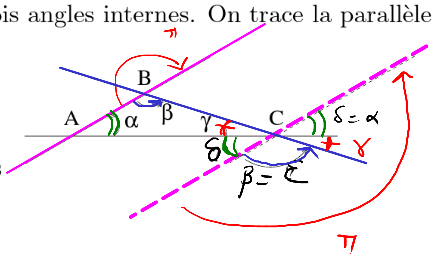
Ex 1. Somme des angles dans un triangle

On considère le triangle (ABC) et on appelle α, β et γ ses trois angles internes. On trace la parallèle à la droite (AB) passant par C.



a) Déterminer les deux angles notés "?" sur la figure.

b) En déduire la valeur de la somme des trois angles internes d'un triangle. $\alpha + \beta + \gamma = ?$

a) δ ? ε ? lien avec α, β ou γ ?

$\beta = \varepsilon$ (angle droite et droite pointillée)

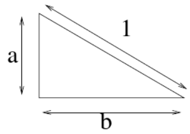
$\alpha = \delta$ (" " " + angle face à face)

b) $\delta + \beta + \gamma = \pi$ donc $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ↖ 1/2 plan défini par droite

---

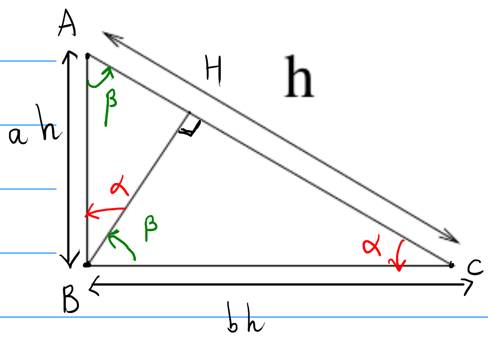
Ex 3. Théorème de Pythagore

Soit un triangle rectangle dont l'hypoténuse est de longueur 1 (dans l'unité de mesure choisie).
On appelle a et b les longueurs de ses deux autres côtés (a pour le plus petit).



a) On dilate ce triangle d'un facteur h. On a ainsi obtenu un **triangle semblable** au précédent. Rappeler ce que cela signifie, qu'ont en commun les deux triangles ? Quelles sont les longueurs des trois côtés du triangle dilaté (à exprimer en terme de h, a et b)

triangles semblables : ① côtés proportionnels
② mêmes angles



longueurs : $a \times h$, $b \times h$, $1 \times h$

b) On trace la hauteur de l'angle droit vers l'hypoténuse.
Montrer que les deux petits triangles intérieurs sont semblables au triangle initial.
En déduire les longueurs de tous les côtés de ces deux petits triangles.
(à exprimer en terme de h, a et b).

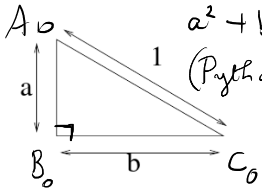
- triangle ABC : $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\hat{m}$ angles : OK
  - triangle BHC : $\alpha + \frac{\pi}{2} + \widehat{HBC} = \pi$

    $\widehat{HBC} = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$
  - triangle BHA : $\beta + \frac{\pi}{2} + \widehat{HBA} = \pi$

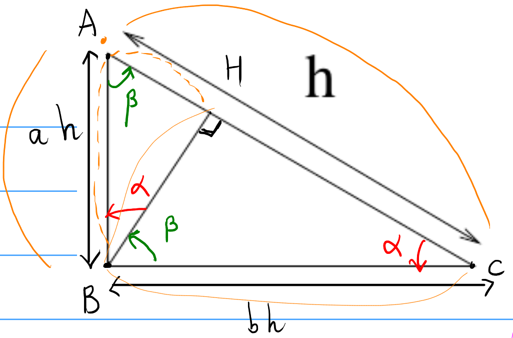
    $\widehat{HBA} = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$

AH ? BH ? HC ?

semblables à :



$a^2+b^2=1$ (Pythagore)



