-2} I^{-1}) L^1}{1 \times I^1}$

$$\boxed{[\mu_0] = M^1 L^1 T^{-2} I^{-2}}$$

μ_0 en $(kg \cdot m \cdot s^{-2}) \cdot A^{-2}$: unité S.I

remarque : $[\mu_0] = [F][I]^{-2}$ et $[F] = [q v B] = [q][v][B]$

$[q][v] = (I T)(L T^{-1}) = I L$

donc on peut aussi écrire : $[\mu_0] = (I L)[B][I]^{-2} = [B] L [I]^{-1}$

$= \frac{[B] L}{[I]}$

3/ Dimension et unité S.I de h (constante de Planck) :

énergie : $\boxed{E = h \nu}$

analyse dimensionnelle : $[h]$?

- fréquence $\nu = \frac{1}{T}$: $[\nu] = T^{-1}$

• $[E] = [E_c] = [mc^2]$ etc...

sans unité

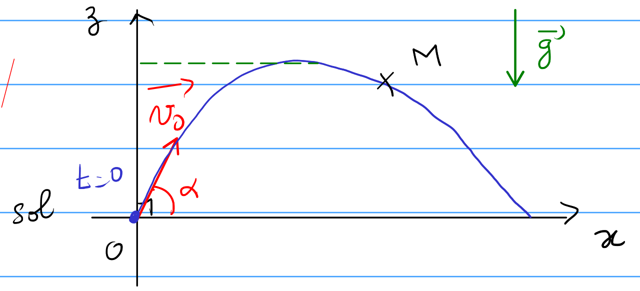
$[E] = [E_c] = \left[\frac{1}{2} m v^2\right] = [m][v]^2 = M (L^1 T^{-1})^2 = ML^2 T^{-2}$

• $[h] \overset{?}{=}$, $E = h\nu \Rightarrow [h] = \frac{[E]}{[\nu]} = \frac{(ML^2 T^{-2})}{T^{-1}}$

$[h] = M L^2 T^{-2-(-1)} = ML^2 T^{-1}$

Exercice 2 : Obtention d'une formule

1/



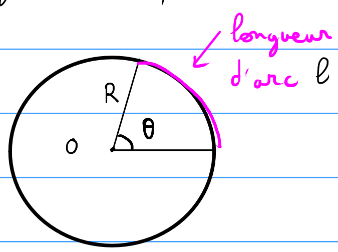
système Σ : {point M}

référentiel $\mathcal{R}$.

$\alpha \neq 0$: « vers le haut, depuis le sol.

liste des grandeurs pertinentes • $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $[\alpha] = 1$

angle sans dimension MAIS avec une unité (rad)



$[R] = L$, $[\ell] = L$ pas pertinent

angle θ « petit » : $[\ell] = [R\ \theta]$

$[\theta] = \frac{[\ell]}{[R]} = \frac{L}{L} = 1$

• vitesse initiale v_0 $[v_0] = LT^{-1}$

• constante g : $[g] = [a] = LT^{-2}$, $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

• masse m : $[m] = M$

Analyse dimensionnelle : $[h] = L$, on suppose que h va s'écrire sous la forme :

formule possible

$(*)$ $\boxed{h = C\, m^{\alpha}\, g^{\beta}\, v_0^{\gamma}}$

α, β, γ ?

C : constante sans dimension

$[C] = 1$

$L^1 = L^1 = 1 \times \ldots$

$[v_0] = LT^{-1}$
$[g] = [a] = LT^{-2}$
$[m] = M$

Analyse dimensionnelle :

$$(*) \quad [h] = [C \; m^\alpha \; g^\beta \; v_0^\gamma]$$

$$\underbrace{[h]}_{=L} = \underbrace{[C]}_{=1 \text{ sans dimension}} [m]^\alpha [g]^\beta [v_0]^\gamma$$

$$1 \times L^1 \times 1 = 1 \times (M^\alpha) \times (L T^{-2})^\beta (L T^{-1})^\gamma$$

$$M^0 L^1 T^0 = M^\alpha \times (L^\beta \times L^\gamma)(T^{-2\beta} T^{-\gamma})$$
$$= M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{(-2\beta-\gamma)}$$

