Cycle pré-ingénieur 2$^{\text{ème}}$ année

Séries – Notes de cours

Romain Dujol

2022 – 2023

Table des matières

Thème n° 0

Comparaison locale des fonctions réelles

0.1 Négligeabilité. Domination

0.1.1 Négligeabilité

Définition 0.1 (Négligeabilité)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I telles que φ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

On dit que ***f* est négligeable devant φ au voisinage de *a*** si et seulement si il existe une fonction réelle ε définie sur I telle que

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x)$$

Cette relation se note

$$f = \mathrm{o}_a(\varphi) \qquad \text{ou} \qquad f(x) = \mathrm{o}_{x \to a}\big(\varphi(x)\big) \qquad \text{(notation de Landau)}$$

ou

$$f \underset{a}{\ll} \varphi \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x \to a}{\ll} \varphi(x) \qquad \text{(notation de Hardy)}$$

(Si il n'y a pas d'ambigüité, on omettra d'indiquer le point a.)

Remarque. La notation $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ est impropre, car plusieurs fonctions différentes peuvent être négligeables devant une même fonction φ au voisinage de a, c'est-à-dire

$$f_1 = \mathrm{o}_a(\varphi) \quad , \quad f_2 = \mathrm{o}_a(\varphi) \qquad \text{avec } f_1 \neq f_2$$

Exemple. $\quad x = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(x^2) \quad , \quad \sqrt{x} = \mathrm{o}_{x \to +\infty}(x^2) \quad , \quad \sin^3 x = \mathrm{o}_{x \to 0}(x)$

Proposition 0.1 (Négligeabilité devant une constante non nulle)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction réelle définie sur I. Alors

$$f = \mathrm{o}_a(1) \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Proposition 0.2 (Caractérisation rapide)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I telles que φ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$.

$$f = \mathrm{o}_a(\varphi) \Longleftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0 \\ \varphi(a) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0 \end{cases}$$

Proposition 0.3 (Règles opératoires de o_a)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I telles que φ et ψ ne s'annulent pas sur $I\setminus\{a\}$.

1. Si $f=\mathrm{o}_a(\varphi)$ et $g=\mathrm{o}_a(\varphi)$, alors $f+g=\mathrm{o}_a(\varphi)$.
2. Si $f=\mathrm{o}_a(\varphi)$ alors pour tout réel λ, $\lambda f=\mathrm{o}_a(\varphi)$.
3. Si $f=\mathrm{o}_a(\varphi)$ et $g=\mathrm{o}_a(\psi)$, alors $fg=\mathrm{o}_a(\varphi\psi)$.
4. Si $f=\mathrm{o}_a(\varphi)$ et $\varphi=\mathrm{o}_a(\psi)$, alors $f=\mathrm{o}_a(\psi)$.
5. Si h est une fonction réelle définie au voisinage de $b\in\overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to b} h(x)=a\\ f=\mathrm{o}_a(\varphi)\end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad f\circ h=\mathrm{o}_b(\varphi\circ h)$$

0.1.2 Domination

Définition 0.2 (Domination)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I telles que φ ne s'annule pas sur $I\setminus\{a\}$.

On dit que ***f* est dominée par φ au voisinage de *a*** si et seulement si il existe une fonction réelle χ définie sur I telle que

$$\chi \text{ est bornée au voisinage de } a \qquad\text{et}\qquad \forall x\in I,\ f(x)=\chi(x)\varphi(x)$$

Cette relation se note

$$f=\mathrm{O}_a(\varphi) \qquad\text{ou}\qquad f(x)=\mathrm{O}_{x\to a}\big(\varphi(x)\big) \qquad\text{(notation de Landau)}$$

ou

$$f \underset{a}{\preccurlyeq} \varphi \qquad\text{ou}\qquad f(x) \underset{x\to a}{\preccurlyeq} \varphi(x) \qquad\text{(notation de Hardy)}$$

(Si il n'y a pas d'ambigüité, on omettra d'indiquer le point a.)

Remarque. La notation $f=\mathrm{O}_a(\varphi)$ est impropre, car plusieurs fonctions différentes peuvent être dominées par une même fonction φ au voisinage de a, c'est-à-dire

$$f_1=\mathrm{O}_a(\varphi)\quad,\quad f_2=\mathrm{O}_a(\varphi)\qquad\text{avec } f_1\neq f_2$$

Exemple. $\quad x=\mathrm{O}_{x\to+\infty}(x^2)\quad,\quad 2x^2=\mathrm{O}_{x\to+\infty}(x^2)\quad,\quad x^2=\mathrm{O}_{x\to0}(x)$

Proposition 0.4 (Domination devant une constante non nulle)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction réelle définie sur I. Alors

$$f=\mathrm{O}_a(1)\iff f \text{ est bornée au voisinage de } a$$

Proposition 0.5 (Caractérisation rapide)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I telles que φ ne s'annule pas sur $I\setminus\{a\}$.

$$f=\mathrm{O}_a(\varphi)\iff\begin{cases}\dfrac{f}{\varphi} \text{ est bornée au voisinage de } a\\ \varphi(a)=0\Longrightarrow f(a)=0\end{cases}$$

Proposition 0.6 (Règles opératoires de O_a)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I telles que φ et ψ ne s'annulent pas sur $I \backslash \{a\}$.

1. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $g = \mathrm{O}_a(\varphi)$, alors $f + g = \mathrm{O}_a(\varphi)$.
2. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ alors pour tout réel λ, $\lambda f = \mathrm{O}_a(\varphi)$.
3. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $g = \mathrm{O}_a(\psi)$, alors $fg = \mathrm{O}_a(\varphi\psi)$.
4. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{O}_a(\psi)$.
5. Si h est une fonction réelle définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to b} h(x) = a \\ f = \mathrm{O}_a(\varphi) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f \circ h = \mathrm{O}_b(\varphi \circ h)$$

Proposition 0.7 (Régles opératoires communes)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I telles que φ et ψ ne s'annulent pas sur $I \backslash \{a\}$.

1. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ alors $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$.
2. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $g = \mathrm{o}_a(\psi)$, alors $fg = \mathrm{o}_a(\varphi\psi)$.
3. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{o}_a(\psi)$.
4. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{o}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{o}_a(\psi)$.

0.1.3 Comparaisons de référence

Proposition 0.8 (Puissances)**.** Soit α et β deux nombres réels. Alors

$$\alpha < \beta \iff x^\alpha = \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(x^\beta\right)$$
$$\alpha > \beta \iff x^\alpha = \mathrm{o}_{x \to 0^+}\left(x^\beta\right)$$

Proposition 0.9 (Comparaisons logarithmes/puissances)**.** Pour tout réel α, on a :

$$\forall \beta > 0, (\ln x)^\alpha = \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(x^\beta\right)$$
$$\forall \gamma < 0, (\ln x)^\alpha = \mathrm{o}_{x \to 0^+}\left(x^\gamma\right)$$

Proposition 0.10 (Comparaisons puissances/exponentielles)**.** Pour tout réel α, on a :

$$\forall a \in]1, +\infty[, x^\alpha = \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(a^x\right)$$
$$\forall a \in [0, 1[, a^x = \mathrm{o}_{x \to +\infty}\left(x^\alpha\right)$$

0.2 Équivalence

On rappelle ici l'intérêt des équivalents pour déterminer rapidement certaines limites dans le cas de formes indéterminées... à condition de les utiliser correctement !

0.2.1 Définition

Définition 0.3 (Équivalence)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

On dit que **f est équivalente à φ au voisinage de a** si et seulement si il existe une fonction réelle η définie sur I telle que

$$\lim_{x\to a} \eta(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I,\ f(x) = \eta(x)\varphi(x)$$

Cette relation se note

$$f \underset{a}{\sim} \varphi \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(x)$$

(Si il n'y a pas d'ambigüité, on omettra d'indiquer le point a.)

Exemple. $\quad x^2 + x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \quad , \quad \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

Proposition 0.11 (Équivalence devant une constante non nulle)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction réelle définie sur I. Alors

$$\forall \ell \in \mathbb{R}^*,\ f \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

Remarque. $f \underset{a}{\sim} 0$ impliquerait que f s'annule sur I, ce qui est impossible par hypothèse.

$$\boxed{f \underset{a}{\sim} 0 \text{ N'A AUCUN SENS !}}$$

Proposition 0.12 (Caractérisation rapide)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

$$f \underset{a}{\sim} \varphi \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 \\ \varphi(a) = 0 \Longrightarrow f(a) = 0 \end{cases}$$

0.2.2 Règles opératoires

Cas général

Proposition 0.13 (Règles opératoires de $\underset{a}{\sim}$)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

1. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $g \underset{a}{\sim} \psi$, alors $fg \underset{a}{\sim} \varphi\psi$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{\varphi}$.
3. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $g \underset{a}{\sim} \psi$, alors $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\sim} \dfrac{\varphi}{\psi}$.

4. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f \underset{a}{\sim} \psi$.
5. Si f et φ sont positives sur I et $f \underset{a}{\sim} \varphi$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} \varphi^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
6. Si h est une fonction réelle définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to b} h(x) = a \\ f \underset{a}{\sim} \varphi \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f \circ h \underset{b}{\sim} \varphi \circ h$$

Addition

Remarque. « Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $g \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f + g \underset{a}{\sim} \varphi + \psi$ » est **fausse** dans le cas général.

Exemple. Au voisinage de $a = 0$, $\begin{cases} x + x^2 \underset{0}{\sim} x \\ -x + x^2 \underset{0}{\sim} -x \end{cases}$. Mais

$$(x + x^2) + (-x + x^2) = 2x^2 \underset{0}{\not\sim} 0 = x + (-x)$$

$\boxed{\text{ON NE PEUT PAS ADDITIONNER DES ÉQUIVALENTS N'IMPORTE COMMENT!}}$

On peut toutefois isoler certains cas où cela est possible.

Proposition 0.14 (Addition d'équivalents)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, g et φ, ψ des fonctions réelles définies sur I telles que φ et ψ ne s'annulent pas sur $I \setminus \{a\}$ et que :

$$f \underset{a}{\sim} \varphi \qquad \text{et} \qquad g \underset{a}{\sim} \psi$$

1. Si φ et ψ sont de même signe constant au voisinage de a, alors $f + g \underset{a}{\sim} \varphi + \psi$.
2. Si $\varphi : x \mapsto \lambda x^\alpha$ et $\psi : x \mapsto \mu x^\beta$, alors $f + g \underset{a}{\sim} \varphi + \psi$ sauf si $\alpha = \beta$ et $\lambda + \mu = 0$.

Composition par la gauche

(La propriété 5 de la proposition 0.13 assure qu'il est possible de composer les équivalences par la droite.)

Remarque. La proposition

« Si h est une fonction réelle définie au voisinage de $\varphi(a)$, et $f \underset{a}{\sim} \varphi$ alors $h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ \varphi$. »

est **fausse** en général.

Exemple. Au voisinage de $a = +\infty$, $x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$. Mais $e^{x+1} \underset{x \to +\infty}{\not\sim} e^x$.

Proposition 0.15 (Composition à gauche par l'exponentielle)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f et φ deux fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I \setminus \{a\}$. Alors

$$\exp \circ f \underset{a}{\sim} \exp \circ \varphi \iff \lim_a (f - \varphi) = 0$$

Proposition 0.16 (Composition à gauche par le logarithme)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I et f et φ deux fonctions réelles définies sur I.

Si φ est strictement positive sur $I\backslash\{a\}$ et admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}_+\backslash\{1\}$, alors

$$f \underset{a}{\sim} \varphi \Longrightarrow \ln\circ f \underset{a}{\sim} \ln\circ\varphi$$

Exemple. Au voisinage de $a = 0$, $1+x \underset{x\to 0}{\sim} 1+2x$. Mais $x \underset{x\to 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\not\sim} \ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$.

On ne peut pas prendre le logarithme d'équivalents n'importe comment!

0.2.3 Lien avec o_a et O_a

Proposition 0.17. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I.
Soit f, φ et ψ des fonctions réelles définies sur I qui ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$.

1. Si $f = \mathrm{o}_a(\varphi)$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f = \mathrm{o}_a(\psi)$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $\varphi = \mathrm{o}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{o}_a(\psi)$.
3. $f \underset{a}{\sim} \varphi \iff f - \varphi = \mathrm{o}_a(\varphi)$
4. Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi \underset{a}{\sim} \psi$, alors $f = \mathrm{O}_a(\psi)$.
5. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(\psi)$, alors $f = \mathrm{O}_a(\psi)$.
6. Si $f \underset{a}{\sim} \varphi$ alors $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(f)$.

Remarque. « Si $f = \mathrm{O}_a(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{O}_a(f)$ alors $f \underset{a}{\sim} \varphi$ » est **fausse** en général.

Exemple. Au voisinage de $a = +\infty$, $x = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(2x)$ et $2x = \mathrm{O}_{x\to+\infty}(x)$. Mais $2x \underset{x\to+\infty}{\not\sim} x$.

0.2.4 Équivalents usuels

Proposition 0.18 (Cas simples de calcul d'équivalents)**.**

1. Tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$ ou $-\infty$.
   Tout polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré en 0.
2. Toute fraction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus haut degré en $\pm\infty$.
   Toute fraction rationnelle est équivalente au quotient de ses termes de plus bas degré en 0.
3. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)\cdot(x-a)$.
4. Si f admet un développement limité au voisinage de 0, alors f est équivalente au terme non nul de plus faible ordre en 0.

Exemple.

1. $x^4 + x^2 + 2x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^4$
   $x^4 + x^2 + 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x$
2. $\dfrac{x^3 - x}{x^4 + x^2 + 2x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{x^4} = \dfrac{1}{x}$
   $\dfrac{x^3 - x}{x^4 + x^2 + 2x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{2x} = -\dfrac{1}{2}$
3. Avec $f = \exp$ en $a = 0$, $e^x - 1 = \exp(x) - \exp(0) \underset{x\to 0}{\sim} \exp'(0)\cdot(x-0) = x$.
4. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \cdots \underset{x\to 0}{\sim} x$

Théorème 0.1 (Équivalents des fonctions usuelles)**.**

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Pour tout réel α fixé, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$

Remarque. La plupart des équivalents usuels sont exprimés au voisinage de 0. Pour obtenir des équivalents au voisinage d'une autre valeur finie a, il suffit d'effectuer un changement de variable du type $x = a \pm h$ avec h au voisinage de 0.

Exercice. *Déterminer les limites suivantes :*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

3. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} (\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)}$

Solution.

1. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2\tan x = 0$ et $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$, on a $\ln(1+2\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\tan x$.
   Comme $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$, il vient que $\ln(1+2\tan x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$.
   De plus $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$: on conclut alors que $\displaystyle\frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2$, puis que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x} = 2}$.

2. Passons au logarithme : $\displaystyle\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$, on a $\displaystyle\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} x\cdot\frac{1}{x} = 1$$

   On conclut que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$, puis (exp étant continue en 1) $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$.

3. On effectue le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{4} - h$ et on passe au logarithme :

$$\ln\left((\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)}\right) = \frac{\ln\tan x}{\tan(4x)} = \frac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{\tan(\pi-4h)}$$

   Étudions chacun des termes :

   · $\displaystyle\tan\left(\frac{\pi}{4}-h\right) = \frac{1-\tan h}{1+\tan h}$, donc $\displaystyle\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-h\right) = \ln(1-\tan h) - \ln(1+\tan h)$. Or

$$\ln(1-\tan h) \underset{h\to 0}{\sim} -\tan h \underset{h\to 0}{\sim} -h \qquad \text{et} \qquad -\ln(1+\tan h) \underset{h\to 0}{\sim} -\tan h \underset{h\to 0}{\sim} -h$$

   On est dans les conditions de la propriété 2 de la proposition 0.14, donc

$$\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-h\right) = \ln(1-\tan h) - \ln(1+\tan h) \underset{h\to 0}{\sim} -2h$$

   · $\tan(\pi-4h) = \tan(-4h) \underset{h\to 0}{\sim} -4h$

   Donc $\displaystyle\ln\left((\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)}\right) = \frac{\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{\tan(\pi-4h)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-2h}{-4h} = \frac{1}{2}$.
   On conclut que $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \ln\left((\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)}\right) = \frac{1}{2}$, puis (exp étant continue en $1/2$) :

$$\boxed{\lim_{x\to \pi/4} (\tan x)^{\operatorname{cotan}(4x)} = e^{1/2} = \sqrt{e}}$$

0.3 Développements limités au voisinage de 0

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)\\
\operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\operatorname{th} x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\mathrm{o}\left(x^8\right)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\tan x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\mathrm{o}\left(x^8\right)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
-\ln(1-x) &= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}\left(x^n\right)\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\arcsin x &= x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}
$$

Chapitre 0. Comparaison locale des fonctions réelles — TD

Exercice 0.1. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^t - 1}{1 - t + \ln(1+t)}$
2. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x}$

Exercice 0.2. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x^x} + \frac{1}{x\ln x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

Exercice 0.3. *Déterminer des équivalents simples de :*

1. $x + \sin x$ *en* 0, *puis en* $+\infty$
2. $x - \sin x$ *en* 0, *puis en* $+\infty$
3. $\ln(\tan x)$ *en* 0^+, *puis en* $\dfrac{\pi}{4}$
4. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan x}$ *en* 0
5. $\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2}$ *en* 0^+, *puis en* $+\infty$

Exercice 0.4. *Déterminer les équivalents en* 0 *de :*

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x \arctan x}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1 - \operatorname{ch} x}{1 - \cos x}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x - x\ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$

Exercice 0.5. *Déterminer les équivalents en* $+\infty$ *de :*

1. $u_n = \dfrac{e^{1/n} - \cos\dfrac{1}{n}}{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}$
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$
3. $u_n = \dfrac{\ln\left(\cos\dfrac{a}{n}\right)}{\ln\left(\cos\dfrac{b}{n}\right)}$ *avec* a *réel et* b *réel non nul*
4. $u_n = e^{1/n} - e^{1/(n+1)}$
5. $u_n = \arctan n - \arccos\dfrac{1}{n}$
6. $u_n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)}{\sin\left(\dfrac{n+1}{n^2+2}\right)}$
7. $u_n = e\cdot\sqrt{n^2-n+1} - n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 0.6. *Pour tout entier naturel supérieur ou égal à deux, on note* $u_n = \left[\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}\right]^{n\ln n}$.

1. *Déterminer un équivalent de* $\ln u_n$ *en* $+\infty$.
2. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Chapitre 0. Comparaison locale des fonctions réelles — TD (Corrigé)

Exercice 0.1.