. triangle ABH rectangle en H : Thalès

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB} = \frac{BH}{BC}$$

↳ $AH = \frac{AB \times AB}{AC} = \frac{(ah)(ah)}{h} = a^2 h$

↳ $BH = \frac{AB \times BC}{AC} = \frac{ah \; bh}{h} = abh$

. $HC = AC - AH = h - a^2 h = (1-a^2)h = b^2 h$

facteur multiplicatif

triangle AHB : hypothénuse $AB = ah \times 1 = ah \times A_0C_0$

$BH = ah \times b = ah \times B_0C_0$

$AH = ah \times a = ah \times A_0B_0$

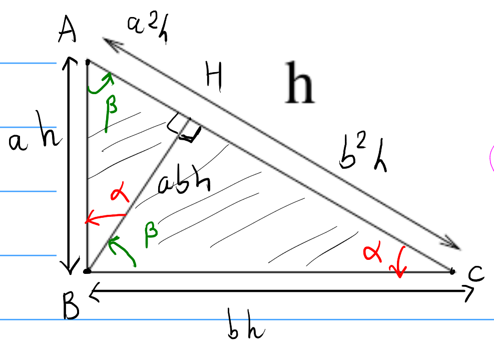
triangle BHC : hypothénuse $BC = bh \times 1 = bh \times A_0C_0$

$BH = bh \times a = bh \times A_0B_0$

$HC = bh \times b = bh \times B_0C_0$

triangle BHC rectangle en H : $\frac{BC}{AC} = \frac{BH}{AB} = \frac{HC}{BC} \rightarrow HC = \frac{BC^2}{AC} = \frac{(bh)^2}{h} = b^2 h$

c) Théorème de Pythagore : $(ah)^2 + (bh)^2 \overset{?}{=} h^2$



Aire de ABC = Aire de ABH + Aire de BHC

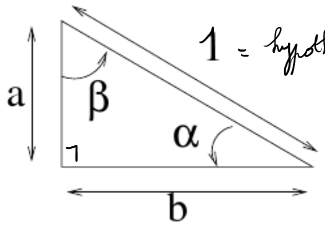
$$\frac{AB \times BC}{2} = \frac{AH \times HB}{2} + \frac{BH \times HC}{2}$$

$$\frac{ah \times bh}{2} = \frac{a^2h \times abh}{2} + \frac{abh \times b^2 h}{2}$$

$$ab\,h^2 = ab\,(h^2 a^2) + ab\,(h^2 b^2)$$

$$\boxed{h^2 = (ah)^2 + (bh)^2}$$

d) On appelle α et β les angles du premier triangle rectangle considéré.
Quel lien existe-t-il entre les angles α et β ?
Exprimer les longueurs a et b en fonction de α, puis de β.



$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}}$

$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{b}{1} \\ \sin\alpha = \frac{a}{1} \\ \tan\alpha = \frac{a}{b} \end{cases}$ $\quad$ $\cos\beta = \frac{a}{1}$, $\sin\beta = \frac{b}{1}$, $\tan\beta = \frac{b}{a}$

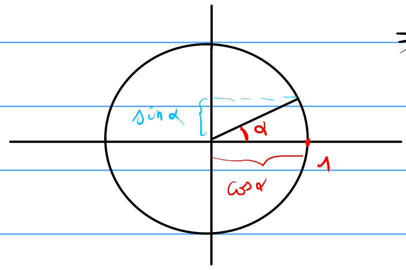
$\boxed{\begin{array}{l} a = \cos\beta = \sin\alpha \\ b = \sin\beta = \cos\alpha \end{array}}$ $(*)$

Quelle formule de trigonométrie peut-on déduire directement de la question c) ?
On suppose que l'angle α devient très petit, vers quoi tendent l'angle β et les longueurs a et b ?

- c) $(ah)^2 + (bh)^2 = h^2 \longrightarrow 1 = a^2 + b^2$ et $(*)$

donc $1 = \cos^2\beta + \sin^2\beta = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

- α très petit : $\alpha \longrightarrow 0$



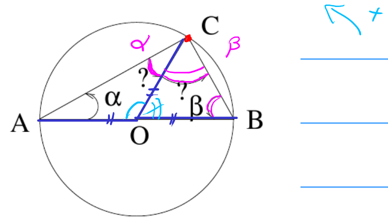
$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha \to 0 \\ \cos\alpha \to 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\beta \to 0 \\ \sin\beta \to 1 \end{cases}$ et $\boxed{\begin{array}{l} a \to 0 \\ b \to 1 \end{array}}$ avec $(*)$

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ donc $\boxed{\beta \longrightarrow \frac{\pi}{2}}$

Ex 2. Triangle inscrit dans un cercle

On considère C un point quelconque sur le cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. On appelle α l'angle interne en A au triangle (ABC), et β celui en B.

a) Déterminer les deux angles notés "?" sur la figure.
b) En déduire la valeur de l'angle interne en C au triangle (ABC).
c) Trouver les valeurs des deux derniers angles des triangles (AOC) et (OBC).