$(x^a)^b = x^{ab}$

$x^a x^b = x^{a+b}$

3 équations en α, β, γ :

$$\begin{cases} 0 = \alpha & (i) \\ 1 = \beta + \gamma & (ii) \\ 0 = -2\beta - \gamma = -(2\beta+\gamma) & (iii) \end{cases}$$

(i) $\alpha = 0$

(ii) + (iii) : « élimine la variable γ » $\Leftrightarrow 1 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -1$

(ii) $\gamma = 1 - \beta = 1 - (-1) = 2$

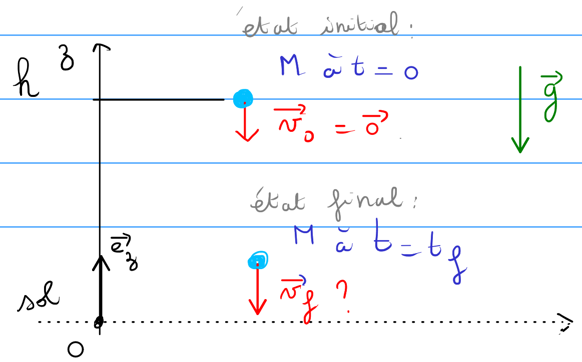
conclusion : $h = C \, m^\alpha g^\beta v_0^\gamma = C \, m^0 g^{-1} v_0^2$

$$\boxed{h = C \frac{v_0^2}{g}}$$

vérification : chute libre $\Rightarrow$ 2e loi de Newton ou conservation de l'énergie mécanique.

etc... $C = \frac{3}{2}$

2/ On lâche sans vitesse initiale un objet de masse m d'une hauteur h au-dessus du sol. On veut trouver par une analyse dimensionnelle une expression de sa vitesse finale v_f en négligeant tout frottement.
Quelles sont les grandeurs pertinentes du problème ? En déduire une expression pour la vitesse v_f à l'aide d'une analyse dimensionnelle.



- grandeurs pertinentes
  - ↳ masse m : $[m] = M$
  - ↳ hauteur h : $[h] = L$
  - ↳ « cst de pesanteur » g : $[g] = L T^{-2}$
  - ↳ v_f ? $[v_f] = L T^{-1}$

$[m] = M$, $[g] = LT^{-2}$, $[h] = L$, $[v_f] = L\,T^{-1} \underbrace{M^0}_{=1}$

Expression pour la vitesse v_f : on suppose que v_f s'écrit :

$$\boxed{v_f = C\, m^{\alpha}\, g^{\beta}\, h^{\gamma}}$$

avec C sans dimensionnelle

α ? β ? γ ?

$$[v_f] = \overbrace{[C]}^{=1}\, [m]^{\alpha}\, [g]^{\beta}\, [h]^{\gamma}$$

$$M^0 L^1 T^{-1} = 1 \times (M^{\alpha})\, (LT^{-2})^{\beta}\, (L)^{\gamma}$$

$$= M^{\alpha}\, L^{\beta+\gamma}\, T^{-2\beta}$$

3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} \alpha = 0 & (1) \\ \beta + \gamma = 1 & (2) \\ -2\beta = -1 & (3) \\ \hline \gamma - \beta = 0 & (2)+(3) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 1 - \beta = \dfrac{1}{2} \\ \beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$v_f = C\, m^{\alpha}\, g^{\beta}\, h^{\gamma} = C\, \underbrace{m^{0}}_{\text{chute libre}}\, g^{1/2}\, h^{1/2} = \boxed{C\sqrt{gh}}$$