1. $\dfrac{t^t-1}{1-t+\ln(1+t)} \xrightarrow[t\to1]{} \dfrac{1^1-1}{1-1+\ln(1+1)} = \dfrac{0}{\ln 2} = 0$
2. $\dfrac{\ln t}{t-1} = \dfrac{\ln t - \ln 1}{t-1} \xrightarrow[t\to1]{} \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$
3. $\ln \dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x} = \sqrt{x}\ln x - x\ln\sqrt{x} = \sqrt{x}\ln x - \dfrac{x}{2}\ln x = \left(\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}\right)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{2}\ln x$

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x} = -\infty$ puis, par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

Exercice 0.2.

1. $\dfrac{1}{1-x^x} + \dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{1}{1-e^{x\ln x}} + \dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{1}{1-e^y} + \dfrac{1}{y}$ avec $y = x\ln x$

   Comme $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0^-$, il vient que $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^x} + \dfrac{1}{x\ln x}$ admet une limite en 0^+ si et seulement si $y \mapsto \dfrac{1}{1-e^y} + \dfrac{1}{y}$ admet une limite en 0^- (auquel cas, leurs valeurs sont égales).

   On a $\dfrac{1}{1-e^y} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{y+1-e^y}{(1-e^y)y}$, puis :

   - $y+1-e^y = y+1-\left[1+y+\dfrac{y^2}{2}+\mathrm{o}(y^2)\right] = -\dfrac{y^2}{2}+\mathrm{o}(y^2) \underset{y\to0^-}{\sim} -\dfrac{y^2}{2}$
   - $(1-e^y)y \underset{y\to0^-}{\sim} -y\cdot y = -y^2$

   D'où $\dfrac{1}{1-e^y} + \dfrac{1}{y} \underset{y\to0^+}{\sim} \dfrac{-y^2/2}{-y^2} = \dfrac{1}{2}$ puis $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{1-x^x} + \dfrac{1}{x\ln x} = \lim\limits_{y\to0^-} \dfrac{1}{1-e^y} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$.

2. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)} - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/2} - \sqrt{x}$

   $$= \sqrt{x}\left[\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/2} - 1\right] \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}.\quad \text{Donc } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}.$$

   Remarque. On peut aussi passer par l'expression conjuguée.

Exercice 0.3.

1. En 0, $x + \sin x \underset{x\to0}{\sim} x + x = 2x$.

   En $+\infty$, $x + \sin x = x + \mathrm{o}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
2. En 0, $x - \sin x = x - \left[x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right] = \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$.

   En $+\infty$, $x - \sin x = x - \mathrm{o}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
3. En 0^+, $\tan x \underset{x\to0^+}{\sim} x$, donc $\ln(\tan x) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln x$.

   En $\dfrac{\pi}{4}$, on note $f : x \mapsto \ln(\tan x)$. Alors $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ et $f'(x) = \dfrac{\tan'(x)}{\tan x} = \dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x}$.

   Donc $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+1^2}{1} = 2 \neq 0$ et $\ln(\tan x) = f(x) - f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \underset{x\to\pi/4}{\sim} f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

   Remarque. On peut aussi appliquer la formule de TAYLOR-YOUNG à l'ordre un pour $\ln\circ\tan$ en $\pi/4$

4. On a $\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{\tan x - x}{x \cdot \tan x}$, puis :
   - $\tan x - x = \left[x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$
   - $x \cdot \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x \cdot x = x^2$

   D'où $\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3/3}{x^2} = \frac{x}{3}$.
5. En 0^+, $\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x} - \sqrt[3]{2x^2} = x^{1/2} - \sqrt[3]{2}x^{2/3} \underset{x\to 0^+}{\sim} x^{1/2} = \sqrt{x}$.

   En $+\infty$, $\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2} = \sqrt{x^2 \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)} - \sqrt[3]{x^3 \cdot \left(1+\frac{2}{x}\right)} = x \cdot \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2} - \left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/3}\right]$

   $$= x \cdot \left[\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \left(1+\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = x \cdot \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

   $$= -\frac{1}{6} + o(1) \underset{x\to +\infty}{\sim} -\frac{1}{6}$$

Exercice 0.4.

1. $f_1(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x \cdot x} = 1$
2. $f_2(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2/2} = -1$
3.
   - $e^x - \cos x - x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] - x = x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$
   - $x - \ln(1+x) = x - \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

   D'où $f_3(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2/2} = 2$.
4.
   - $\sin^2 x = \left[x + o(x^2)\right]^2 = x^2\,[1 + o(x)]^2 = x^2\,[1 + o(x)] = x^2 + o(x^3)$

     $x \ln(1+x) = x \cdot \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

     Donc $\sin^2 x - x\ln(1+x) = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{2}$.
   - $e^x + \cos x - \sin x - 2 = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] + \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right] - \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] - 2 = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

   D'où $f_4(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3/2}{x^3/3} = \frac{3}{2}$.

Exercice 0.5. On utilisera le changement de variable $h = \frac{1}{n}$: ainsi rechercher l'équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini revient à le chercher lorsque h tend vers 0^+.

ATTENTION. Il faut alors reconvertir le résultat obtenu en h en remplaçant h par son expression réelle, i.e. $\frac{1}{n}$.

1.
   - $e^h - \cos h = [1 + h + o(h)] - [1 + o(h)] = h + o(h) \underset{h\to 0^+}{\sim} h$
   - $1 - \sqrt{1-h^2} = 1 - (1-h^2)^{1/2} \underset{h\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{2}(-h^2) = \frac{h^2}{2}$

   D'où $u_n \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{h}{h^2/2} = \frac{2}{h}$, c'est-à-dire $u_n \sim 2n$.

2. $\sqrt{h}-\dfrac{1}{\sqrt{h}}\sin h=\sqrt{h}-\dfrac{1}{\sqrt{h}}\left[h-\dfrac{h^3}{6}+\mathrm{o}(h^3)\right]=\sqrt{h}-\left[\sqrt{h}-\dfrac{h^{5/2}}{6}+\mathrm{o}(h^{5/2})\right]$

$$=\frac{h^{5/2}}{6}+\mathrm{o}(h^{5/2})\underset{h\to0^+}{\sim}\frac{h^{5/2}}{6}.\quad \text{Donc } u_n\sim\frac{1}{6n^{5/2}}.$$

3. Comme $\lim\limits_{h\to0^+}\cos(ah)=1$, il vient que $\ln(\cos(ah))\underset{h\to0^+}{\sim}\cos(ah)-1\underset{h\to0^+}{\sim}\dfrac{(ah)^2}{2}$.

   De même, $\ln(\cos(bh))\underset{h\to0^+}{\sim}\dfrac{(bh)^2}{2}$. D'où $u_n\sim\dfrac{(ah)^2/2}{(bh)^2/2}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

4. $e^{1/n}-e^{1/(n+1)}=e^{1/(n+1)}\left[e^{1/n-1/(n+1)}-1\right]=e^{1/(n+1)}\left[e^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right]$

   - $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{1/(n+1)}=1$, donc $e^{1/(n+1)}\sim1$
   - $e^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\sim\dfrac{1}{n(n+1)}\sim\dfrac{1}{n\cdot n}=\dfrac{1}{n^2}$

   D'où $u_n\sim\dfrac{1}{n^2}$.

5. $\arctan\dfrac{1}{h}-\arccos h=\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan h\right)-\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin h\right)=\arcsin h-\arctan h$

$$=\left[h+\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}(h^3)\right]-\left[h-\frac{h^3}{3}+\mathrm{o}(h^3)\right]=\frac{h^3}{2}+\mathrm{o}(h^3)\underset{h\to0^+}{\sim}\frac{h^3}{2}.\quad\text{Donc } u_n\sim\frac{1}{2n^3}.$$

6.
   - Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n+2}=1$, il vient que $\ln\dfrac{n+1}{n+2}\sim\dfrac{n+1}{n+2}-1=\dfrac{-1}{n+2}\sim-\dfrac{1}{n}$.
   - Comme $\dfrac{n+1}{n^2+2}\sim\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n^2+2}$ et $\sin\dfrac{n+1}{n^2+2}\sim\dfrac{n+1}{n^2+2}\sim\dfrac{1}{n}$.

   D'où $u_n\sim\dfrac{-1/n}{1/n}=-1$.

7. $e\cdot\sqrt{n^2-n+1}=e\cdot\sqrt{n^2\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=en\left[1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right]^{1/2}$

$$=en\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=en\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

   $n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=n\exp\left[n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]=n\exp\left[n\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{3n^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)\right]$

$$=n\exp\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=en\exp\left[-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=en\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=en\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

   D'où $e\cdot\sqrt{n^2-n+1}-n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=en\left[\dfrac{-1}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right]\sim en\cdot\dfrac{-1}{12n^2}=\dfrac{-e}{12n}$.

Exercice 0.6.

1. $1+n\sim n$, donc $\ln(1+n)\sim\ln n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}=1$ et :

$$\ln u_n=n\ln n\ln\left[\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\right]\sim n\ln n\left[\frac{\ln(1+n)}{\ln n}-1\right]=n\ln n\cdot\frac{\ln(1+n)-\ln n}{\ln n}=n\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$\sim n\cdot\frac{1}{n}$$

2. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=1$ puis, par continuité de exp en 1, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^1=e$.

Première partie

Séries numériques

Thème n° 1

Généralités

Dans tout le chapitre, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.1 Définition

1.1.1 Série. Série numérique

Définition 1.1 (Série)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

La **série de terme général u_n**, notée $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est le couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ où la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$$

u_n est le **$n^{\text{ème}}$ terme** ou **terme général de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$**. S_n est la **somme partielle d'ordre n de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$**.

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est définie à partir d'un certain rang $n_0\in\mathbb{N}$, on définit de la même manière la série numérique $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ avec $S_n=\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ pour tout $n\geq n_0$.

Définition 1.2 (Série numérique)**.**

Une **série numérique** est une série à valeurs dans $E=\mathbb{K}$ muni de la valeur absolue $|\cdot|$.

Exemple (Séries numériques réelles).

1. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n$ est la série de terme général n. La $n^{\text{ème}}$ somme partielle est calculable : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Soit x un nombre réel. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^n$ est la série de terme général x^n. La $n^{\text{ème}}$ somme partielle est calculable :
$$S_n=\sum_{k=0}^{n} x^k=\begin{cases}\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x\neq 1\\ n+1 & \text{si } x=1\end{cases}$$
3. $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ est la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ et la $n^{\text{ème}}$ somme partielle est $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

1.1.2 Structure algébrique de l'ensemble des séries

Définition 1.3 (Opérations)**.** On munit l'ensemble $\mathscr{S}$ des séries à valeurs dans E de deux lois :

— la loi interne $+$: $\begin{array}{rcl} \mathscr{S}\times\mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n, \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n\right) & \longmapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n+v_n) \end{array}$;

— la loi externe $\cdot$: $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times\mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ \left(\lambda, \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n\right) & \longmapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\lambda\cdot u_n) \end{array}$.

Théorème 1.1 (Structure algébrique de l'ensemble des séries)**.**

L'ensemble des séries à valeurs dans E muni des lois $+$ et $\cdot$ vues en définition 1.3 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2 Convergence

1.2.1 Définition

Définition 1.4 (Série convergente)**.**

Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à valeurs dans E **converge** si et seulement la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge dans $(E, \|\cdot\|)$.

Auquel cas, on définit la **somme de la série** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{u_n}$, notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Une série **diverge** si et seulement si elle ne converge pas.

Deux séries sont dites **de même nature** si et seulement si elles convergent toutes les deux ou si elles divergent toutes les deux.

Exemple (avec $E=\mathbb{R}$).

- La suite des sommes partielles de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n$ a pour terme général $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

  Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n$ diverge.

- La suite des sommes partielles de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^n$ a pour terme général $S_n = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x\neq 1 \\ n+1 & \text{si } x=1 \end{cases}$ qui ne converge que si $|x|<1$.

  Donc si $|x|<1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Sinon, elle diverge.

Proposition 1.1 (Changement d'indice de départ)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à valeurs dans E et n_0 un entier naturel. Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.

Si de plus, les deux séries convergent, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration. Pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge. On en déduit que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$ converge aussi, puis que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, alors la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ converge. On en déduit que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge, puis que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. □

Remarque. L'indice de départ n'a donc aucune influence sur la convergence d'une série numérique. Lorsque l'étude d'une série se réduit à celle de sa convergence, on pourra noter la série étudiée $\sum_{n} u_n$ ou $\sum u_n$ lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité.

IMPORTANT. *Tous les résultats de convergence et/ou divergence de cette partie restent donc valables si on change l'indice de départ des séries numériques dans leur énoncé.*

1.2.2 Reste d'une série convergente

Définition 1.5 (Reste d'ordre n)**.** Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à valeurs dans E convergente.

On appelle **reste d'ordre n de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$** la somme de la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

ATTENTION. **Il n'existe pas de reste pour une série divergente!**

Remarque. Pour simplifier l'écriture, on note souvent :

— S_n la somme partielle d'ordre n ;

— S la somme (lorsque la série numérique converge) ;

— R_n le reste d'ordre n (lorsque la série numérique converge).

On a alors $\boxed{R_n = S - S_n}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$

Proposition 1.2 (Convergence du reste)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique convergente et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses restes d'ordre n.

Alors $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E.

Démonstration. Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers la somme S. Donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S-S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S-S=0_E$. □

1.2.3 Condition nécessaire de convergence

Théorème 1.2 (Condition nécessaire de convergence)**.**
Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à valeurs dans E converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E.

Démonstration. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série convergente et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.
Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée S.
$\forall n\geq 1,\ u_n = S_n - S_{n-1}$: donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0_E$. □

Corollaire (Condition nécessaire de convergence)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0_E, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

IMPORTANT. Dans un tel cas, on dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **diverge grossièrement**.

Exemple (Séries numériques réelles).

1. Comme $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$ diverge grossièrement.
2. Soit x un nombre réel.
   — si $|x| > 1$, alors $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge : donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ diverge grossièrement ;
   — si $x = -1$, alors $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge : donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ diverge grossièrement ;
   — si $x = 1$, alors $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 : donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ diverge grossièrement ;
   — si $|x| < 1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge et $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Remarque. Il ne s'agit que d'une condition nécessaire de convergence.

Il existe des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ divergentes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

Théorème 1.3 (Série harmonique)**.** On appelle **série harmonique** la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on note H_n sa $n^{\text{ème}}$ somme partielle, c'est-à-dire $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
La série harmonique diverge.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge. Alors $(H_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite H.

Soit n un entier naturel non nul. Alors pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$, $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}$. Donc :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

En passant à la limite dans l'inégalité, il vient que $0 = H - H \geq \frac{1}{2}$, ce qui est impossible.

On en conclut que donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. □

1.2.4 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

Cas général

Théorème 1.4. L'ensemble $\mathscr{S}_c$ des séries à valeurs dans E convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries à valeurs dans E (cf. théorème 1.1).

De plus, l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{S}_c & \longrightarrow & E \\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$ est une application linéaire sur $\mathscr{S}_c$.

Remarque. Donc :

— la somme de deux séries convergentes est convergente;

— la somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente.

ATTENTION. Il n'existe pas de résultat général pour la somme de deux séries divergentes. En effet :

— $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 1$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)$ sont (grossièrement) divergentes et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} [1+(-1)] = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 0$ est convergente;

— $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 1$ est (grossièrement) divergente et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (1+1) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2$ est (grossièrement) divergente.

+	conv.	div.
conv.	conv.	div.
div.	div.	???

Cas des séries numériques

Théorème 1.5 (Cas $E=\mathbb{C}$)**.**
Une série numérique à valeurs complexes $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\Re\mathrm{e}\, u_n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\Im\mathrm{m}\, u_n)$ convergent toutes les deux. Auquel cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\Re\mathrm{e}\, u_n) + i \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\Im\mathrm{m}\, u_n)$.

IMPORTANT. Autrement dit, on ramène l'étude sur $E=\mathbb{C}$ à celle sur $E=\mathbb{R}$.

Définition 1.6 (Série-produit)**.** On munit l'ensemble $\mathscr{S}$ des séries numériques de la loi :

$$\times : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}\times\mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n, \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n\right) & \longmapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) \end{array}$$

Théorème 1.6. L'ensemble des séries numériques muni des lois + et $\cdot$ (définition 1.3) et $\times$ (définition 1.6) est une $\mathbb{K}$-algèbre vectorielle.

Cas des séries numériques réelles

Proposition 1.3 (Positivité de la somme)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à valeurs dans $E=\mathbb{R}$ convergente telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$.

Démonstration. On a donc pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} u_k \geq 0$. On conclut en passant à la limite. □

Proposition 1.4 (Croissance de la somme)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à valeurs dans $E=\mathbb{R}$ convergentes telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq v_n$.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration. On a donc pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$. On conclut en passant à la limite. □

Thème n° 2

Séries numériques à termes réels positifs

Dans tout le reste de cette partie, on considère le cas $E = \mathbb{K}$.

2.1 Lemme fondamental

Proposition 2.1. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes réels positifs.

Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est croissante.

Démonstration. Pour tout entier naturel n, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. □

Théorème 2.1 (Lemme fondamental des séries à termes positifs)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes réels positifs. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge} \iff \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$$

Démonstration. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

($\Rightarrow$) Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc est majorée.

($\Leftarrow$) D'après la proposition 2.1, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Elle est également majorée, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. □

Proposition 2.2. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes réels positifs.

1. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

Démonstration. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$: d'après la proposition 2.1, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la somme S. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n \leq \lim_{n\to+\infty} S_n = S$.
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge donc, d'après le lemme fondamental des séries à termes positifs, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. □

2.2 Théorèmes de comparaison

2.2.1 Théorème de majoration

Théorème 2.2 (Théorème de majoration des séries à termes positifs)**.**
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques à termes réels positifs telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.
Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge également.

Démonstration. D'après la proposition 2.2, $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge d'après le lemme fondamental des séries à termes positifs. □

Corollaire. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques à termes réels positifs telles que $u_n = \mathrm{O}_{n\to+\infty}(v_n)$.
Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge également.

Démonstration. $u_n = \mathrm{O}_{n\to+\infty}(v_n)$, donc $\exists N\in\mathbb{N}, \exists C\in\mathbb{R}_+, \forall n\geq N,\ u_n \leq C\,v_n$. $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge donc :

1. $\sum_{n\geq N} v_n$ converge d'après la proposition 1.1 ;
2. puis $\sum_{n\geq N} (C\,v_n) = C\cdot \sum_{n\geq N} v_n$ converge d'après le théorème 1.4 ;
3. puis $\sum_{n\in\mathbb{N}} (C\,v_n)$ converge d'après la proposition 1.1 ;
4. enfin $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge d'après le théorème de majoration des séries à termes positifs. □

Corollaire. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques à termes réels positifs telles que $u_n = \mathrm{o}_{n\to+\infty}(v_n)$.
Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge également.