a) $? = \widehat{ACO}$ et $? = \widehat{OCB}$

$OC = OA = OB$ donc les triangles OCA et OCB sont des triangles isocèles en O

$\widehat{ACO} = \alpha$ $\qquad$ $\widehat{OCB} = \beta$

b) $\widehat{ACB} = \widehat{ACO} + \widehat{OCB} = \alpha + \beta$

c) $\widehat{COA} = \pi - (\alpha + \alpha) = \pi - 2\alpha$

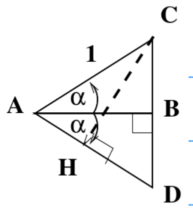
$\widehat{COB} = \pi - (\beta + \beta) = \pi - 2\beta$

Ex 4. Je vois le sinus de l'angle double

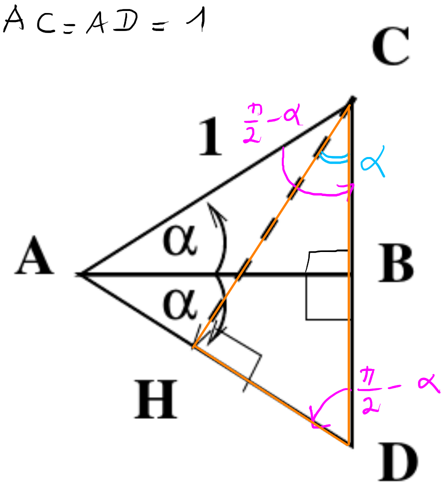
(A, B, C) et (A, B, D) sont deux triangles semblables, ils sont tout deux rectangles en B et leur hypoténuse est de longueur 1.
(CH) en pointillés sur la figure est une hauteur du triangle (ADC).

a) Que vaut l'angle en C entre la hauteur et le côté (CD) ?

b) Calculer la longueur (CH) de deux façon différente et en déduire la formule du sinus de l'angle double.



$AC = AD = 1$



a) triangles semblables : * $\hat{m}$ angles
* cotés proportionnels

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \widehat{ACB} + \frac{\pi}{2} = \pi \\ \alpha + \widehat{BDA} + \frac{\pi}{2} = \pi\end{array}\right\} \widehat{ACB} = \widehat{BDA} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

. $\widehat{HCD}$? dans le triangle CHD :

$$\widehat{HCD} + \widehat{CDH} + \widehat{DHC} = \pi$$

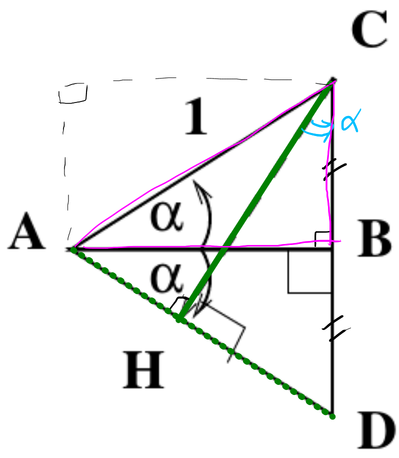
$$\widehat{HCD} + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \widehat{HCD} - \alpha + \pi = \pi$$

$$\boxed{\widehat{HCD} = \alpha}$$

b) CH ? $\sin(2\alpha) \overset{?}{=} 2 \sin\alpha \cos\alpha$?

. triangle rectangle AHC : $\sin(2\alpha) = \dfrac{CH}{AC} = CH$

$AC = AD = 1$



. $AC = AD = 1$; ACD triangle isocèle en A

$\Rightarrow$ hauteur issue de A = médiane = médiatrice

$$CB = BD = \frac{CD}{2}$$

. triangle rectangle en H CHD : $\cos\alpha = \dfrac{CH}{CD} = \dfrac{AB}{1}$

" " en B CBA : $\sin\alpha = \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{CB}{1}$

donc

$$CH = CD \cos\alpha = (2\,CB)\cos\alpha = (2\sin\alpha)\cos\alpha$$

$AD = AC = 1$

. $\underbrace{\text{Aire de } ADC}_{\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AD \times CH}{2}} = \underbrace{\text{Aire de } ABC}_{\frac{AB \times BC}{2}} + \underbrace{\text{Aire de } ABD}_{\frac{AB \times BD}{2}}$

$2\times$

$$CH \times 1 = AB \times (BC + BD) = AB \times CD = \cos\alpha \times 2\sin\alpha$$