$\iff$ la masse n'intervient pas

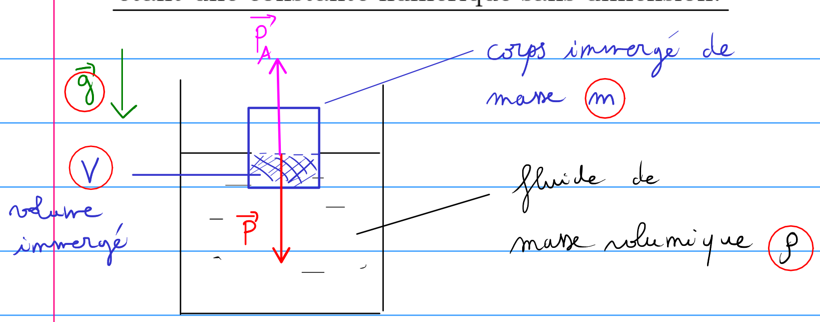
$$\iff v_f^2 = C\, gh$$

Trouver les exposants d'une formule

Exercice 3 – Poussée d'Archimède

Trouver à l'aide d'une analyse dimensionnelle, la formule donnant la poussée d'Archimède, sachant que cette force est fonction du volume du corps immergé V, de la masse volumique ρ du fluide et de l'accélération de la pesanteur g.

Aide : on cherchera les valeurs des exposants α, β et γ satisfaisant l'équation $P_A = C\, V^{\alpha} \rho^{\beta} g^{\gamma}$, C étant une constante numérique sans dimension.



- système Σ = corps immergé
- forces : • poids $\vec{P}$
  • poussée d'Archimède $\vec{P}_A$

à l'équilibre, $\vec{P} + \vec{P}_A = \vec{0}$

masse volumique : $\rho = \dfrac{dm}{dV} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{m}{V}$ (unité : $kg \cdot m^{-3}$)

répartition uniforme des masses

① On suppose que la force P_A est de la forme : $\boxed{P_A = C\, V^{\alpha} \rho^{\beta} g^{\gamma}}$, $[C] = 1$ $\alpha ? \beta ? \gamma ?$

Analyse dimensionnelle : ② $[P_A] = [m\, a] = M\, L\, T^{-2}$

$[V] = L^3$

$[g] = L\, T^{-2}$

$[\rho] = \left[\dfrac{dm}{dV}\right] = \dfrac{[m]}{[V]} = \dfrac{M}{L^3} = M\, L^{-3}$

donc

③ $[P_A] = M\, L\, T^{-2} = [C]\, [V]^{\alpha} [\rho]^{\beta} [g]^{\gamma}$

$\Rightarrow M^1 L^1 T^{-2} = 1 \times (L^3)^{\alpha} (M L^{-3})^{\beta} (L\, T^{-2})^{\gamma}$

$M^1 L^1 T^{-2} = M^{\beta} L^{(3\alpha - 3\beta + 1\gamma)} T^{-2\gamma}$

④ Equations à 3 inconnues : $\begin{cases} 3\alpha - 3\beta + \gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ -2\gamma = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{3}(1 + 3\beta - \gamma) = \dfrac{1}{3}(1 + 3 - 1) = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = \dfrac{-2}{-2} = 1 \end{cases}$

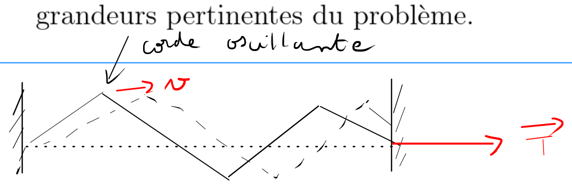
conclusion : $P_A = C\, \rho\, V\, g$

Exercice 4 – Corde de guitare

On considère une corde de guitare tendue. La corde est homogène, de masse m et de longueur l; on mesure sa tension T. On pince la corde et l'élongation se propage le long de la corde à la vitesse v.

1/ Quelles sont les grandeurs pertinentes du problème.

2/ Déduire, à l'aide d'une analyse dimensionnelle, une expression pour la vitesse v en fonction des grandeurs pertinentes du problème.