Démonstration. $u_n = \mathrm{o}_{n\to+\infty}(v_n)$, donc $u_n = \mathrm{O}_{n\to+\infty}(v_n)$. On conclut en utilisant le corollaire précédent. □

2.2.2 Théorème de minoration

Théorème 2.3 (Théorème de minoration des séries à termes positifs)**.**
Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques à termes réels positifs telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.
Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge également.

Démonstration. C'est la contraposition du théorème de majoration des séries à termes positifs. □

On peut donc formuler les contraposées des corollaires précédents.

Corollaire. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques à termes réels positifs telles que $u_n = \mathrm{O}_{n\to+\infty}(v_n)$.
Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge également.

Corollaire. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques à termes réels positifs telles que $u_n = \mathrm{o}_{n\to+\infty}(v_n)$.
Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge également.

2.2.3 Théorème d'équivalence

Théorème 2.4 (Théorème d'équivalence des séries numériques)**.**
Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques réelles telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Remarque. Ce théorème est en particulier applicable aux séries numériques à termes réels positifs et aux séries numériques à termes réels négatifs.

Démonstration. On suppose ici que $(v_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang n_0.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ donc $\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{3}{2}$ puis $\forall n \geq \max(N, n_0),\ u_n \geq 0$. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donc :

- $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge d'après le corollaire page 26 ;
- $v_n = \mathrm{O}(u_n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge d'après le corollaire page 26.

Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge.
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative à partir d'un certain rang n_0, on applique le raisonnement précédent à $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

ATTENTION.

Le théorème n'est plus valable si l'hypothèse « $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de signe constant à partir d'un certain rang* » n'est plus vérifiée.

Exemple. cf. TD

Proposition 2.3 (Sommation des équivalences)**.** Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques réelles de même signe constant à partir d'un certain rang telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et leurs restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n$$

Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge et leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=0}^{n} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_n$$

2.3 Séries de référence

2.3.1 Séries géométriques

Théorème 2.5 (Série géométrique)**.** Soit z un nombre complexe.

Alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$: auquel cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

Démonstration. La démonstration dans le cas réel a été traitée dans l'exemple page 20. □

2.3.2 Séries de Riemann

Théorème 2.6 (Série de Riemann)**.** Soit α un nombre réel.

Alors $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. On distingue deux cas selon la valeur de α.

— Si $\alpha \leq 1$, alors pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$. En appliquant le théorème de minoration des séries à termes positifs, il vient que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.

— Si $\alpha > 1$, $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout entier $k \geq 2$:

$$\forall t \in [k-1,k],\ \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \quad \text{puis, en intégrant sur } [k-1,k],\quad \frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit alors que :

$$\forall n \geq 2,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}-1^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

Donc $\forall n \geq 2,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha-1} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

D'après le lemme fondamental des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge. □

Proposition 2.4 (Règle « $n^\alpha u_n$ »)**.** Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes réels positifs. Alors :

$$\exists \alpha > 1,\ \lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge}$$

$$\exists \alpha \leq 1,\ \lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ diverge}$$

Démonstration.

- Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1/n^\alpha} = 0$ puis $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. $\alpha > 1$ donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge puis $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge d'après le corollaire page 26.
- Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1/n^\alpha}{u_n} = 0$ puis $\dfrac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}(u_n)$. $\alpha \leq 1$ donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge puis $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge d'après le corollaire page 27.

□

2.3.3 Séries de BERTRAND

Théorème 2.7 (Série de BERTRAND)**.**

Soit α et β deux nombres réels. Alors $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si

$$(\alpha > 1) \qquad \text{ou} \qquad (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

Démonstration page 42. □

2.4 Règles de convergence

2.4.1 Règle de D'ALEMBERT

Théorème 2.8 (Règle de D'ALEMBERT)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes réels <u>strictement</u> positifs telle que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

— Si $\ell < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

— Si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

ATTENTION. **Le cas $\ell = 1$ est indéterminé.**

Exemple.

- Si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
- Si $u_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Démonstration. Traitons les trois cas $\ell < 1$, $\ell > 1$ et $\ell = +\infty$ séparément.

• $\ell < 1$ D'après la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leq \frac{1-\ell}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \frac{3\ell-1}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+\ell}{2}$$

On en déduit que $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_{n+1} \leq u_n \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq u_N \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n}$:

— si $n = N$, alors $u_N \leq u_N = u_N \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{N}$;

— soit $n \geq N$ tel que $u_n \leq u_N \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n}$, alors

$$u_{n+1} \leq u_n \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right) \leq u_N \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right) = u_N \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n+1}$$

Comme $\dfrac{1+\ell}{2} < 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n}$ converge, ainsi que la série $\displaystyle\sum_{n\geq N} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n}$.
On en déduit par théorème de majoration des séries à termes positifs que $\displaystyle\sum_{n\geq N} u_n$ puis $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergent.

• $\ell > 1$ D'après la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2} > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leq \frac{\ell-1}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \frac{1+\ell}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{3\ell-1}{2}$$

On en déduit que $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_{n+1} \geq u_n \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n}$:

— si $n = N$, alors $u_N \geq u_N = u_N \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{N}$;

— soit $n \geq N$ tel que $u_n \geq u_N \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n}$, alors

$$u_{n+1} \geq u_n \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right) \geq u_N \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right) = u_N \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{-N} \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n+1}$$

Comme $\dfrac{1+\ell}{2} > 1$ et $u_N > 0$, on en déduit par minoration que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ puis que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

• $\ell = +\infty$ D'après la définition de la limite, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$.

Comme dans le cas précédent, on montre par récurrence que $u_n \geq u_N \cdot 2^{-N} \cdot 2^n$ pour tout $n \geq N$ et on conclut de manière identique que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement. □

IMPORTANT. De manière générale, si $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: *donc cette règle ne fait pas la distinction entre les séries de* RIEMANN *convergentes et divergentes.*

Remarque. Il ne s'agit pas d'une condition nécessaire de convergence ou de divergence :

— si $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}$ est le terme général d'une suite non convergente ; comme $0 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2^n}$, il vient que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge par théorème de majoration des séries à termes positifs.

— si $u_n = 2+(-1)^n$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2-(-1)^n}{2+(-1)^n}$ est le terme général d'une suite non convergente ; comme $u_n \geq 1$, il vient que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge par théorème de minoration des séries à termes positifs.

Exercice. *Déterminer la nature (i.e. convergente ou non) de la série de terme général* $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Solution. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série numérique à termes strictement positifs. De plus

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Comme $\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right] = -n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\cdot\dfrac{1}{n} = -1$, il vient que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right] = -1 \qquad \text{puis} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} < 1$$

D'après la règle de D'ALEMBERT, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

2.4.2 Règle de CAUCHY

Théorème 2.9 (Règle de CAUCHY)**.**
Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes réels positifs telle que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

— Si $\ell < 1$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

— Si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

Remarque. Comme dans le cas de la règle de D'ALEMBERT, le cas $\ell = 1$ est aussi indéterminé.

IMPORTANT. Si $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, alors $\sqrt[n]{u_n} = e^{-\alpha\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: *donc cette règle ne fait pas plus la distinction entre les séries de* RIEMANN *convergentes et divergentes que la règle de* D'ALEMBERT.

Démonstration. Traitons les trois cas $\ell < 1$, $\ell > 1$ et $\ell = +\infty$ séparément.

• $\ell < 1$ D'après la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$,

$$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \left|\sqrt[n]{u_n} - \ell\right| \leq \frac{1-\ell}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ \frac{3\ell-1}{2} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \frac{1+\ell}{2}$$

On en déduit que $\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ u_n \leq \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$. Comme $\dfrac{1+\ell}{2} < 1$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$ converge.

On en déduit par théorème de majoration des séries à termes positifs que $\sum\limits_{n\geq N} u_n$ puis $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergent.

• $\ell > 1$ D'après la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{\ell - 1}{2} > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \left|\sqrt[n]{u_n} - \ell\right| \leq \frac{\ell - 1}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \frac{1+\ell}{2} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \frac{3\ell - 1}{2}$$

On en déduit que $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$. Comme $\dfrac{1+\ell}{2} > 1$ on en déduit par minoration que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ puis que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

• $\ell = +\infty$ D'après la définition de la limite, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \sqrt[n]{u_n} \geq 2$.
Comme dans le cas précédent, on montre que $u_n \geq 2^n$ pour tout $n \geq N$ et on conclut de manière identique que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement. □

2.4.3 Lien entre les deux règles

Proposition 2.5 (Lien entre les deux règles)**.** Soit $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes réels strictement positifs telle que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Alors la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Remarque. La réciproque de la proposition 2.5 est fausse en général.

Donc si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite, la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ peut en avoir une.

Remarque. De manière générale, si $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, deux cas sont possibles :

- la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}_+}$: la règle de D'ALEMBERT est donc inapplicable ;
- la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}_+}$: donc cette limite est égale à ℓ d'après la proposition 2.5 et l'application de la règle de D'ALEMBERT ne donne aucune information supplémentaire.

Donc *la règle de* D'ALEMBERT *ne donne pas plus d'information que la règle de* CAUCHY.

Néanmoins, on priviégiera la règle de D'ALEMBERT si l'expression de u_n s'y prête.

Exercice. Reprendre l'exercice page 31 avec la règle de CAUCHY.

Solution. D'après la proposition 2.5, on sait que la limite de $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ existe et vaut e^{-1}. Néanmoins, le calcul direct de cette limite est bien plus complexe que celle de $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ...

Thème n° 3

Séries numériques à termes quelconques

Par « à termes quelconques », on entend « réels ou complexes ». L'une des stratégies possibles sera de revenir (lorsque cela est possible) dans le cadre des séries numériques à termes positifs.

3.1 Convergence absolue. Semi-convergence

Définition 3.1 (Convergence absolue)**.**
Une série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **converge absolument** si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.

Théorème 3.1 (Convergence absolue et convergence)**.**
L'ensemble des séries numériques absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries numériques convergentes (cf. théorème 1.4).

De plus, pour toute série numérique absolument convergente $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, on a $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

ATTENTION. Il existe des séries numériques convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exemple. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

Démonstration. $\sum\limits_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ est la série harmonique et est donc divergente d'après le théorème 1.3.

Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et S_n la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$. Montrons que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes :

— $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$;

— $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} \leq 0$: donc $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est une suite décroissante ;

— $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+3} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \geq 0$: donc $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ est une suite croissante.

D'après le théorème des suites adjacentes, $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent : donc $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge. □

Définition 3.2 (Série numérique semi-convergente)**.**
Une série numérique **semi-convergente** est une série numérique convergente qui n'est pas absolument convergente.

Proposition 3.1. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont deux séries numériques convergentes *dont l'une des deux converge absolument*, alors leur série-produit converge a pour somme $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

ATTENTION. L'hypothèse de convergence absolue pour une des deux séries numériques est indispensable.

Exemple. cf. TD

3.2 Règles de convergence absolue

Théorème 3.2 (Règle de D'ALEMBERT)**.** Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique à termes non nuls à partir d'un certain rang telle que la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\overline{\mathbb{R}_+}=\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$.

- Si $\ell<1$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
- Si $\ell>1$ ou $\ell=+\infty$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

Théorème 3.3 (Règle de CAUCHY)**.** Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique telle que la suite $\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\overline{\mathbb{R}_+}=\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$.

- Si $\ell<1$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
- Si $\ell>1$ ou $\ell=+\infty$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

Démonstration des théorèmes 3.2 et 3.3. On applique la règle pour les séries à termes positifs correspondante à la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

- Si $\ell<1$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge : donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.
- Si $\ell>1$ ou $\ell=+\infty$, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ diverge grossièrement. Donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas vers 0. On en conclut que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement. □

IMPORTANT. Comme dans le cas des séries à termes positifs :

- le cas $\ell=1$ est indéterminé pour les deux régles ;
- la règle de D'ALEMBERT n'apporte pas plus d'information que la règle de CAUCHY, mais elle doit être préférée si l'expression de u_n s'y prête.

Exercice. *Déterminer la nature de la série de terme général* $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^n}$.

Solution.

• Utilisons la règle de D'ALEMBERT :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\ln n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\,\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

— On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

— On a $n+1 \sim n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$: donc $\ln(n+1) \sim \ln n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$.

— On a vu dans l'exercice page 31 que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{e}$.

On en conclut donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0 < 1$ et que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.

• Utilisons la règle de CAUCHY :

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{n} = \frac{1}{n} \exp\left(\frac{\ln(\ln n)}{n}\right)$$

Comme $\ln x = \mathrm{o}_{x\to+\infty}(x)$, il vient par composition que $\ln(\ln n) = o(\ln n)$. De plus $\ln n = \mathrm{o}(n)$, donc $\ln(\ln n) = \mathrm{o}(n)$ par transitivité de $\mathrm{o}(\cdot)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln n)}{n} = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\dfrac{\ln(\ln n)}{n}\right) = 1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 0 < 1$ et que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.

• On a $\forall n \geq 2$, $|u_n| = \dfrac{\ln n}{n^n} \leq \dfrac{\ln n}{n^2}$.

$\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{\ln n}{n^2} = \sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^2(\ln n)^{-1}}$ est une série de BERTRAND convergente d'après le théorème 2.7 donc, par théorème de majoration des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ puis $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ convergent absolument.

• Par croissance comparée, $n^2|u_n| = \dfrac{\ln n}{n^{n-2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

D'après la **??**, $\sum\limits_n u_n$ converge absolument.

3.3 Règles de semi-convergence

3.3.1 Condition de convergence de CAUCHY

Théorème 3.4 (Condition de convergence de CAUCHY)**.**

Une série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > N,\ \forall q > N,\ \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| < \varepsilon$$

Démonstration. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de CAUCHY. □

Remarque. Un terme du type $\sum_{k=p+1}^{q} u_k$ est parfois appelé *paquet de* CAUCHY en référence à ce résultat.

Corollaire. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique.
Si il existe deux suites à valeurs entières $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

— $\forall n\in\mathbb{N},\ p_n \leq q_n$;

— $\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$;

— la suite $\left(\sum_{k=p_n}^{q_n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 ;

alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.

Démonstration. C'est la contraposition de la condition de convergence de CAUCHY. □

3.3.2 Règle d'ABEL

Théorème 3.5 (Règle d'ABEL)**.** Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que :

— $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive, décroissante telle que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$;

— la suite numérique $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n v_n$ converge.

Démonstration. Pour tout entier naturel n, on note $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k$. Soit $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |V_n|$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k = \varepsilon_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k = \varepsilon_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (V_k - V_{k-1}) = \varepsilon_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+1} V_k = \varepsilon_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k \end{aligned}$$

· Comme la suite $(\varepsilon_n)_n$ converge vers 0 et que la suite $(V_n)_n$ est bornée, il vient que la suite $(\varepsilon_n V_n)_n$ converge vers 0.

· Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \cdot V_k| &= \sum_{k=0}^{n-1} |(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) \cdot V_k| = \sum_{k=0}^{n-1} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| \cdot |V_k| \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}| = M \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) = M(\varepsilon_0 - \varepsilon_n) \leq M\varepsilon_0 \end{aligned}$$

D'après le lemme fondamental des séries à termes positifs, il vient que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \cdot V_n|$ converge puis que $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) \cdot V_n$ converge.

On en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n v_n$ converge. □

3.3.3 Séries numériques alternées

Définition 3.3. Une série numérique réelle $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est dite **alternée** si et seulement si

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = (-1)^n |u_n| \qquad \text{ou} \qquad \forall n \geq n_0,\ u_n = -(-1)^n |u_n|$$

Remarque. Une série alternée est donc une série pour laquelle le terme général change de signe à chaque rang. Ainsi :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est le carré d'un entier} \\ \dfrac{(-1)^n}{n} & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas le terme général d'une série alternée et ce, à partir de n'importe quel rang.

Théorème 3.6 (Théorème spécial à certaines séries alternées)**.**

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série numérique alternée telle que $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite réelle (positive) décroissante qui converge vers zéro. Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$.

Démonstration. On suppose ici que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|$.

On note S_n la somme partielle d'ordre n de $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$. Montrons que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes :

— $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -|u_{2n+1}|$, donc $\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = 0$;

— $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = -|u_{2n+1}| + |u_{2n+2}| \leq 0$: donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante ;

— $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} + u_{2n+3} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geq 0$: donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante.

D'après le théorème des suites adjacentes, $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune S : donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge vers S.

Les monotonies des deux suites partielles assurent que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$. Donc :

— $\forall n \in \mathbb{N},\ R_{2n} = S - S_{2n} \leq 0$, or $u_{2n+1} = -|u_{2n+1}| \leq 0$

— $\forall n \in \mathbb{N},\ R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \geq 0$, or $u_{2n+2} = +|u_{2n+1}| \geq 0$.

Donc, pour tout entier naturel n, R_n et u_{n+1} sont de même signe. De plus :

— $\forall n \in \mathbb{N},\ |R_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = |u_{2n+1}|$;

— $\forall n \in \mathbb{N},\ |R_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2} = |u_{2n+2}|$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -(-1)^n |u_n|$, on applique le raisonnement précédent à $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-u_n)$, dont la suite des restes est $(-R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour obtenir que :

— pour tout entier naturel n, $(-R_n)$ et $(-u_{n+1})$ sont de même signe : donc il en est de même pour R_n et u_{n+1} ;

— $\forall n \in \mathbb{N},\ |-R_n| \leq |-u_{n+1}|$: donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n| \leq |u_{n+1}|$. $\square$

Remarque. Le résultat de convergence de ce théorème est une application directe de la règle d'ABEL avec $\varepsilon_n = |u_n|$ et $v_n = \pm(-1)^n$.

Corollaire (Séries de RIEMANN alternées)**.**

Soit α un nombre réel. Alors $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration. On distingue trois cas selon la valeur de α.

- Si $\alpha \leq 0$, la suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne converge pas, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha \in]0,1]$, alors $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une suite décroissante qui converge vers 0.

  Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série altérnée, on conclut qu'elle converge d'après le théorème spécial à certaines séries alternées.
- Si $\alpha > 1$, alors $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série convergente : donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument. □

3.4 Raisonnement par regroupement de termes

Exemple. On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n$: il s'agit d'une série (grossièrement) divergente. Toutefois la série de terme général $v_n = u_{2n} + u_{2n+1} = 0$ est une série convergente.

Donc la nature d'une série obtenue par regroupement de termes n'a rien à voir avec la nature de la série originale. Ces considérations font l'objet de résultats qui dépassent le cadre de ce cours. On retiendra que :

Il ne faut pas regrouper les termes d'une série pour en déterminer la nature !

Remarque. Après (*et uniquement après*) avoir établi qu'une série converge, on peut envisager de regrouper les termes d'une série pour déterminer la valeur de sa somme.