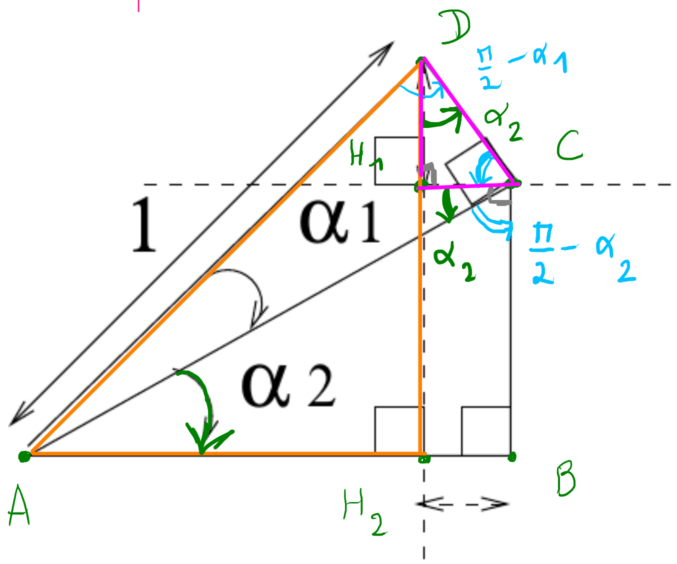
$$\Rightarrow \boxed{CH = \sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha}$$

CQFD

Ex 5. formules d'addition des cosinus et sinus

On considère un triangle rectangle dont l'hypoténuse est de longueur 1, "posé" sur un autre triangle rectangle comme sur la figure.

a) Calculer les longueurs de tous les côtés de ces deux triangles en terme des angles α_1 et α_2.



- $\underline{AD = 1}$
- $\cos \alpha_1 = AC/AD = \underline{AC}$
  $\sin \alpha_1 = CD/AD = \underline{CD}$
- $\cos \alpha_2 = AB/AC = AB / \cos \alpha_1$
  $\sin \alpha_2 = CB/AC = CB / \cos \alpha_1$

$\underline{AB} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$

$\underline{CB} = \cos \alpha_1 \sin \alpha_2$

b) Calculer les deux longueurs indiquées par des flèches pointillées en terme des angles α_1 et α_2.

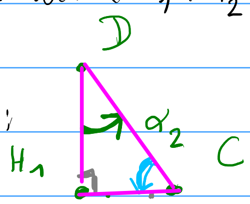
$H_2B = H_1C$

$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = H_2A/AD = H_2A/1 = (AB - H_2B)/1$

$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = H_2D/AD = H_2D/1 = (CB + H_1D)/1$

donc $\begin{cases} H_2B = AB - \cos(\alpha_1+\alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \cos(\alpha_1+\alpha_2) \\ H_1D = \sin(\alpha_1+\alpha_2) - CB = \sin(\alpha_1+\alpha_2) - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \end{cases}$

- dans CH_1D :



$\cos\alpha_2 = \dfrac{H_1D}{CD}$ et $\sin\alpha_2 = \dfrac{H_1C}{CD}$

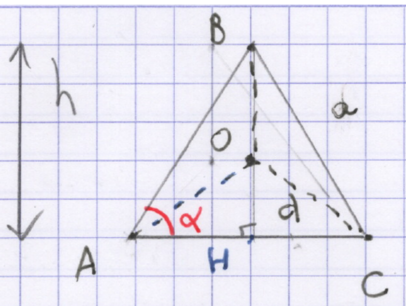
avec $CD = \sin\alpha_1$

$\begin{cases} H_2B = H_1C = CD \sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \\ H_1D = CD\cos\alpha_2 = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \end{cases}$

c)

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\alpha_1+\alpha_2) &= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 \\ \sin(\alpha_1+\alpha_2) &= \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 \end{aligned}}$$

Ex 6. Soit $(A_1A_2A_3)$ un triangle équilatéral de centre O et de côté a. Calculer d la distance du centre à l'un des sommets. Calculer α l'angle interne du triangle en l'un des sommets.



- $AH = HC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$

- $AH^2 + BH^2 = AB^2$

$\Rightarrow BH^2 = AB^2 - AH^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = 3\dfrac{a^2}{4}$

$\boxed{BH = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

dans un triangle équilateral, médiane hauteur, bissectrice, médiatrice relatives à un même côté sont confondues.

$\underline{d} = OA = OB = OC = \dfrac{2}{3} \times BH = \boxed{a\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

$\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \widehat{CBA} = \alpha$ et $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = \pi$

$\Rightarrow 3\alpha = \pi \Rightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{3} = 60°}$