1/ Grandeurs pertinentes : • masse m en kg, $[m] = M$
• longueur ℓ en m, $[\ell] = L$
• tension T en $kg.m.s^{-2}$, $[T] = M L T^{-2}$

• Vitesse v en $m.s^{-1}$, $[v] = L T^{-1}$

2/ Analyse dimensionnelle : $\boxed{v = C\, m^{\alpha}\, \ell^{\beta}\, T^{\gamma}}$ avec $[C] = 1$

$$[v] = 1 \times L T^{-1} = \overbrace{[C]}^{=1} [m]^{\alpha} [\ell]^{\beta} [T^{\gamma}]$$

$$[v] = \overbrace{M^{0}}^{=1} L^{1} T^{-1} = M^{\alpha} L^{\beta} \left(M^{1} L^{1} T^{-2}\right)^{\gamma}$$
$$= M^{\alpha+\gamma} L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma}$$

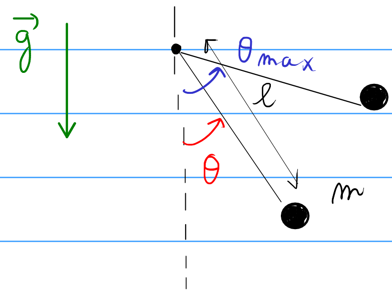
3 Equations "couplées" :
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 & (1) \\ \beta + \gamma = 1 & (2) \\ -2\gamma = -1 & (3) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma = -\frac{1}{2} \\ (2) \Rightarrow \beta = 1 - \gamma = \frac{1}{2} \\ (3) \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Expression pour la vitesse v :
$$v = C\, m^{\alpha}\, \ell^{\beta}\, T^{\gamma} = C\, m^{-\frac{1}{2}}\, \ell^{\frac{1}{2}}\, T^{\frac{1}{2}}$$

ou $\boxed{v = C \sqrt{\frac{\ell T}{m}}}$ avec C constante sans dimension

Exercice 5 – Pendule simple

Un pendule simple est un fil sans masse de longueur l au bout duquel est attachée une masse m. A priori, la période des oscillations d'un tel pendule (notée T) peut dépendre de g, l, m et θ_{max}, l'angle de déviation maximale par rapport à la verticale.



• période des oscillations T $\Rightarrow [T] = T$
• fréquence : $f = \frac{1}{T}$ $\Rightarrow [f] = T^{-1}$

1/ Montrer par analyse dimensionnelle que T ne peut pas dépendre de m et trouver sa dépendance en fonction de l et g.

2/ Pourquoi ne vous demande-t-on pas la dépendance en fonction de θ_{max} ?

1/ Analyse dimensionnelle : T ?

$[g] = L T^{-2}$

$[\ell] = L$

$[m] = M$

angle sans dimension d'unité rad (radian)

$[\theta_{max}] = 1$ → « inclus » dans C

constante sans dimension

On suppose que la période T s'écrit : $T = C\, m^{\alpha}\, \ell^{\beta}\, g^{\gamma}$ — α ? β ? γ ?

$$\Rightarrow [T] = 1 \times 1 \times T = 1 \times M^{\alpha}\, L^{\beta}\, (L T^{-2})^{\gamma}$$

$$M^0\, L^0\, T^1 = M^{\alpha}\, L^{\beta+\gamma}\, T^{-2\gamma}$$

Equations couplées :

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \leftrightarrow T \text{ indépendant de } m \quad (1) \\ \beta + \gamma = 0 & (2) \\ -2\gamma = 1 & (3) \end{cases}$$

(2) $\beta = -\gamma = \frac{1}{2}$

(3) $\gamma = -\frac{1}{2}$

donc $T = C\, \underbrace{m^0}_{=1}\, \ell^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}}$