Thème n° 4

Méthodes d'évaluation

4.1 Calcul de la somme d'une série convergente

4.1.1 Séries géométriques

On rappelle le théorème 2.5.

Théorème 4.1 (Série géométrique)**.** Soit z un nombre complexe.

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$: auquel cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

4.1.2 Par « télescopage »

Proposition 4.1. Soit $(a_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.

Alors $\sum_{n\geq n_0}(a_{n+1}-a_n)$ converge si et seulement si $(a_n)_{n\geq n_0}$ converge : auquel cas, $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)=\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)-a_{n_0}$.

Démonstration. Soit $n\geq n_0$. Alors $S_n=\sum_{k=n_0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=n_0}^{n} a_{k+1}-\sum_{k=n_0}^{n} a_k=\sum_{k=n_0+1}^{n+1} a_k-\sum_{k=n_0}^{n} a_k=a_{n+1}-a_{n_0}$.

Donc $\sum_{n\geq n_0}(a_{n+1}-a_n)$ converge si et seulement si $(a_{n+1}-a_{n_0})_{n\geq n_0}$ converge, donc si et seulement si $(a_n)_{n\geq n_0}$ converge.

Si $(a_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ, on en déduit que $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $\ell-a_{n_0}$, d'où le résultat annoncé. □

Exemple. On considère la série de terme général $u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Avec $a_n=-\frac{1}{n}$, il vient que $\forall n\geq 1,\ u_n=a_{n+1}-a_n$ et $\ell=\lim_{n\to+\infty} a_n=0$.

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0-a_1=0-\left(-\frac{1}{1}\right)=1$.

Remarque. Ce résultat peut être étendu aux séries numériques à valeurs dans un espace vectoriel normé.

4.2 Majoration du reste d'une série convergente

Il s'agit ici de borner le reste R_n par une expression plus simple. Cette borne pourra alors être utilisée pour déterminer la qualité de S_n comme approximation de S.

Proposition 4.2 (Vitesse de convergence du reste d'une série « sous-géométrique »)**.**
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série réelle strictement positive telle que :

$$\exists\lambda\in[0,1[,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ 0<\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\lambda$$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et :

$$\forall n\geq N,\ R_n\leq\frac{u_N}{\lambda^N(1-\lambda)}\lambda^{n+1}$$

Démonstration. On montre aisément par récurrence que $\forall n\geq N,\ 0<u_n\leq\lambda^{n-N}u_N$. Donc pour tout $n\geq N$:

$$\begin{aligned}0<R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\lambda^{k-N}u_N=\lambda^{-N}u_N\sum_{k=n+1}^{+\infty}\lambda^k=\lambda^{-N}u_N\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^{k+n+1}&=\lambda^{n+1-N}u_N\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k\\&=\lambda^{n+1-N}\frac{u_N}{1-\lambda}\end{aligned}$$

□

Exemple. On considère la série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n!}$: on rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=e$.

Donner un ordre n assurant que S_n est une approximation de e à 10^{-6} près.

$\forall n\geq 1,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{n+1}\leq\dfrac{1}{2}$. Donc d'après ce qui précède, $R_n\leq\dfrac{u_1}{(1/2)\cdot(1/2)}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Donc il suffit que $\dfrac{1}{2^{n-1}}\leq 10^{-6}\Leftrightarrow -(n-1)\ln 2\leq -6\ln 10\Leftrightarrow n-1\geq 6\dfrac{\ln 10}{\ln 2}\simeq 19{,}9\Leftrightarrow n\geq 21$.

Reste d'une série alternée *On rappelle que si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial à certaines séries alternées, alors son reste R_n d'ordre n vérifie $|R_n|\leq|u_{n+1}|$.*

4.3 Comparaison série-intégrale

On présente dans cette section une méthode d'encadrement qui permet d'étudier le comportement de la série de terme général $f(n)$ pour $n\geq n_0$.

4.3.1 Cas décroissant

Théorème 4.2 (Comparaison série-intégrale)**.**
Soit n_0 un entier naturel et $f:[n_0,+\infty[\to\mathbb{R}_+$ une application décroissante.

Alors pour tout $n\geq n_0$, $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leq\sum_{k=n_0}^{n}f(k)\leq f(n_0)+\int_{n_0}^{n}f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. Soit $k \geq n_0$. Alors :

$$\begin{array}{rclll}
\forall x \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq & f(x) & \leq f(k) & \\
\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x \leq & \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x & \quad \text{en intégrant sur } [k, k+1] \\
f(k+1) \leq & \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq f(k) &
\end{array}$$

Soit $n \geq n_0$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ et on somme la double inégalité pour k entre n_0 et n :

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) \leq & \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \\
\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \leq & \displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \\
S_{n+1} - f(n_0) \leq & \displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq S_n
\end{array}$$

Considérons les deux inégalités séparément :

— celle de gauche permet d'établir que $S_n \leq f(n_0) + \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n > n_0$ (on notera que la relation est également vérifiée pour $n = n_0$) ;

— celle de droite permet d'établir que $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Finalement, pour tout $n \geq n_0$, $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Remarque. C'est la technique utilisée pour démontrer le cas convergent du théorème 2.6.

Exemple ($f : x \mapsto x^{-1}$). Soit $n \geq 1$. On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est décroissante donc :

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} & \leq f(1) + \displaystyle\int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\big[\ln x\big]_1^{n+1} \leq & H_n & \leq 1 + \big[\ln x\big]_1^{n} \\
\ln(n+1) - \cancel{\ln 1} \leq & H_n & \leq 1 + (\ln n - \cancel{\ln 1}) \\
\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq & \dfrac{H_n}{\ln n} & \leq \dfrac{1 + (\ln n)}{\ln n}
\end{array}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(\ln n)}{\ln n} = 1$: donc d'après le théorème d'encadrement des limites, il vient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$. Finalement, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Cette technique permet de démontrer certains cas du théorème 2.7.

Théorème (Série de BERTRAND)**.**
Soit α et β deux nombres réels. Alors $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si

$$(\alpha > 1) \qquad \text{ou} \qquad (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$$

Démonstration. On note $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ et on distingue deux cas selon la valeur de α.

- Si $\alpha \neq 1$, on note $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$. Alors $n^\gamma u_n = n^{(1-\alpha)/2}(\ln n)^{-\beta}$:
  - si $\alpha > 1$, alors $\gamma > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = 0$; donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge d'après la règle « $n^\alpha u_n$ » ;
  - si $\alpha < 1$, alors $\gamma < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = +\infty$; donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge d'après la règle « $n^\alpha u_n$ ».
- Si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$, alors $u_n \geq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 3$: donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge d'après le théorème de minoration des séries à termes positifs.
- Si $\alpha = 1$ et $\beta > 0$, alors $x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$. En appliquant la comparaison série-intégrale avec $n_0 = 2$:

$$\forall n \geq 2, \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\beta} \leq \sum_{k=2}^n u_k \leq \frac{1}{2(\ln 2)^\beta} + \int_2^n \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\beta}$$

Calculons $I_n = \int_2^n \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\beta}$ en posant le changement de variable strictement croissant $u = \ln x$: alors $x = e^u$ et $\mathrm{d}x = e^u \mathrm{d}u$. D'où $I_n = \int_2^n \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{e^u \mathrm{d}u}{e^u u^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$.

Il faut alors distinguer deux cas selon la valeur de β :

— si $\beta \neq 1$, alors $I_n = \int_{\ln 2}^{\ln n} u^{-\beta}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_{\ln 2}^{\ln n} = \frac{(\ln n)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1}$:

· si $\beta > 1$, alors

$$\sum_{k=2}^n u_k \leq \frac{1}{2(\ln 2)^\beta} + I_n = \frac{1}{2(\ln 2)^\beta} + \frac{1}{\beta - 1}\left[\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}}\right] \leq \frac{1}{2(\ln 2)^\beta} + \frac{1}{\beta-1}\frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}}$$

donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge d'après le lemme fondamental des séries à termes positifs ;

· si $\beta < 1$, alors $\sum_{k=2}^n u_k \geq I_{n+1} = \frac{[\ln(n+1)]^{1-\beta} - [\ln 2]^{1-\beta}}{1-\beta}$: donc $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = +\infty$ et on en déduit par minoration que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^n u_k = +\infty$ puis que $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

— si $\beta = 1$, alors $I_n = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \left[\ln u\right]_{\ln 2}^{\ln n} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$. Donc $\sum_{k=2}^n u_k \geq I_{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = +\infty$ et on en déduit par minoration que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^n u_k = +\infty$ puis que $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge. □

4.3.2 Cas croissant

Théorème 4.3 (Comparaison série-intégrale)**.**
Soit n_0 un entier naturel et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application croissante.

Alors pour tout $n \geq n_0$, $f(n_0) + \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. Soit $k \geq n_0$. Alors :

$$\begin{array}{rlll}
\forall x \in [k, k+1], \quad f(k) \leq & f(x) & \leq f(k+1) & \\
\displaystyle\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x \leq & \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x & \text{en intégrant sur } [k, k+1] \\
f(k) \leq & \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq f(k+1) &
\end{array}$$

Soit $n \geq n_0$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ et on somme la double inégalité pour k entre n_0 et n :

$$\begin{array}{rll}
\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq & \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) \\
\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq & \displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \\
S_n \leq & \displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x & \leq S_{n+1} - f(n_0)
\end{array}$$

Considérons les deux inégalités séparément :

— celle de gauche permet d'établir que $S_n \leq \displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \geq n_0$;

— celle de droite permet d'établir que $f(n_0) + \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n$ pour tout $n > n_0$
(on notera que la relation est également vérifiée pour $n = n_0$).

Finalement, pour tout $n \geq n_0$, $f(n_0) + \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$. □

Exemple ($f : x \mapsto \ln x$). Soit $n \geq 1$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k$.

$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est croissante donc $f(1) + \displaystyle\int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln x\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire :

$$
\begin{aligned}
\cancel{\ln 1}+\left[x\ln x-x\right]_1^n \leq \quad & S_n \quad \leq \left[x\ln x-x\right]_1^{n+1} \\
(n\ln n-n)-(\cancel{1\ln 1}-1)\leq \quad & S_n \quad \leq [(n+1)\ln(n+1)-(n+1)]-(\cancel{1\ln 1}-1) \\
(n\ln n)-(n-1)\leq \quad & S_n \quad \leq (n+1)\ln(n+1)-n \\
\frac{(n\ln n)-(n-1)}{n\ln n} \leq & \frac{S_n}{n\ln n} \leq \frac{(n+1)\ln(n+1)-n}{n\ln n} \\
1-\frac{1}{\ln n}+\frac{1}{n\ln n} \leq & \frac{S_n}{n\ln n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-\frac{1}{\ln n}
\end{aligned}
$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{\ln n}+\dfrac{1}{n\ln n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}-\dfrac{1}{\ln n}=1$: donc d'après le théorème d'encadrement des limites, il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n\ln n}=1$. Finalement $\sum\limits_{n\geq 1}\ln n$ diverge et $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n$.

Remarque. En remarquant que $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k=\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}k\right)=\ln(n!)$, il vient que $\boldsymbol{\ln(n!)\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n}$.

Deuxième partie

Suites et séries d'applications

Thème n° 5

Suites d'applications : convergences

Dans tout le chapitre, X est un ensemble non vide et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 5.1 (Opérations)**.** On munit l'ensemble $\mathscr{E}$ des suites d'applications de X dans $\mathbb{K}$ de :

— la loi interne $+$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{E}\times\mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ \big((f_n)_{n\in\mathbb{N}},(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) & \longmapsto & (f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$;

— la loi interne $\times$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{E}\times\mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ \big((f_n)_{n\in\mathbb{N}},(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) & \longmapsto & (f_n\cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$;

— la loi externe $\cdot$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ \big(\lambda,(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) & \longmapsto & (\lambda\cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$.

Théorème 5.1 (Structure algébrique)**.** L'ensemble $\mathscr{E}$ des suites d'applications de X dans $\mathbb{K}$ muni des lois $+$, $\cdot$ et $\times$ vues en définition 5.1 est une $\mathbb{K}$-algèbre vectorielle.

5.1 Convergence simple

Définition 5.2 (Convergence simple)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.

Soit f une application de X dans $\mathbb{K}$. On dit que **$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers f**, ce que l'on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$, si et seulement si la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ pour tout élement x de X, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f &\iff \forall x\in X,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x) \\ &\iff \forall x\in X,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \end{aligned}$$

On dit alors que f est la **limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$**.

On dit que **$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X** si et seulement si il existe une application f de X dans $\mathbb{K}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Proposition 5.1. Si une suite d'applications converge simplement, alors il y a unicité de la limite simple.

Démonstration. Pour tout x de X, il y a unicité de la limite $f(x)$ de la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$$f_n : \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \max(1-nx,0) = \begin{cases} 1-nx & \text{si } x \in \left[0,\dfrac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n},1\right] \end{cases} \end{array}.$$

Calculons la limite simple f de $(f_n)_{n\geq 1}$ (si elle existe). On distingue deux cas pour la valeur de x.

— Si $x=0$, alors $f_n(0)=1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0)=1$.

— Sinon $\exists N$, $\forall n \geq N$, $\dfrac{1}{n} < x$. Donc pour tout $n \geq N$, $f_n(x)=0$: on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

On en conclut que la limite simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ est
$$f : \begin{array}{ccl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}.$$

Remarque. La limite simple d'une suite de fonctions continues peut ne pas être continue.

Proposition 5.2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur X.
Alors pour tout sous-ensemble X' de X, $(f_{n|X'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X'.

Définition 5.3 (Domaine de convergence)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des élements x de X pour lesquels la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est appelé **domaine de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$**.

Exemple. Pour tout entier naturel n, on définit l'application
$$f_n : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n}{nx+1} \end{array}.$$

Déterminons le domaine de convergence de la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

— Si $x=0$, $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

— Si $x>0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{nx} = \dfrac{1}{x}$. Donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Donc le domaine de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{R}_+^*$ et sa limite simple sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Théorème 5.2 (Structure algébrique)**.**
L'ensemble des suites d'applications de X dans $\mathbb{K}$ qui convergent simplement sur X est une sous-algèbre vectorielle de l'ensemble des suites d'applications de X dans $\mathbb{K}$.
De plus, l'application qui à toute suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur X associe sa limite simple est linéaire sur E.

Proposition 5.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ et f une application de X dans $\mathbb{K}$.
Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers f si et seulement si $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers la fonction nulle.

5.2 Convergence uniforme

Définition 5.4 (Convergence uniforme)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.

Soit f une application de X dans $\mathbb{K}$. On dit que $\boldsymbol{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ **converge uniformément sur $\boldsymbol{X}$ vers $\boldsymbol{f}$**, ce que l'on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ si et seulement si :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

On dit alors que f est la **limite uniforme de $\boldsymbol{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}}$**.

On dit que $\boldsymbol{(f_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ **converge uniformément sur $\boldsymbol{X}$** si et seulement si il existe une application f de X dans $\mathbb{K}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Théorème 5.3 (Structure algébrique)**.** L'ensemble des suites d'applications de X dans $\mathbb{K}$ qui convergent uniformément sur X est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites d'applications de X dans $\mathbb{K}$ qui convergent simplement.

De plus, l'application qui à toute suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur X associe sa limite uniforme est une restriction de l'application qui associe sa limite simple.

Démonstration. Comparons la convergence simple et la continuité uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

— convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \underline{\forall x \in X},\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

— convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\underline{\forall x \in X},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ □

Remarque. Donc, lorsque la convergence est uniforme, ε et N ne dépendent plus de x (mais N dépend toujours de ε).

Proposition 5.4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément sur X.

Alors pour tout sous-ensemble X' de X, $(f_{n|X'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X'.

Théorème 5.4 (Caractérisation rapide de la convergence uniforme)**.**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ et f une application de X dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \iff \begin{cases} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ f_n - f \text{ est une application bornée} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \end{cases}$$

Démonstration.
$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \iff \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Remarque. Soit $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{K}$ bornées.
Alors la convergence uniforme sur X est la convergence dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exemple. On reprend l'exemple page 47.

Pour tout entier naturel n, f_n est bornée ainsi que f. Donc $f_n - f$ est bornée et :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right|$$

Or $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0$. Donc pour entier naturel non nul n, $\|f_n - f\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ et ne peut donc pas être le terme général d'une suite convergente vers 0.

Donc $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur X vers f.

Remarque. La technique précédente pour montrer la non-convergence uniforme est à retenir.

IMPORTANT. Il existe donc des suites d'applications qui convergent simplement sans converger uniformément.

Corollaire. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ et f une application de X dans $\mathbb{K}$.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f si et seulement si $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle.

Proposition 5.5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ et f une application de X dans $\mathbb{K}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq u_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f.

Démonstration. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ par théorème d'encadrement des limites. □

Exemple. Pour tout entier naturel non nul n, on définit l'application :

$$\begin{array}{rccl} g_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \max\left(\frac{1}{n} - x, 0\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} - x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \end{array}.$$

Pour tout entier naturel non nul n, pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n}$ puis $0 \leq |g_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n}$. Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Théorème 5.5 (Condition de convergence de CAUCHY)**.**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$. La suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \forall q > N, \forall x \in X, \left| f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \varepsilon$$

Définition 5.5 (Convergence localement uniforme)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$.

On dit que **$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur I** si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Proposition 5.6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$.

- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur I.
- Si I est un segment, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément localement sur I si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement sur I.

Démonstration.

- Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, elle converge uniformément sur tout sous-ensemble de I, donc sur tout segment inclus dans I d'après la proposition 5.4.
- Comme I est un segment inclus dans I, il vient alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I. □

Proposition 5.7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur I, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.

Démonstration. Soit $x \in I$: alors il existe un segment $[a,b]$ inclus dans I contenant x.
Or $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ donc simplement sur $[a,b]$ et en particulier en x. □

On présente un plan pour l'étude de la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(à adapter selon les besoins)*.

Étape n° 1 Étude de la convergence simple

$\Longrightarrow$ domaine D de convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Longrightarrow$ limite simple f sur D

Étape n° 2 Calcul de $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$

- $\|f_n - f\|_\infty$ n'est pas définie à partir d'un certain rang
  $\Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur D
- $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers zéro
  $\Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur D
- $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro
  $\Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D

Thème n° 6

Suites d'applications : théorèmes d'interversion

6.1 Interversion limite-limite

Théorème 6.1 (Théorème d'interversion des limites)**.** Soit $a \in \overline{X}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ et f une application de X dans $\mathbb{K}$ telles que :

1. pour tout entier naturel n, f_n admette une limite ℓ_n en a ;
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f.

Alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Remarque. C'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Démonstration. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f, on utilise le théorème 5.5.

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > N,\ \forall q > N,\ \forall x \in X,\ \left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > N,\ \forall q > N,\ \lim_{x\to a} \left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > N,\ \forall q > N,\ |\ell_p - \ell_q| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Il vient que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, puis qu'elle est convergente : on note ℓ sa limite.
Soit ε un réel strictement positif. Alors :

$$\begin{aligned}
& \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ \forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} && [\text{convergence uniforme de } (f_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\
& \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_2,\ |\ell_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3} && [\text{convergence de } (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\
& \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ \left(|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f_N(x) - \ell_N| \leq \frac{\varepsilon}{3}\right) && [f_N \text{ admet une limite en } a \text{ pour } N = \max(N_1, N_2)]
\end{aligned}$$

Donc il existe un réel strictement positif η tel que pour tout x vérifiant $|x-a| \leq \eta$:

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - \ell_N + \ell_N - \ell| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - \ell_N| + |\ell_N - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Finalement $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ \left(|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\right)$: on en conclut que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$. □

Exemple. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $\phi_n : \begin{array}{ccc}]0,1/2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{\ln(1-x)}{nx} \end{array}$.

Vérifions les hypothèses du théorème d'interversion des limites.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi_n(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{nx} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{-x}{nx} = \dfrac{1}{n}$: donc $\ell_n = \lim\limits_{x\to 0} \phi_n(x) = \dfrac{1}{n}$.
2. Comme ϕ_1 admet une limite en 0, elle admet un prolongement par continuité $\overline{\phi_1}$ en 0.
   Comme $\overline{\phi_1}$ est continue sur $[0,1/2]$, elle y est bornée : donc ϕ_1 est également bornée sur $]0,1/2]$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi_n = \dfrac{1}{n}\phi_1$: donc $\|\phi_n - 0\|_\infty = \|\phi_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}\|\phi_1\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   On en déduit que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers $\phi = 0$.

Alors $(\ell_n)_{n\geq 1}$ converge $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = 0\right)$, ϕ admet une limite en 0 (qui est 0) et $\lim\limits_{x\to 0} \phi(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.

Théorème 6.2. Soit $a \in X$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ et f une application de X dans $\mathbb{K}$ telles que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est continue en a ;
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f.

Alors f est continue en a.

Démonstration. Vérifions les hypothèses du théorème d'interversion des limites.

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a donc admet $\ell_n = f_n(a)$ comme limite en a ;
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f.

On applique le théorème d'interversion des limites avec la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$:

— $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément donc simplement sur X et donc en a : donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$;

— f admet une limite finie ℓ en a et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$.

On en conclut que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ puis que f est continue en a. □

Remarque. Le cas traité dans l'exemple page 47 montre que la convergence simple n'est pas une condition suffisante de conservation de la continuité.

Corollaire. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ et f une application de X dans $\mathbb{K}$ telles que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est continue sur X ;
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f.

Alors f est continue sur X.

Démonstration. On applique le théorème précédent en tout point a de X. □

Remarque. On utilise régulièrement la contraposée de ce théorème pour établir une absence de convergence uniforme.

Corollaire. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ et f une application de I dans $\mathbb{K}$ telles que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est continue sur I ;
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur I vers f.

Alors f est continue sur I.

Démonstration. Tout point de I est inclus dans un segment inclus dans I.
Donc on conclut en appliquant le corollaire précédent sur tout segment inclus dans I. □

6.2 Interversion limite-intégrale

Théorème 6.3 (Théorème d'interversion limite-intégrale)**.** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ telles que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est continue sur $[a,b]$;
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Alors f est continue sur $[a,b]$ et la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque. C'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right]\mathrm{d}x$.

Démonstration. D'après le corrolaire page 52, f est continue sur $[a,b]$ comme limite uniforme d'une suite d'applications continues. Donc, pour tout entier naturel n, $f_n - f$ est continue sur $[a,b]$ et y est donc bornée :

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f_n - f|(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\,\mathrm{d}x = (b-a)\|f_n - f\|_\infty$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, il vient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0$.

Par théorème d'encadrement des limites, il vient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = 0$. □

6.3 Interversion limite-dérivation

6.3.1 Théorèmes d'interversion

Théorème 6.4 (Théorème d'interversion limite-dérivation)**.** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ et g une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ telles que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$;
2. $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers g ;
3. il existe x_0 de $[a,b]$ tel que $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Alors :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une application notée f ;
2. f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$;
3. $f' = g$.

Démonstration. On note $C = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$ et on définit l'application $f : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & C + \displaystyle\int_{x_0}^x g(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$.

Comme $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications continues qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers g, il vient que g est continue. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ en tant que primitive de g et $f' = g$.

Remarquons que pour tout élément x de $[a,b]$, $f_n(x)=f_n(x_0)+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N},\ |f_n(x)-f(x)| &= \left|f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t - C - \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |f_n(x_0)-C| + \left|\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq |f_n(x_0)-C| + \left|\int_{x_0}^{x} (f_n'-g)(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq |f_n(x_0)-C| + \left|\int_{x_0}^{x} |f_n'-g|(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq |f_n(x_0)-C| + \left|\int_{x_0}^{x} \|f_n'-g\|_\infty\,\mathrm{d}t\right| = |f_n(x_0)-C| + |x-x_0|\|f_n'-g\|_\infty \\
&\leq |f_n(x_0)-C| + (b-a)\|f_n'-g\|_\infty
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0)=C$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n'-g\|_\infty=0$, il vient que $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x_0)-C|+(b-a)\|f_n'-g\|_\infty=0$.

D'après la proposition 5.5, on en conclut que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f. □

Exemple. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $\phi_n : \begin{array}{ccc} [1/4,3/4] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{\ln(1-x)}{nx} \end{array}$.

Vérifions les hypothèses du théorème d'interversion limite-dérivation.

1. Pour tout entier naturel non nul n, ϕ_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1/4,1/2]$.
2. ϕ_1' est continue sur $[1/4,3/4]$, donc bornée. On en déduit que $\|\phi_n'\|_\infty = \left\|\dfrac{\phi_1'}{n}\right\|_\infty = \dfrac{\|\phi_1'\|_\infty}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis que $(\phi_n')_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[1/4,1/2]$ vers $g=0$.
3. $\forall n\geq 1$, $\phi_n(1/2) = -\dfrac{\ln(1/2)}{n/2} = \dfrac{2\ln 2}{n}$: donc $\big(\phi_n(1/2)\big)_{n\geq 1}$ converge (vers 0).

Alors $(\phi_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[1/4,1/2]$ vers une application ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1/4,1/2]$ telle que $\phi'=0$ et $\phi\left(\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\phi_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$: donc $\phi=0$.

Théorème 6.5 (Théorème d'interversion limite-dérivation)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$ et g une application de I dans $\mathbb{K}$ telles que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
2. $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur I vers g ;
3. il existe x_0 de I tel que $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Alors :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément sur I vers une application notée f ;
2. f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
3. $f'=g$.

Démonstration. On applique le théorème 6.4 sur tout segment inclus dans I. □

ATTENTION. Si I n'est pas un segment, l'énoncé obtenu en enlevant « uniformément » dans les hypothèses et dans la conclusion n'est pas valable.

6.3.2 Nécessité des hypothèses du théorème

Convergence uniforme de la suite des dérivées

L'hypothèse de convergence uniforme de la suite des dérivées est nécessaire.

Exemple. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $\begin{array}{rccc} f_n : & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}} \end{array}$.

— Pour tout entier naturel non nul n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f_n'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}}$.

— $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ +1 & \text{si } x>0 \end{cases}$: donc la limite simple de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas continue en 0 et la convergence ne peut donc pas être uniforme sur X.

Les hypothèses du théorème d'interversion limite-dérivation ne sont donc pas satisfaites.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = |x|$: donc la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$.

Hypothèse de convergence simple de la suite d'applications en un point

L'hypothèse de convergence simple de la suite d'applications en au moins un point de leur ensemble de définitions est nécessaire.

Exemple. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & n \end{array}$.

1. Pour tout entier naturel non nul n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
2. $(f_n')_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
3. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge simplement en aucun point de $[0,1]$.

Comme la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas simplement sur $[0,1]$, elle n'y converge pas uniformément.

Thème n° 7

Séries d'applications : convergences

Définition 7.1 (Série d'applications)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.

La **série d'applications de terme général f_n**, notée $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ou $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, le couple $\big((f_n)_{n\in\mathbb{N}},(S_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ où la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_n=\sum_{k=0}^{n} f_k$$

f_n est le **$n^{\text{ème}}$ terme** ou **terme général de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$**. S_n est la **$n^{\text{ème}}$ somme partielle de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$**.

Si la suite d'applications $(f_n)_{n\geq n_0}$ est définie à partir d'un certain rang $n_0\in\mathbb{N}$, on définit de la même manière la série d'applications $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ avec $S_n=\sum\limits_{k=n_0}^{n} f_k$ pour tout $n\geq n_0$.

Définition 7.2 (Opérations)**.** On munit l'ensemble $\mathscr{E}$ des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ de :

— la loi interne $+$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{E}\times\mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n,\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n\right) & \longmapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (f_n+g_n) \end{array}$;

— la loi interne $\times$: $\begin{array}{ccc} \mathscr{E}\times\mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n,\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n\right) & \longmapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\right) \end{array}$;

— la loi externe $\cdot$: $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times\mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ \left(\lambda,\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) & \longmapsto & \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (\lambda\cdot f_n) \end{array}$.

Théorème 7.1. L'ensemble $\mathscr{E}$ des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ muni des lois $+$, $\times$ et $\cdot$ vues en définition 7.2 est une $\mathbb{K}$-algèbre vectorielle.

Tout comme les séries numériques sont des suites numériques particulières, les séries d'applications sont des suites d'applications particulières. On peut donc appliquer tous les résultats des thèmes précédents aux séries d'applications

7.1 Convergences

7.1.1 Convergence simple

Généralités

Définition 7.3 (Convergence simple)**.**
Une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ d'applications de X dans $\mathbb{K}$ **converge simplement sur** X si et seulement si la suite d'applications $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge simplement sur X.

Auquel cas, on définit la **somme de la série** $\boldsymbol{\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n}$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ comme la limite simple de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 7.1 (Caractérisation rapide de la convergence simple)**.**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.
Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur X si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ convergente pour tout $x \in X$.

Démonstration.
$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \text{ converge simplement sur } X &\iff (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } X \\
&\iff \forall x \in X,\ (S_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\
&\iff \forall x \in X,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \text{ converge} \quad \square
\end{aligned}$$

Définition 7.4 (Domaine de convergence)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des élements x de X pour lesquels la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ converge est appelé **domaine de convergence de** $\boldsymbol{\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n}$.

Proposition 7.2. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur X.
Alors pour tout sous-ensemble X' de X, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_{n|X'}$ converge simplement sur X'.

Reste d'une série d'applications convergente

Définition 7.5 (Reste d'ordre n)**.**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ <u>convergeant simplement</u> sur X.

On appelle **reste d'ordre n de** $\boldsymbol{\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n}$ la somme de la série $\sum_{k \geq n+1} f_k$, c'est-à-dire $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

ATTENTION. **Il n'existe pas de reste pour une série d'applications qui ne converge pas simplement !**

Remarque. Pour simplifier l'écriture, on note souvent :

— S_n la somme partielle d'ordre n ;

— S la somme (lorsque la série converge simplement) ;

— R_n le reste d'ordre n (lorsque la série converge simplement).

On a alors $\boxed{R_n = S - S_n}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k - \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Proposition 7.3 (Convergence du reste)**.**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$ telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur X.

Alors la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses restes d'ordre n converge simplement vers la fonction nulle.

Condition nécessaire de convergence

Proposition 7.4 (Condition nécessaire de convergence simple)**.**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.

Si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur X, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X vers la fonction nulle.

Démonstration. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Or $(f_n)_{n\geq 1} = (S_n - S_{n-1})_{n\geq 1}$. Comme $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(S_{n-1})_{n\geq 1}$ convergent simplement vers S, il vient d'après le théorème 5.2 que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $S - S = 0$. □

Théorème 7.2 (Structure algébrique)**.**
L'ensemble E des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur X est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ (cf. théorème 7.1).

De plus, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{F}(X,\mathbb{K}) \\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \end{array}$ est une application linéaire sur E.

7.1.2 Convergence absolue

Définition 7.6 (Convergence absolue)**.**
Une série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ d'applications de X dans $\mathbb{K}$ **converge absolument sur X** si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge absolument pour tout $x \in X$.

Proposition 7.5. Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant absolument sur X.

Alors pour tout sous-ensemble X' de X, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{n|X'}$ converge absolument sur X'.

Théorème 7.3 (Structure algébrique)**.** L'ensemble des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant absolument sur X est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur X.

7.1.3 Convergence uniforme

Définition 7.7 (Convergence uniforme)**.**
Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ d'applications de X dans $\mathbb{K}$ **converge uniformément sur** X si et seulement si la suite d'applications $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge uniformément sur X.

Proposition 7.6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.
Alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur X et que la suite d'applications $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Proposition 7.7 (Condition nécessaire de convergence uniforme)**.**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.
Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur X, alors la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle.

Démonstration. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S.

Or $(f_n)_{n\geq 1} = (S_n - S_{n-1})_{n\geq 1}$. Comme $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(S_{n-1})_{n\geq 1}$ convergent uniformément vers S, il vient d'après le théorème 5.3 que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $S - S = 0$. □

Proposition 7.8. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément sur X.
Alors pour tout sous-ensemble X' de X, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_{n|X'}$ converge uniformément sur X'.

Théorème 7.4 (Structure algébrique)**.** L'ensemble des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément sur X est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur X.

Théorème 7.5 (Condition de convergence de CAUCHY)**.**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.
La série d'applications $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \forall q > N, \forall x \in X, \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

Définition 7.8 (Convergence localement uniforme)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ d'applications de I dans $\mathbb{K}$ **converge localement uniformémement sur I** si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Proposition 7.9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$.
Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur I, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge localement uniformément sur I.
Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge localement uniformément sur I, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I.

7.1.4 Convergence normale

Définition 7.9 (Convergence normale)**.**

Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ d'applications de X dans $\mathbb{K}$ **converge normalement sur** X si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. il existe un entier naturel N tel que f_n soit bornée sur X pour tout $n \geq N$;
2. la série numérique $\sum_{n\geq N} \|f_n\|_\infty$ converge.

Proposition 7.10. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant normalement sur X.

Alors pour tout sous-ensemble X' de X, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{n|X'}$ converge sur X'.

Proposition 7.11. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans $\mathbb{K}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge}$$

alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur X.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq u_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq u_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq u_n$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, donc d'après le théorème de minoration des séries à termes positifs, il vient que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge. On conclut que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement. □

Théorème 7.6 (Structure algébrique)**.** L'ensemble des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant normalement sur X est un sous-espace vectoriel :

— de l'ensemble des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant absolument sur X ;

— de l'ensemble des séries d'applications de X dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément sur X.

Définition 7.10 (Convergence localement normale)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ d'applications de I dans $\mathbb{K}$ **converge localement normalemement sur** $\boldsymbol{I}$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans I.

Proposition 7.12. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$.

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge localement normalement sur I.

On présente un plan pour l'étude de la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *(à adapter selon les besoins)*.

Étape n° 1 Étude de la convergence simple et absolue $\Longrightarrow$ domaine D de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$

Étape n° 2 Calcul de $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in D} |f_n(x)|$

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur D
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ diverge grossièrement $\Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas uniformément sur D
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ diverge non grossièrement $\Longrightarrow$ Étape n° 3

Étape n° 3 Étude de la convergence uniforme de $(R_n)_n$ sur D vers la fonction nulle :

- $\forall x \in D,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ vérifie les conditions du théorème spécial à certaines séries alternées
  $\Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur D (*par majoration de* $|R_n|$ *par* $|f_{n+1}|$)
- Minoration d'un paquet de CAUCHY par une suite ne convergeant pas vers 0
  $\Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas uniformément sur D
  (*par minoration de* R_n *par ce paquet de* CAUCHY)

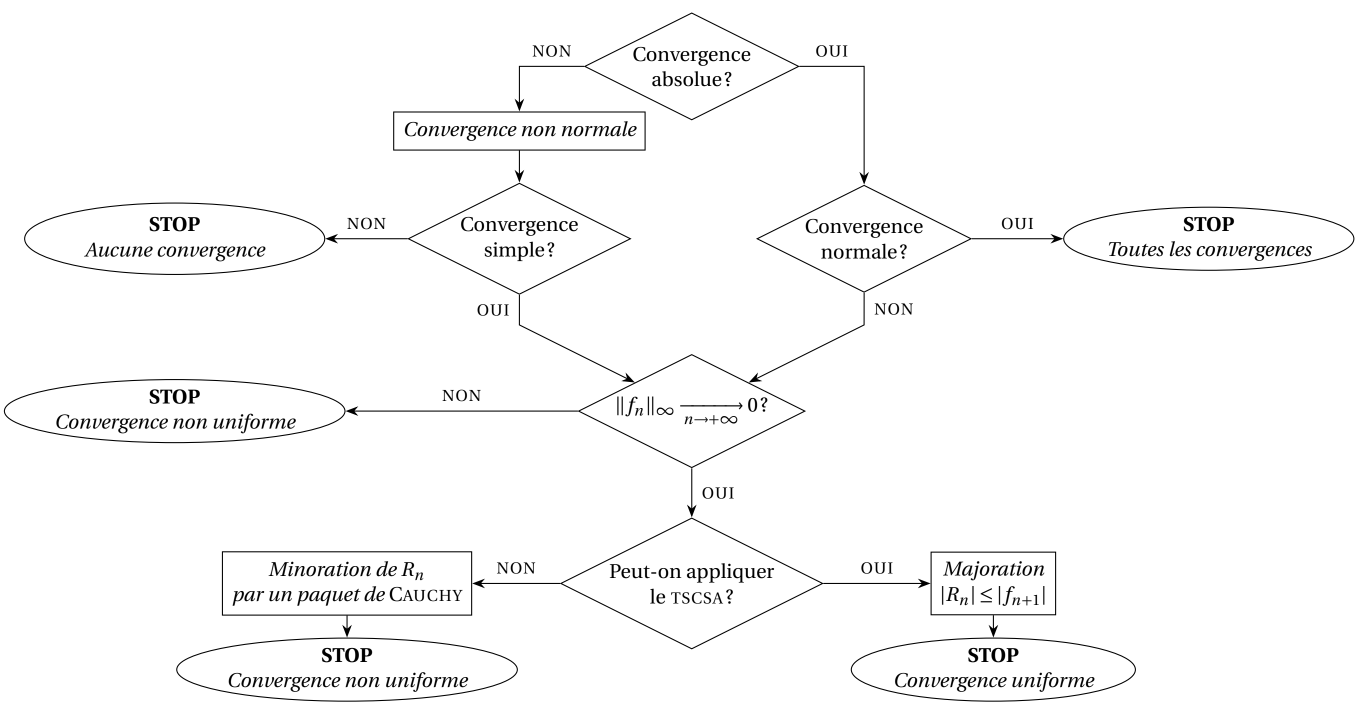


FIGURE 7.1 – Plan d'étude de la convergence de la série d'applications $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$

Exercice. *Étudier la convergence des séries d'applications* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *définies par :*

1. *pour tout* $n \geq 1$ $\quad f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(nx)}{n^2} \end{array}$
2. *pour tout* $n \geq 1$, $\quad f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nxe^{-nx} \end{array}$
3. *pour tout* $n \geq 1$, $\quad f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n \ln\left[1+\dfrac{\arctan x}{n}\right] \end{array}$
4. *pour tout* $n \geq 1$, $\quad f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n+n^3x^2} \end{array}$

Solution.