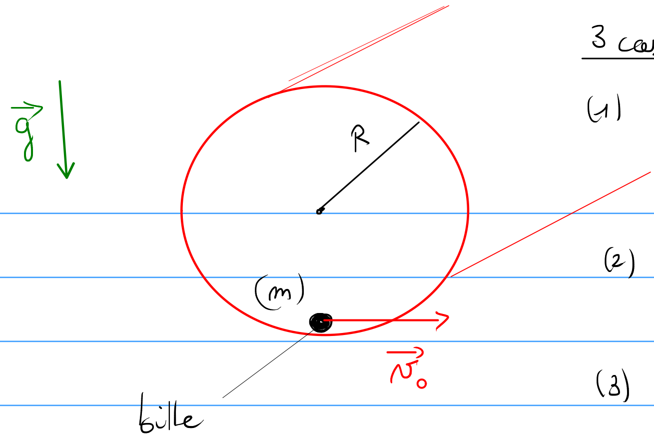
$\Rightarrow$ période d'oscillation du pendule : $T = C\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

Exercice 6 – Trajectoires possibles

Une bille de masse m est lancée au bas d'une piste cylindrique de rayon R avec une vitesse initiale v_0. Si v_0 est faible la bille oscillera autour de sa position initiale (tout en bas de la piste). Pour v_0 très grande la bille fera une rotation complète. Enfin pour une valeur intermédiaire de la vitesse, elle décollera de la piste.

1/ Donner les dimensions de chacun des paramètres du problème (m, R ...).

2/ Trouver à l'aide d'une analyse dimensionnelle à quelle grandeur doit être comparée v_0 pour parler de « faible » ou « grande » vitesse (l'accélération de la pesanteur g est bien sur connue).



<u>3 cas :</u>

(1) ↳ $v_0 \ll v_c$: oscillation autour de la position initiale

(2) ↳ v_0 intermédiaire ⇒ décolle

(3) ↳ $v_0 \gg v_c$: rotation complète

• soit v_c : vitesse critique qui est comparée à v_0 pour savoir dans quel cas on se trouve.

• <u>Analyse dimensionnelle :</u> $[v_c] = M^0 L T^{-1}$

1/

$$[R] = L, \quad \underbrace{[m] = M}_{\text{↳ intervient pas}}, \quad [g] = L T^{-2}$$

$$\left((LT^{-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2/

$$[v_c] = 1 \times L T^{-1} = \left(L^2 T^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(L \times \left(L T^{-2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left([R]\,[g] \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_c = C\sqrt{Rg}}$$ avec C constante sans dimension.

Exercice 7 – Analyse dimensionnelle d'une explosion

On raconte que c'est grâce à une simple analyse dimensionnelle que Geoffrey Ingram Taylor a pu estimer l'énergie E dégagée par l'explosion d'une bombe atomique, alors que cette information était encore classée secret-défense. Un film de l'explosion avait en effet été rendu public, permettant de connaître la taille r du champignon atomique après un temps t suivant l'explosion de la bombe.

1/ Justifier par un argument de dimension, qu'une relation entre E, r et t met nécessairement en jeu une autre grandeur dimensionnée.
On comprend d'ailleurs facilement qu'une caractéristique du milieu dans lequel l'explosion a lieu intervient ; on choisi la masse volumique de l'air ρ.

2/ En utilisant une analyse dimensionnelle, trouver une expression de r en fonction de t, faisant intervenir E et ρ (et une constante sans dimension).

1/

E : énergie dégagée par l'explosion avec $[E] = [E_c] = \left[\frac{1}{2} m v^2\right] = M (LT^{-1})^2$
$= M L^2 T^{-2}$

r : taille du champignon avec $[r] = L$

t : temps après l'explosion $[t] = T$

On veut trouver : $[E] = M L^{2} T^{-2}$ → il manque un paramètre de dimension égale à celle d'une masse.

ρ en $kg.m^{-3}$

2/ $[\rho] = M L^{-3}$, $r = C\, t^{\alpha} E^{\beta} \rho^{\gamma}$

$\alpha = ?$
$\beta = ?$ et $[C] = 1$
$\gamma = ?$

....

$$\boxed{r = C \frac{E^{\frac{1}{5}}\, t^{\frac{2}{5}}}{\rho^{\frac{1}{5}}}}$$