1. On a $\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   - Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$: donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(0)$ converge absolument.
   - Si $x > 0$, alors $e^{-x} < 1$.

   $$\lim_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n^3 x e^{-nx} = \lim_{n\to+\infty} n^3 x (e^{-x})^n = 0 \text{ par croissance comparée}$$

   D'après la règle « $n^\alpha u_n$ », $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolument.

   On en conclut que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge absolument sur $\mathbb{R}_+$.

   Soit $n \geq 1$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = n\left[e^{-nx} + x\cdot\left(-ne^{-nx}\right)\right] = ne^{-nx}[1-nx]$$

   Donc $f_n'(x) \geq 0$ si et seulement si $1 - nx \geq 0$, i.e. $x \leq \dfrac{1}{n}$.
   De plus $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} nx(e^{-n})^x = 0$ par croissance comparée.
   Enfin, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \cancel{n}\cdot\dfrac{1}{\cancel{n}}\cdot e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0^+

   f_n est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$ donc $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n|(x) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f_n(x) = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{e}$.
   $(\|f_n\|_\infty)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0 donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ne converge ni uniformément ni normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$: alors $1+\dfrac{\arctan x}{n} \geq 1$ puis $\ln\left[1+\dfrac{\arctan x}{n}\right] \geq 0$.

Donc $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| = \ln\left[1+\dfrac{\arctan x}{n}\right] \geq 0$ et $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est une série alternée.

$\forall n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\arctan x}{n+1} \leq \dfrac{\arctan x}{n} \quad \Longrightarrow \quad 1+\dfrac{\arctan x}{n+1} \leq 1+\dfrac{\arctan x}{n}$.

Donc $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$ pour tout $n \geq 1$: la suite $(|f_n(x)|)_{n\geq 1}$ est décroissante.

De plus, $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\arctan x}{n}$: donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$. D'après le TSCSA, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

On en conclut que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque. $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\arctan x}{n}$: donc $\sum\limits_{n\geq 1} |f_n(x)|$ diverge (sauf en $x=0$).

$\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ne converge donc pas absolument ni normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $n \geq 1$. $|f_n|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n|'(x) = \frac{1}{1+\frac{\arctan x}{n}} \cdot \left[\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right] \geq 0$$

Donc $|f_n|$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$: donc $\lim\limits_{x\to+\infty} |f_n(x)| = \ln\left(1+\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

Donc $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n|(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} |f_n|(x) = \ln\left(1+\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

D'après le TSCSA, $\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|R_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \|f_{n+1}\|_\infty = \ln\left[1+\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right]$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left[1+\dfrac{\pi}{2(n+1)}\right] = 0$ donc $(R_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle puis $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

   - Si $x=0$, $f_n(0) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$: donc $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(0)$ diverge.
   - Si $x>0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3x^2}$.

     $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^3x^2}$ converge donc, par théorème d'équivalence, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge absolument.

   On en conclut que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge absolument sur son domaine de convergence $\mathbb{R}_+^*$.

   Soit $n \geq 1$. Alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = \dfrac{-2n^3x}{(n+n^3x^2)^2} < 0$.

   Donc f_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \dfrac{1}{n}$.

   On en déduit que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x)$.
Soit $k \geq 1$, alors $k \leq k+1$: donc $k^3 \leq (k+1)^3$ puis $k^3 x^2 \leq (k+1)^3 x^2$.
D'où $k + k^3 x^2 \leq (k+1) + (k+1)^3 x^2$ puis $f_{k+1}(x) \leq f_k(x)$.
Donc $R_n(x) \geq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_{2n}(x) = n f_{2n}(x)$ puis :

$$\forall n \geq 1,\ \|R_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |R_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} R_n(x) \geq R_n\left(\frac{1}{n}\right) \geq n f_{2n}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n + 8n^3 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{10}$$

Donc $(\|R_n\|_\infty)_{n\geq 1}$ ne converge pas 0 puis $(R_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle. On en conclut que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.2 Théorèmes d'interversion

7.2.1 Interversion somme-limite

Théorème 7.7 (Théorème d'interversion somme-limite)**.**
Soit $a \in \overline{X}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de X dans $\mathbb{K}$ telle que :

1. pour tout entier naturel n, f_n admette une limite ℓ_n en a ;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur X.

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en a et $\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Remarque. C'est-à-dire que $\lim_{x\to a}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right]$.

Démonstration. Vérifions que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème d'interversion des limites :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ admet une limite en a comme somme (finie) d'applications admettant une limite en a et $\sigma_n = \lim_{x\to a} S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \ell_k$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur X donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers S.

D'après ce théorème :

1. $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \ell_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge : donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge ;
2. $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ admet une limite fine en a ;
3. $\lim_{x\to a} S(x) = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$. □

Théorème 7.8. Soit $a \in X$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de X dans $\mathbb{K}$ telle que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est continue en a ;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur X.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Démonstration. Vérifions les hypothèses du théorème d'interversion somme-limite.

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a donc admet $\ell_n = f_n(a)$ comme limite en a ;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur X vers S.

On applique le théorème d'interversion somme-limite avec la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$:

— $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément donc simplement sur X et donc en a ;

— S admet une limite finie σ en a et $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a) = S(a)$.

On en conclut que $\lim_{x\to a} S(x) = S(a)$ puis que S est continue en a. □

Corollaire. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de X dans $\mathbb{K}$ telle que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est continue sur X ;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur X.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur X.

Démonstration. On applique le théorème précédent en tout point a de X. □

Remarque. On utilise régulièrement la contraposée de ce théorème pour établir une absence de convergence uniforme.

Corollaire. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est continue sur I ;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge localement uniformément sur I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Démonstration. Tout point de I est inclus dans un segment inclus dans I.

Donc on conclut en appliquant le corollaire précédent sur tout segment inclus dans I. □

7.2.2 Interversion somme-intégrale

Théorème 7.9 (Théorème d'interversion somme-intégrale)**.**
Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est continue sur $[a,b]$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. Vérifions que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème d'interversion limite-intégrale :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est continue sur $[a,b]$ comme somme (finie) d'applications continues sur $[a,b]$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur X donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers S.

D'après ce théorème :

1. S est continue sur $[a,b]$;
2. $\left(\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$: donc $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$. □

7.2.3 Interversion somme-dérivation

Théorème 7.10 (Théorème d'interversion somme-dérivation)**.**
Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers S_1 ;
3. il existe x_0 de $[a,b]$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ converge.

Alors :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une application notée S ;
2. S est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$;
3. $S_1' = S$.

Démonstration. Vérifions que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème d'interversion limite-dérivation :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ comme somme (finie) d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$ donc $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k'\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)'\right)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers S_1 ;
3. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ converge donc $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}} = (S_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

D'après ce théorème :

1. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers S donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers S ;
2. S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$;
3. $S' = S_1$. □

Théorème 7.11 (Théorème d'interversion somme-dérivation)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série d'applications de I dans $\mathbb{K}$ telles que :

1. pour tout entier naturel n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge localement uniformément sur I vers S_1 ;
3. il existe x_0 de I tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ converge.

Alors :

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge localement uniformément sur I vers une application notée S ;
2. S est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
3. $S' = S_1$.

Démonstration. On applique le théorème précédent sur tout segment inclus dans I. □

ATTENTION. Si I n'est pas un segment, l'énoncé obtenu en enlevant « uniformément » dans les hypothèses et dans la conclusion n'est pas valable.

Troisième partie

Séries entières. Séries de FOURIER

Thème n° 8

Séries entières : rayon de convergence

Définition 8.1 (Série entière)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.

On appelle **série entière de coefficient a_n** la série d'applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$.

Théorème 8.1 (Structure algébrique)**.** L'ensemble des séries entières est une sous-algèbre vectorielle de l'ensemble des séries d'applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

En effet, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n)$ sont deux séries entières, alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [z \mapsto (a_n + b_n) z^n]$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n) \times \sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[z \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n \right]$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [z \mapsto (\lambda a_n) z^n]$$

8.1 Définition

Lemme (Lemme d'ABEL)**.** Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière et z_0 un nombre complexe non nul tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(|z| < |z_0| \Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge absolument} \right)$$

Démonstration. On note M un majorant de la suite $(a_n z_0^n)_n$: $\forall n \in \mathbb{N}, \left| a_n z_0^n \right| \leq M$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| a_n z^n \right| = \left| a_n z_0^n \cdot \frac{z^n}{z_0^n} \right| = \left| a_n z_0^n \right| \cdot \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| \leq M \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n$$

Si $|z| < |z_0|$, alors $\frac{|z|}{|z_0|} < 1$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|z|}{|z_0|} \right)^n$ est une série géométrique convergente. D'après le théorème de majoration des séries à termes positifs, il vient que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument. □

Théorème 8.2 (Rayon de convergence)**.** Pour toute série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(z\mapsto a_n z^n)$, il existe un unique élément $R\in[0,+\infty]$ tel que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ \begin{cases} |z|<R & \Longrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge } \textit{(absolument)} \\ |z|>R & \Longrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ diverge } \textit{(grossièrement)} \end{cases}$$

R est appelé le **rayon de convergence de** $\boldsymbol{\sum_{n\in\mathbb{N}}(z\mapsto a_n z^n)}$.
Le **disque de convergence de** $\boldsymbol{\sum_{n\in\mathbb{N}}(z\mapsto a_n z^n)}$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.
L'**intervalle de convergence de** $\boldsymbol{\sum_{n\in\mathbb{N}}(z\mapsto a_n z^n)}$ l'ensemble $]-R,R[$.

Démonstration page 77. □

Remarque.

- Une série entière de rayon de convergence nul a un domaine de convergence réduit à $\{0\}$.
- Une série entière de rayon de convergence infini converge en tout point de $\mathbb{C}$.

Remarque. Il est impossible d'énoncer un résultat général lorsque $z=R$. En effet, des séries entières de même rayon de convergence R peuvent se comporter de manière différente lorsque $|z|=R$.

C'est pourquoi on appelle souvent **cercle d'incertitude** le cercle de centre 0 et de rayon R.

Exemple. Les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}}(z\mapsto z^n)$, $\sum_{n\geq 1}\left(z\mapsto \frac{z^n}{n}\right)$ et $\sum_{n\geq 1}\left(z\mapsto \frac{z^n}{n^2}\right)$ ont un rayon de convergence égal à 1.
Pourtant :

— la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ diverge pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|=1$;

Démonstration. $\lim_{n\to+\infty}|z^n|=1$ donc $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers zéro, et $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ diverge (grossièrement). □

— la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$ est semi-convergente pour tout nombre complexe z tel que $|z|=1$ sauf $z=1$ (où elle diverge).

Démonstration.

— Si $z=1$, $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

— Sinon, $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\sum_{n}\frac{z^n}{n}=\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n\theta}{n}$.
Les deux séries sont (semi-)convergentes d'après la règle d'ABEL. □

— la série numérique $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$ est absolument convergente pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$.

Démonstration. $\forall n\geq 1$, $\left|\frac{z^n}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$: d'où la convergence (absolue) de $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$. □

8.1.1 Propriétés

Corollaire. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}}(z\mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R et z_0 un nombre complexe non nul tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Alors $R \geq |z_0|$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $R < |z_0|$. Soit z un nombre complexe tel que $|z| \in]R, |z_0|[$:

— comme $|z| < |z_0|$, il vient d'après le lemme d'ABEL que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge (absolument) ;

— comme $|z| > R$, il vient d'après la définition du rayon de convergence que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge (grossièrement).

Il y a contradiction : donc $R \geq |z_0|$. □

Corollaire. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}}(z\mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

$$\forall z\in\mathbb{C}, \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge} & \Longrightarrow \quad |z| \leq R \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \text{ diverge} & \Longrightarrow \quad |z| \geq R \end{cases}$$

Démonstration. C'est la contraposée du théorème précédent. □

8.1.2 Cas particuliers

Proposition 8.1. Soit a un nombre complexe non nul.

Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}(z\mapsto a^n z^n)$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{|a|}$ et

$$\forall z\in\mathbb{C}, \left(|z| < \frac{1}{|a|} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^n = \frac{1}{1-az}\right)$$

Démonstration. Soit z un nombre complexe.

— Si $|z| < \frac{1}{|a|}$, alors $|az| < 1$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}(az)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a^n z^n$ converge (absolument).

— Si $|z| > \frac{1}{|a|}$, alors $|az| > 1$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}(az)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a^n z^n$ diverge (grossièrement).

On déduit de la définition du rayon de convergence que $R = \frac{1}{|a|}$. □

Proposition 8.2. Soit α un nombre réel.

Alors la série entière $\sum_{n\geq 1}\left(z\mapsto \frac{z^n}{n^\alpha}\right)$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Démonstration. Soit z un nombre complexe.

— Si $|z| < 1$, alors $n^2 \cdot \left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right| = n^{2-\alpha}|z|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

D'après la règle « $n^\alpha u_n$ », $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ converge (absolument).

— Si $|z| > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^n}{n^\alpha} = +\infty$ par croissance comparée. Donc $\left(\left|\frac{z^n}{n^\alpha}\right|\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers zéro puis $\left(\frac{z^n}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers zéro et $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$ diverge (grossièrement).

On déduit de la définition du rayon de convergence que $R = 1$. □

8.2 Stabilités opératoires

8.2.1 Structure vectorielle

Théorème 8.3. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R de somme S.

Pour tout nombre complexe λ non nul, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto \lambda a_n z^n)$ a pour rayon de convergence R et sa somme S_λ vérifie :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left[|z| < R \Longrightarrow S_\lambda(z) = \lambda \cdot S(z)\right]$$

Théorème 8.4 (Domaine de convergence de la somme de deux séries entières)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ de rayon de convergence R_a et de somme S_a.

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n)$ de rayon de convergence R_b et de somme S_b.

On note R le rayon de convergence et S la somme de leur série entière somme. Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left[|z| < \min(R_a, R_b) \Longrightarrow S(z) = S_a(z) + S_b(z)\right]$$

De plus, si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

Exemple. Soit $a \in [0, 1[$.

Alors les séries entières coefficients $a_n = 1 + a^n$ et $b_n = -1$ ont pour rayon de convergence 1.

Mais leur série entière somme de coefficient $a_n + b_n = a^n$ a pour rayon de convergence $\dfrac{1}{a}$ (ou $+\infty$ si $a = 0$).

Définition 8.2 (Séries entières disjointes)**.**

Les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n)$ sont dites **disjointes** si et seulement si $a_n b_n = 0$ pour tout entier naturel n.

Proposition 8.3 (Somme de deux séries disjointes)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n)$ deux séries entières disjointes de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors leur série entière somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} [z \mapsto (a_n + b_n) z^n]$ a pour rayon de convergence $R = \min(R_a, R_b)$.

Exemple. Calcul du rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(z \mapsto n^{(-1)^n} z^n\right)$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(z \mapsto n^{(-1)^n} z^n\right) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \left(z \mapsto 2p z^{2p}\right) + \sum_{p\in\mathbb{N}} \left(z \mapsto \dfrac{z^{2p+1}}{2p+1}\right)$ est la somme de deux séries entières disjointes.

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, on note $u_p = 2p z^{2p}$.

Si $z = 0$, alors $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_p = \sum_{p\in\mathbb{N}} 0$ converge.

Si $z \neq 0$, alors $\forall p \geq 1,\ u_p \neq 0$ et $\left|\dfrac{u_{p+1}}{u_p}\right| = \left|\dfrac{(2p+2) z^{2p+2}}{2p z^{2p}}\right| = \dfrac{p+1}{p} \cdot |z|^2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} |z|^2$.

D'après la règle de D'ALEMBERT :

— si $|z|^2 < 1 \Rightarrow |z| < 1$, alors $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} u_p = \sum\limits_{p\in\mathbb{N}} 2p \cdot z^{2p}$ converge ;

— si $|z|^2 > 1 \Rightarrow |z| > 1$, alors $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} u_p = \sum\limits_{p\in\mathbb{N}} 2p \cdot z^{2p}$ diverge.

Par unicité du rayon de convergence, $R = 1$.

De même, le rayon de convergence de $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}} \left(z \mapsto \dfrac{z^{2p+1}}{2p+1}\right)$ vaut 1.

Donc le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(z \mapsto n^{(-1)^n} z^n\right)$ est $\min(1,1) = 1$.

8.2.2 Produit

Théorème 8.5 (Domaine de convergence du produit de deux séries entières)**.**

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ de rayon de convergence R_a et de somme S_a.

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n)$ de rayon de convergence R_b et de somme S_b.

On note R le rayon de convergence et S la somme de leur série entière produit. Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left[|z| < \min(R_a, R_b) \Longrightarrow S(z) = S_a(z) \cdot S_b(z)\right]$$

8.2.3 Dérivation

Définition 8.3 (Série entière dérivée)**.** On appelle **série entière dérivée de la série entière** $\boldsymbol{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)}$ la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} [z \mapsto (n+1) a_{n+1} z^n]$.

Proposition 8.4. Une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon de convergence.

Démonstration page 79. □

Corollaire. Une série entière et ses séries dérivées à tout ordre ont le même rayon de convergence.

8.3 Méthodes d'évaluation du rayon de convergence

8.3.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 8.6 (Théorème de majoration des séries entières)**.**

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n)$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b tels que $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout entier naturel n. Alors $R_a \geq R_b$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $R_a < R_b$. Soit z un nombre complexe tel que $|z| \in]R_a, R_b[$:

— comme $|z| < R_b$, il vient que $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ converge (absolument) : donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge (absolument) par théorème de majoration des séries à termes positifs;

— comme $|z| > R_a$, il vient que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge.

Il y a contradiction : donc $R_a \geq R_b$. □

Corollaire. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n)$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b tels que $a_n = \mathrm{O}(b_n)$. Alors $R_a \geq R_b$.

Remarque. Le résultat est donc valable si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$.

Corollaire (Théorème d'équivalence des séries entières)**.** Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n)$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b tels que $|a_n| \sim |b_n|$. Alors $R_a = R_b$.

Démonstration. Comme $|a_n| \sim |b_n|$, alors $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ et $b_n = \mathrm{O}(a_n)$. D'où le résultat. □

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \left[z \mapsto e^{\sin n} z^n\right]$
2. $\sum_n \left[z \mapsto \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right\} z^n\right]$

8.3.2 Règles de calcul

Théorème 8.7 (Règle de D'ALEMBERT)**.** Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R telle que il existe un entier naturel N tel que

$$\forall n \geq N,\ a_n \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geq N} \quad \text{converge vers } \ell \in [0, +\infty]$$

Alors $R = \frac{1}{\ell}$ avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = a_n z^n$.
Si $z = 0$, alors $u_n = 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Sinon, pour tout $n \geq N$, $u_n \neq 0$ et :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |z|$$

• <u>$\ell \in]0, +\infty[$</u> Alors $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell|z|$. D'après la règle de D'ALEMBERT pour les séries numériques :

— si $\ell|z| < 1$, c'est-à-dire $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument;

— si $\ell|z| > 1$, c'est-à-dire $|z| > \frac{1}{\ell}$, alors la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge.

Par unicité du rayon de convergence, $R = \frac{1}{\ell}$.

• $\underline{\ell = 0}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$. D'après la règle de D'ALEMBERT pour les séries numériques, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{R}} a_n z^n$ converge. On déduit de la définition du rayon de convergence que $R = +\infty$ est la seule valeur possible.

• $\underline{\ell = +\infty}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = +\infty$. D'après la règle de D'ALEMBERT pour les séries numériques, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge. On déduit de la définition du rayon de convergence que $R = 0$ est la seule valeur possible. □

Remarque. Afin de différencier cette règle et son homonyme du chapitre précédent, on indiquera « règle de D'ALEMBERT pour les séries entières » ou « règle de D'ALEMBERT pour les séries numériques ».

Théorème 8.8 (Règle de CAUCHY)**.** Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R telle que $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\ell \in [0, +\infty]$.

Alors $R = \dfrac{1}{\ell}$ avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = a_n z^n$.

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z|$$

• $\underline{\ell \in]0, +\infty[}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell|z|$. D'après la règle de CAUCHY pour les séries numériques :

— si $\ell|z| < 1$, c'est-à-dire $|z| < \dfrac{1}{\ell}$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument;

— si $\ell|z| > 1$, c'est-à-dire $|z| > \dfrac{1}{\ell}$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge.

Par unicité du rayon de convergence, $R = \dfrac{1}{\ell}$.

• $\underline{\ell = 0}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 0$. D'après la règle de CAUCHY pour les séries numériques, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge. On déduit de la définition du rayon de convergence que $R = +\infty$ est la seule valeur possible.

• $\underline{\ell = +\infty}$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = +\infty$. D'après la règle de CAUCHY pour les séries numériques, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge. On déduit de la définition du rayon de convergence que $R = 0$ est la seule valeur possible. □

Remarque. Afin de différencier cette règle et son homonyme du chapitre précédent, on indiquera « règle de CAUCHY pour les séries entières » ou « règle de CAUCHY pour les séries numériques ».

Exemple. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(z \mapsto \dfrac{e^{-n}}{n} z^n\right)$
2. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(z \mapsto n z^{2n}\right)$

Annexe A

Démonstration du théorème 8.2 (non exigible)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des nombres complexes z_0 tels que la suite numérique $(a_n z_0^n)_n$ est bornée, puis on définit $A = |\mathscr{A}| = \{|z_0|,\ z_0 \in \mathscr{A}\}$ l'ensemble des modules des éléments de $\mathscr{A}$: remarquons que A est une partie de $\mathbb{R}_+$ par construction.
Comme 0 est un élément de $\mathscr{A}$, il vient que $0 = |0|$ est un élément de A : donc A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Le lemme d'ABEL se formule alors de la manière suivante :

$$z_0 \in \mathscr{A} \Longrightarrow \left[\forall z \in \mathbb{C},\ (|z| < |z_0| \Rightarrow z \in \mathscr{A})\right] \tag{A.1}$$

Soit r_0 est un élément de A : alors il existe un nombre complexe z_0 de module r_0 qui appartient à $\mathscr{A}$. Donc si $r \in [0, r_0[$, alors il existe un nombre complexe z de module $r < r_0 = |z_0|$ qui appartient à $\mathscr{A}$. l'équation (A.1) permet de alors de déduire que $z \in \mathscr{A}$, puis que $r \in A$. On vient de montrer que $[0, r_0[\subset A$. Finalement, on a l'implication suivante :

$$r_0 \in A \Longrightarrow [0, r_0[\subset A \tag{A.2}$$

(Autrement dit : si un réel positif appartient à A, tous les réels positifs qui lui sont inférieurs y sont également.)

Pour montrer que R existe, on distingue deux cas selon que A est une partie majorée ou non.

- Supposons que A ne soit pas majorée : montrons que $A = \mathbb{R}_+$.
  Soit $r \in \mathbb{R}_+$: comme A n'est pas majorée, il existe un élément r_1 de A tel que $r_1 > r$. D'après la relation (A.2), il vient que $r \in [0, r_1[\subset A$: donc $r \in A$. On en déduit que $\mathbb{R}_+ \subset A$: comme A est une partie de $\mathbb{R}_+$, on en conclut que $A = \mathbb{R}_+$.

  Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $z_0 = 2 \cdot |z|$. Comme $z_0 \in \mathbb{R}_+ = A$, il vient que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée. Puisque $|z| < 2 \cdot |z| = z_0 = |z_0|$, le lemme d'ABEL permet de conclure que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument.
  Donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge pour tout nombre complexe z et $R = +\infty$ vérifie la condition demandée.

- Supposons que A est majorée : comme A est non vide, elle admet donc une borne supérieure. Montrons que $\sup A$ est la valeur recherchée.
  - Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \sup A$: alors $|z|$ n'est pas un élément de A.
    Donc z n'est pas un élément de $\mathscr{A}$ et la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée et donc ne converge pas.
    On en déduit que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ diverge grossièrement.
  - Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \sup A$. Alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $|z| < \sup A - \varepsilon$ et tel que $\sup A - \varepsilon$ soit un élément de A.
    Donc il existe un nombre complexe z_0 tel que $|z_0| = \sup A - \varepsilon$ et la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée.
    On en déduit d'après le lemme d'ABEL, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument.

  $R = \sup A$ est bien la valeur qui vérifie la valeur demandée.

L'unicité de R vient directement de sa définition.

Annexe B

Démonstration de la proposition 8.4 (non exigible)

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq n_0}(z\longmapsto a_n z^n)$ et R' le rayon de convergence de sa série entière dérivée $\sum_{n\geq n_0}[z\longmapsto (n+1)a_{n+1}z^n]$.

Pour tout entier naturel n strictement ou égal à n_0, on a $|a_{n+1}|\leq (n+1)\cdot|a_{n+1}|$.

Comme les rayons de convergence de $\sum_{n\geq n_0}(z\longmapsto a_{n+1}z^n)$ et $\sum_{n\geq n_0}(z\longmapsto a_n z^n)$ sont égaux, on en déduit d'après le théorème de majoration des séries entières que $R\geq R'$.

Soit z un nombre complexe que $|z|<R$: alors la série numérique $\sum_{n\geq n_0} a_n z^n$ converge absolument.

Soit $r=\dfrac{|z|+R}{2}\in\ ]|z|,R[$. Alors $\forall n\geq n_0$, $(n+1)a_{n+1}z^n=\dfrac{(n+1)}{r}\dfrac{z^n}{r^n}\cdot a_{n+1}r^{n+1}$.
Comme $|z|<r$, on a $\left|\dfrac{z}{r}\right|=\dfrac{|z|}{|r|}<1$: donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{(n+1)}{r}\dfrac{z^n}{r^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)}{r}\left|\dfrac{z}{r}\right|^n=0$ par croissance comparée.
Donc la suite $\left(\dfrac{(n+1)}{r}\dfrac{z^n}{r^n}\right)_{n\geq n_0}$ est bornée. On note M un majorant de cette suite et :

$$\forall n\geq n_0,\ |(n+1)a_{n+1}z^n|\leq M|a_{n+1}|r^{n+1}=M|a_{n+1}r^{n+1}|$$

Comme les rayons de convergence de $\sum_{n\geq n_0}\left(z\longmapsto a_{n+1}z^{n+1}\right)$ et $\sum_{n\geq n_0}(z\longmapsto a_n z^n)$ sont égaux et que $r<R$, la série numérique $\sum_{n\geq n_0} M|a_{n+1}|r^{n+1}$ est convergente.

D'après le théorème de majoration des séries à termes positifs, il vient que la série numérique $\sum_{n\geq n_0}|(n+1)a_{n+1}z^n|$ est également convergente.
La définition du rayon de convergence permet alors d'en déduire que $|z|\leq R'$.

On vient donc de montrer que pour tout réel r strictement positif, $(r<R)\Rightarrow(r\leq R')$, i.e. $R\leq R'$.

On en conclut donc que $R=R'$.

Chapitre 9

Séries entières : somme et développements

9.1 Convergence et régularité de la somme

9.1.1 Convergence

Théorème 9.1 (Convergence d'une série entière)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R.

Alors la série d'applications $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ converge normalement sur toute partie compacte incluse dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.

Démonstration page 87. □

9.1.2 Continuité

Théorème 9.2 (Continuité de la somme)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R et de somme S. Alors S est continue sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R.

Démonstration. Pour tout entier naturel n, $z \mapsto a_n z^n$ est continue.
D'après le théorème précédent, la série d'applications $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ converge localement normalement, donc localement uniformément sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R. Donc sa somme S y est continue. □

Proposition 9.1 (Étude aux bornes de l'intervalle de convergence)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R et de somme S.

Si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ converge absolument, alors la série entière converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon R, et S y est continue (en particulier en $-R$ et en R).

Si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n$ converge, alors la série entière converge uniformément sur $[0, R]$ et S est continue en R.

Si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (-R)^n$ converge, alors la série entière converge uniformément sur $[-R, 0]$ et S est continue en $-R$.

9.1.3 Dérivabilité

Théorème 9.3 (Dérivabilité de la somme)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme S.

Alors S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R,R[,\ S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

Exemple. On peut ainsi évaluer les dérivées de la série géométrique.

En effet, pour tout x de $]-1,1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot x^n = \frac{1}{1-x}$. Donc :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$
$$\frac{2}{(1-x)^3} = S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!}{(n-2)!} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

Corollaire. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière de de rayon de convergence non nul et de somme S.

Alors pour tout entier naturel p, $a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$.

Corollaire (Unicité du développement en série entière)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto b_n z^n)$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b non nuls tels que :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \left[|z| < \min(R_a, R_b) \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right]$$

Alors $a_n = b_n$ pour tout entier naturel n.

Corollaire (Développement en série entière de la somme)**.**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme S.

Alors $\forall x \in]-R,R[,\ S(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{S^{(p)}(0)}{p!} x^p$.

9.2 Développement en série entière

9.2.1 Généralités

Définition 9.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$.

L'application f est dite **développable en série entière en 0** si et seulement si $0 \in \mathring{I}$ et il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ de rayon de convergence R non nul telle que :

$$\forall x \in I \cap]-R, R[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Auquel cas, cette relation constitue le **développement en série entière de f en 0**.

Soit x_0 un élément de I. L'application f est dite **développable en série entière en x_0** si et seulement si $x_0 \in \mathring{I}$ et il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (z \mapsto a_n z^n)$ de rayon de convergence R non nul telle que :

$$\forall x \in I \cap]x_0 - R, x_0 + R[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Auquel cas, cette relation constitue le **développement en série entière de f en x_0**.

Théorème 9.4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ développable en série entière en 0 avec le développement :

$$\forall x \in I \cap]-R, R[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I \cap]-R, R[$ et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout entier naturel n.

ATTENTION. Toute fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 n'est pas développable en série entière.

Exemple. Soit $f : t \mapsto e^{-1/t^2}$. Alors on montre que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0) = 0$: donc si f était développable en série entière en 0, alors f serait nulle, ce qui n'est pas le cas.

Proposition 9.2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ développable en série entière en 0 avec le développement :

$$\forall x \in I \cap]-R, R[, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Si f est paire, alors $a_{2p+1} = 0$ pour tout entier naturel p.
Si f est impaire, alors $a_{2p} = 0$ pour tout entier naturel p.

Démonstration. $\forall x \in I \cap]-R, R[, \ f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$

— Si f est paire, alors $\forall x \in I \cap]-R, R[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x) = f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$.
Par unicité du développement en série entière, il vient que $a_n = (-1)^n a_n$ pour tout entier naturel n.
En particulier, si $n = 2p+1$ est impair, $a_{2p+1} = -a_{2p+1}$ i.e. $a_{2p+1} = 0$.

— Si f est impaire, alors $\forall x \in I \cap]-R, R[, \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x) = -f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -(-1)^n a_n x^n$.
Par unicité du développement en série entière, il vient que $a_n = -(-1)^n a_n$ pour tout entier naturel n.
En particulier, si $n = 2p$ est pair, $a_{2p} = -a_{2p}$ i.e. $a_{2p} = 0$. □

Proposition 9.3 (avec le reste intégral)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{C}$.

Alors f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si il existe un réel strictement positif α tel que $]-\alpha,\alpha[\subset I$ et

$$\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t=0$$

Exemple (Développement en série entière de l'exponentielle).

On note $f : x\mapsto e^x$: alors $f'=f$ et par suite $f^{(n)}=f$ pour tout entier naturel.

Soit x un nombre réel quelconque. Alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t\right|\\ &\le \max(1,e^x)\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t\right| = \max(1,e^x)\left|\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x\right| = \max(1,e^x)\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \max(1,e^x)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right|=0$.

Évaluons le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(z\mapsto\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(z\mapsto\frac{1}{n!}z^n\right)$ en utilisant la règle de D'ALEMBERT pour les séries entières : $\displaystyle\frac{1}{(n+1)!}\cdot n!=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Il vient donc le rayon de convergence est infini.

On en conclut que la fonction exponentielle est développable en série entière en 0 et :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}}$$

Théorème 9.5 (Condition suffisante d'existence)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\exists M>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \sup_{x\in I}|f^{(n)}(x)|\le M$$

Alors f est développable en série entière en 0.

Exemple (Développement en série entière du cosinus et du sinus).

Pour tout nombre réel x, on a :

$$\cos'(x)=-\sin(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\qquad\text{et}\qquad\sin'(x)=\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

Il vient alors par récurrence que :

$$\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\qquad\text{et}\qquad\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc pour tout entier naturel n et tout réel x, $|\cos^{(n)}(x)|\le 1$ et $|\sin^{(n)}(x)|\le 1$. On en déduit que cos et sin sont développables en série entière en 0.

Calculons les coefficients du développpement en série entière :

$$\cos^{(n)}(0)=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair}\\ 0 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases} \text{ et } \sin^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ est pair}\\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

On étudie la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(z\mapsto \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}z^n\right)=\sum_{p\in\mathbb{N}}\left[z\mapsto \frac{(-1)^p}{(2p)!}z^{2p}\right]$.

Pour $z\in\mathbb{C}$ et $p\in\mathbb{N}$, on pose $u_p=\frac{(-1)^p}{(2p)!}z^{2p}$. Si $x=0$, alors $u_p=0$ et $\sum_p u_p$ converge absolument.

Sinon, $u_p\neq 0$ et $\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right|=\frac{|z|^{2p+2}}{(2p+2)!}\cdot\frac{(2p)!}{|z|^{2p}}=\frac{|z|^2}{(2p+1)(2p+2)}$. Donc $\lim_{p\to+\infty}\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right|=0<1$ et $\sum_{p\in\mathbb{N}}u_p$ converge absolument.

Par unicité du rayon de convergence, celui de la série entière $\sum_p\left[z\mapsto\frac{(-1)^p}{(2p)!}z^{2p}\right]$ a un rayon de convergence infini. On montre de manière identique qu'il en est de même pour la série entière $\sum_{p\in\mathbb{N}}\left[z\mapsto\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}z^{2p+1}\right]$. On en conclut que $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$.

9.2.2 Structure algébrique de l'ensemble des fonctions développables en série entière

Théorème 9.6 (Somme et produit de fonctions développables en série entière)**.**

L'ensemble des fonctions développables en série entière en 0 une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.

De plus, l'application qui à toute fonction développable en série entière en 0 associe son développement est un morphisme d'algèbres vectorielles.

Exemple (Développement en série entière du cosinus et du sinus hyperbolique).

La fonction $x\mapsto e^{-x}$ est développable en série entière et $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$.

Alors ch : $x\mapsto\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ est développable en série entière en 0. Ce développement est valable sur $\mathbb{R}$ comme somme de développements valables sur $\mathbb{R}$ et dont le terme général du coefficient est :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right]=\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{n!}=\begin{cases}\frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ est pair}\\ 0 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

On montre de même que sh : $x\mapsto\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ est développable en série entière en 0, que son développement est valable sur $\mathbb{R}$ et que le terme général du coefficient de son développement est :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n!}-\frac{(-1)^n}{n!}\right]=\frac{1-(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{n!}=\begin{cases}0 & \text{si } n \text{ est pair}\\ \frac{1}{n!} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \mathrm{sh}\,x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Théorème 9.7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$.

Si f est une fonction développable en série entière en 0, alors f' est développable en série entière en 0 et son développement est la série entière dérivée du développement de f.

Si f est une fonction développable en série entière en 0, alors toute primitive de f est développable en série entière en 0 et son développement admet le développement de f pour série dérivée.

Exemple (Développement en série entière du logarithme).

On rappelle que $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière en 0 et que son développement est valable sur $]-1,1[$:

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Or $x \mapsto -\ln(1-x)$ est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ qui s'annule en 0. Donc $x \mapsto -\ln(1-x)$ est développable en série entière en 0 avec pour développement :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

En étudiant la série entière $\sum_{n\geq 1} \left(z \mapsto \dfrac{z^n}{n}\right)$, on établit successivement que :

— son rayon de convergence est égal à un en utilisant la règle de D'ALEMBERT pour les séries entières ;

— elle converge uniformément sur $[-1,0]$ car la série numérique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série de RIEMANN alternée convergente.

Donc la somme de la série entière est en continue en -1 et :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1[\,,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}$$

puis en appliquant le changement de variable $x \longleftrightarrow -x$:

$$\boxed{\forall x \in]-1,1],\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}}$$

On en déduit alors que $\ln 2 = \ln(1+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

9.2.3 Utilisation des équations différentielles

Les équations différentielles et les séries entières peuvent interagir de deux manières différentes.

- *Étant donné une équation différentielle, trouver des solutions développables en série entière.*
- *Étant donnée une fonction développable en série entière, trouver l'expression de son développement à l'aide d'une équation différentielle qu'elle vérifie.*

Exemple. Soit α un nombre réel fixé et $f_\alpha : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x)^\alpha \end{array}$.

Alors f_α est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x \in]-1,+\infty[$, $f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha\dfrac{(1+x)^\alpha}{1+x} = \dfrac{\alpha}{1+x} f_\alpha(x)$.

Donc f_α est solution sur $]-1,+\infty[$ de l'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0 \quad (E)$.

Soit y une solution de (E) développable en série entière en 0. Alors il existe $R>0$ tel que :

$$\forall x \in]-1,+\infty[\cap]-R,R[,\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. On réinjecte les expressions de y et y' dans (E) :

$$\begin{aligned}
0 &= (1+x)y' - \alpha y = y' + xy' - \alpha y \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\big[(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n\big]x^n
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto 0$, on déduit que $(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0$ pour tout entier naturel n, c'est-à-dire que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha - n}{n+1}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0$:

— si $n=1$, $a_1 = \dfrac{\alpha - 0}{0+1} a_0 = \alpha a_0 = \dfrac{\alpha}{1!} a_0$;

— si n est un entier naturel non nul tel que $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0$, alors d'après la relation de récurrence établie plus haut, $a_{n+1} = \dfrac{\alpha-n}{n+1} a_n = \dfrac{\alpha-n}{n+1}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]}{n!} a_0 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} a_0$.

On en déduit donc que $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0$ pour tout entier naturel non nul n.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1$, il vient d'après la règle de D'ALEMBERT pour les séries entières que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(z \mapsto a_n z^n)$ est $R=1$.

Réciproquement, la somme S de cette série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et constitue une solution de l'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0$ sur $]-1,1[$.

La théorie des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre assure que toute solution de cette équation différentielle est de la forme $x \mapsto Ce^{-g(x)}$ où C est une constante réelle quelconque et g une primitive de $x \mapsto \dfrac{-\alpha}{1+x}$. Ainsi, toute solution est de la forme $x \mapsto Ce^{\alpha\ln(1+x)} = C\cdot(1+x)^\alpha$.

Il est en donc de même pour S : il existe une constante réelle C telle que

$$\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right] = C\cdot(1+x)^\alpha$$

En imposant $a_0 = 1$, il vient que $1 = S(0) = C\cdot(1+0)^\alpha = C$ et $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n}$.

Annexe C

Démonstration de la théorème 9.1 (non exigible)

Remarque. Cette démonstration utilise des notions traitées dans le module « Analyse dans $\mathbb{R}^n$ ».

Montrons d'abord que pour tout réel r de $]0,R[$, la série d'applications $\sum_{n\in\mathbb{N}}(z \mapsto a_n z^n)$ converge normalement sur le disque fermé D_r de centre 0 et de rayon r, i.e. $D_r = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \le r\}$.

Soit $r \in]0,R[$. Comme $r < R$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n$ converge absolument.
Soit alors $z \in D_r$: alors $|z| \le r$ et $|a_n z^n| \le |a_n| \cdot |z|^n \le |a_n| \cdot r^n = |a_n r^n|$ pour tout n.
Chaque application $z \mapsto a_n z^n$ est donc bornée sur D_r par $u_n = a_n r^n$ qui est le terme général d'une série absolument convergente : la série d'applications $\sum_{n\in\mathbb{N}}(z \mapsto a_n z^n)$ converge normalement sur D_r.

Soit K un compact inclus dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon R. L'application $|\cdot|$ (module complexe) est continue sur K, donc elle y est bornée et y atteint ses bornes. C'est-à-dire que :

$$\left(\exists z_M \in K,\ \sup_{z\in K}|z| = |z_M|\right) \iff \left(\exists z_M \in K,\ \forall z \in K, |z| \le |z_M|\right) \iff \left(\exists z_M \in K,\ K \subset D_{|z_M|}\right)$$

Comme z_M est un élément de K, il vient que $|z_M| < R$. D'après ce qui précède, la série d'applications $\sum_n (z \mapsto a_n z^n)$ converge normalement sur $D_{|z_M|}$ et donc sur K.

Annexe D

Développements en série entière en 0

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \text{ (valable sur } \mathbb{R} \text{ si } \alpha \in \mathbb{N})$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

$$\forall x \in [-1,1[, -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1], \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \dots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in [-1,1], \quad \operatorname{argsh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \dots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Chapitre 10

Séries de FOURIER

Lors de l'étude de sytèmes analogiques (filtres, ...), on se ramène souvent à l'étude de termes purement sinusoïdaux. Dans le cas où le système est linéaire, la stratégie est décomposer l'entrée en signaux sinusoïdaux, appliquer le système à chacun des termes de la décomposition et générer la sortie en sommant les termes obtenus (c'est la propriété dite « de superposition »).

10.1 Séries trigonométriques réelles

10.1.1 Définition

Définition 10.1 (Série trigonométrique réelle)**.**
On appelle **série trigonométrique (réelle)** toute série d'applications de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} [t \longmapsto a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites numériques à valeurs réelles et ω un nombre réel strictement positif.

10.1.2 Convergence

Proposition 10.1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} [t \longmapsto a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$ converge simplement sur $\left[\alpha, \alpha + \dfrac{2\pi}{\omega}\right[$. Alors elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est une fonction à valeurs réelles $\dfrac{2\pi}{\omega}$-périodique.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \end{array}$ et $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t+T) &= a_n \cos[n\omega(t+T)] + b_n \sin[n\omega(t+T)] = a_n \cos(n\omega t + n\omega T) + b_n \sin(n\omega t + n\omega T) \\ &= a_n \cos(n\omega t + 2n\pi) + b_n \sin(n\omega t + 2n\pi) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = f_n(t). \end{aligned}$$

Donc f_n est T-périodique pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$, alors :

- $\mathbb{R}$ est archimédien, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\eta \in [0, T[$ tel que $t - \alpha = pT + \eta$;
- alors $f_n(t) = f_n(pT + \alpha + \eta) = f_n(\alpha + \eta)$ par T-périodicité.

Comme $\alpha + \eta \in [\alpha, \alpha + T[$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(\alpha + \eta)$ converge : donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ converge. Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Notons S la somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Comme pour tout entier naturel n, f_n est une fonction T-périodique, on a :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ S(t+T)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t+T)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)=S(t)$$

Donc S est T-périodique. □

Proposition 10.2. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}} [t\mapsto a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)]$ converge uniformément sur $\left[\alpha,\alpha+\dfrac{2\pi}{\omega}\right[$. Alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et sa somme est une fonction à valeurs réelles $\dfrac{2\pi}{\omega}$-périodique.

Démonstration. Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit $f_n:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\end{array}$ et $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

D'après le théorème précédent, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $S=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est T-périodique.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est la somme d'une série trigonométrique réelle. Donc, d'après le théorème précédent, R_n est T-périodique. Soit $t\in\mathbb{R}$, alors :

— $\mathbb{R}$ est archimédien, donc il existe $p\in\mathbb{N}$ et $\eta\in[0,T[$ tel que $t-\alpha=pT+\eta$;

— alors $R_n(t)=R_n(pT+\alpha+\eta)=R_n(\alpha+\eta)$ par T-périodicité.

Comme $\alpha+\eta\in[\alpha,\alpha+T[$, il vient que $|R_n(t)|=|R_n(\alpha+\eta)|\leq \sup_{x\in[\alpha,\alpha+T[}|R_n(x)|$.

Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\alpha,\alpha+T[$ puis $\lim_{n\to+\infty}\left[\sup_{x\in[\alpha,\alpha+T[}|R_n(x)|\right]=0$. On conclut donc que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. □

10.1.3 Développement en série de Fourier réel

Lemme. Soit $n\in\mathbb{N}$, $\omega\in\mathbb{R}_+^*$ et $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Alors $\displaystyle\int_0^T \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t=0$ et $\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}T & \text{si } n=0\\ 0 & \text{si } n\neq 0\end{cases}$.

Démonstration. Soit $n\in\mathbb{N}$.

- $t\mapsto\cos(n\omega t)$ est 2π-périodique et paire donc $\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t=\int_{-T/2}^{T/2}\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^{T/2}\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$.
  - Si $n=0$, alors $\displaystyle\int_0^{T/2}\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^{T/2}\mathrm{d}t=T$.
  - Si $n\neq 0$, alors $\displaystyle\int_0^{T/2}\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t=2\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2}=0$.
- $t\mapsto\sin(n\omega t)$ est T-périodique et impaire donc $\displaystyle\int_0^T \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t=\int_{-T/2}^{T/2}\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t=0$. □

Lemme. Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, $\omega\in\mathbb{R}_+^*$ et $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Alors $\displaystyle\int_0^T \cos(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t=0$ et

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cdot\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}T & \text{si } n=m=0\\ T/2 & \text{si } n=m\neq 0\\ 0 & \text{si } n\neq m\end{cases}\quad\text{et}\quad\int_0^T \sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0 & \text{si } n=m=0\\ T/2 & \text{si } n=m\neq 0\\ 0 & \text{si } n\neq m\end{cases}$$

Démonstration. Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$.

- $t\mapsto\cos(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)$ est T-périodique et impaire. Donc $\displaystyle\int_0^T\cos(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t=\int_{-T/2}^{T/2}\cos(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t=0$.
- $t\mapsto\cos(n\omega t)\cdot\cos(m\omega t)$ est T-périodique et paire. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^T\cos(n\omega t)\cdot\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t&=\int_{-T/2}^{T/2}\cos(n\omega t)\cdot\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^{T/2}\cos(n\omega t)\cdot\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t\\&=\cancel{2}\int_0^{T/2}\frac{\cos[(n-m)\omega t]+\cos[(n+m)\omega t]}{\cancel{2}}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{T/2}\cos[(n-m)\omega t]\,\mathrm{d}t+\int_0^{T/2}\cos[(n+m)\omega t]\,\mathrm{d}t=\begin{cases}T&\text{si } n=m=0\\T/2&\text{si } n=m\neq0\\0&\text{si } n\neq m\end{cases}\end{aligned}$$

- $t\mapsto\sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)$ est T-périodique et paire. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^T\sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t&=\int_{-T/2}^{T/2}\sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^{T/2}\sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t\\&=\cancel{2}\int_0^{T/2}\frac{\cos[(n-m)\omega t]-\cos[(n+m)\omega t]}{\cancel{2}}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{T/2}\cos[(n-m)\omega t]\,\mathrm{d}t-\int_0^{T/2}\cos[(n+m)\omega t]\,\mathrm{d}t=\begin{cases}0&\text{si } n=m=0\\T/2&\text{si } n=m\neq0\\0&\text{si } n\neq m\end{cases}\end{aligned}$$ □

Théorème 10.1. Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}[t\mapsto a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)]$ une série trigonométrique réelle qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme et $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ sa période. Alors $a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t$ et

$$\forall n\geq1,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T S(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t\qquad\text{et}\qquad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T S(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit $f_n:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\t&\mapsto&a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\end{array}$: f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\sum_{n\in\mathbb{N}}f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0,T]$. Soit m un entier naturel :

— pour tout $n\in\mathbb{N}$, $t\mapsto f_n(t)\cos(m\omega t)$ et $t\mapsto f_n(t)\sin(m\omega t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$;

— $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(t)\cos(m\omega t)\right|=\left|R_n(t)\cos(m\omega t)\right|\leq|R_n(t)|\leq\|R_n\|_\infty$
Comme $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|R_n\|_\infty=0$ puis que $\sum_{n\in\mathbb{N}}[t\mapsto f_n(t)\cos(m\omega t)]$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
De même, on montre que $\sum_{n\in\mathbb{N}}[t\mapsto f_n(t)\sin(m\omega t)]$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème d'interversion somme-intégrale et les lemmes précédents :

$$\begin{aligned}
\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \left\{\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)]\right\}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int_0^T [a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)]\right\}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[a_n\int_0^T \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t + \cancel{b_n\int_0^T \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t}\right] = a_0\cdot T \\
\forall m\geq 1,\ \int_0^T S(t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \left\{\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n\cos(n\omega t)\cos(m\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\cos(m\omega t)]\right\}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int_0^T [a_n\cos(n\omega t)\cos(m\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\cos(m\omega t)]\right\}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[a_n\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t + b_n\cancel{\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t}\right] = a_m\cdot\frac{T}{2} \\
\forall m\geq 1,\ \int_0^T S(t)\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T \left\{\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n\cos(n\omega t)\sin(m\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\sin(m\omega t)]\right\}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int_0^T [a_n\cos(n\omega t)\sin(m\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\sin(m\omega t)]\right\}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[a_n\cancel{\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t} + b_n\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t\right] = b_m\cdot\frac{T}{2}
\end{aligned}$$

□

Remarque. Le coefficient a_0 est donc égale à la valeur moyenne de S sur une période.

Définition 10.2 (Développement en série de FOURIER réel)**.**
Soit T un réel strictement positif et f une application T-périodique sur $\mathbb{R}$.
On définit le **développement en série de FOURIER (réel) de f** comme la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}}[t\mapsto a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)]$ avec $\omega=\frac{2\pi}{T}$, $a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ et

$$\forall n\geq 1,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont appelées **coefficients de FOURIER (réels) de f**.

Proposition 10.3. Soit T un réel strictement positif et f une application T-périodique sur $\mathbb{R}$. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ les coefficients de FOURIER réels de f.
Si f est paire, alors $a_0=\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ et

$$\forall n\geq 1,\quad a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad b_n=0$$

Si f est impaire, alors $a_0=0$ et

$$\forall n\geq 1,\quad a_n=0 \qquad \text{et} \qquad b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Les fonctions f, $t \mapsto \cos(n\omega t)$ et $t \mapsto \sin(n\omega t)$ sont T-périodiques.

- Si f est impaire, alors $t \mapsto f(t)\cos(n\omega t)$ est paire et $t \mapsto f(t)\sin(n\omega t)$ est impaire :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$
$$\forall n \geq 1,\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$$

- Si f est impaire, alors $t \mapsto f(t)\cos(n\omega t)$ est impaire et $t \mapsto f(t)\sin(n\omega t)$ est paire :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = 0$$
$$\forall n \geq 1,\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

□

10.2 Séries trigonométriques complexes

10.2.1 Définition

Définition 10.3 (Série trigonométrique complexe)**.**
On appelle **série trigonométrique complexe** toute « série » d'applications de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left(t \mapsto c_n e^{in\omega t}\right)$ où $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite complexe indexée sur $\mathbb{Z}$ et ω est un nombre réel strictement positif.

10.2.2 Convergence

Proposition 10.4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left(t \mapsto c_n e^{in\omega t}\right)$ converge simplement sur $\left[\alpha, \alpha + \dfrac{2\pi}{\omega}\right[$.
Alors elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est une fonction $\dfrac{2\pi}{\omega}$-périodique.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & c_n e^{in\omega t} \end{array}$ et $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t+T) = c_n e^{in\omega(t+T)} = c_n e^{in\omega t + in\omega T} = c_n e^{in\omega t + 2in\pi} = c_n e^{in\omega t} e^{2in\pi} = c_n e^{in\omega t} = f_n(t)$$

Donc f_n est T-périodique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, alors :

— $\mathbb{R}$ est archimédien, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\eta \in [0, T[$ tel que $t - \alpha = pT + \eta$;

— alors $f_n(t) = f_n(pT + \alpha + \eta) = f_n(\alpha + \eta)$ par T-périodicité.

Comme $\alpha + \eta \in [\alpha, \alpha + T[$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(\alpha+\eta)$ converge : donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ converge. Donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Notons S la somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Comme pour tout entier naturel n, f_n est une fonction T-périodique, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ S(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(t) = S(t)$$

Donc S est T-périodique. □

Proposition 10.5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(t \mapsto c_n e^{in\omega t}\right)$ converge uniformément sur $\left[\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{\omega}\right[$.
Alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et sa somme est une fonction $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & c_n e^{in\omega t} \end{array}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

D'après le théorème précédent, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est T-périodique.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est la somme d'une série trigonométrique complexe. Donc, d'après le théorème précédent, R_n est T-périodique. Soit $t \in \mathbb{R}$, alors :

— $\mathbb{R}$ est archimédien, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\eta \in [0, T[$ tel que $t - \alpha = pT + \eta$;

— alors $R_n(t) = R_n(pT + \alpha + \eta) = R_n(\alpha + \eta)$ par T-périodicité.

Comme $\alpha + \eta \in [\alpha, \alpha + T[$, il vient que $|R_n(t)| = |R_n(\alpha+\eta)| \leq \sup_{x\in[\alpha,\alpha+T[} |R_n(x)|$.

Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\alpha, \alpha+T[$ puis $\lim_{n\to+\infty} \left[\sup_{x\in[\alpha,\alpha+T[} |R_n(x)|\right] = 0$. On conclut donc que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. □

10.2.3 Développement en série de Fourier complexe

Lemme. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Alors $\int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t}\, \mathrm{d}t = \begin{cases} T & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$.

Démonstration. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

- Si $n = m$, alors $\int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t}\, \mathrm{d}t = \int_0^T \mathrm{d}t = T$.
- Si $n \neq m$, alors $\int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{(n-m)\omega}\right]_0^T = \frac{e^{2i(n-m)\pi} - 1}{(n-m)\omega} = 0$. □

Théorème 10.2. Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(t \mapsto c_n e^{in\omega t}\right)$ une série trigonométrique complexe qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $S : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ sa période. Alors

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-in\omega t}\, \mathrm{d}t$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & c_n e^{-in\omega t} \end{array}$: f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, T]$. Soit m un entier naturel :

— pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto f_n(t)e^{-im\omega t}$ est continue sur $\mathbb{R}$;

— $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)e^{-im\omega t} + \sum_{k=-\infty}^{-n-1} f_k(t)e^{-im\omega t} \right| = \left| R_n(t)e^{-im\omega t} \right| \leq |R_n(t)| \leq \|R_n\|_\infty$

Comme $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, il vient que $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$ puis que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left[t \mapsto f_n(t)e^{-im\omega t}\right]$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

On peut donc appliquer le théorème d'interversion somme-intégrale et les lemmes précédents :

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \int_0^T S(t)e^{-im\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} e^{-im\omega t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t}\,\mathrm{d}t = c_n \cdot T$$ □

Définition 10.4 (Développment en série de FOURIER)**.**

Soit T un réel strictement positif et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ T-périodique.

On définit le **développement en série de FOURIER complexe de f** comme la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(t \mapsto c_n e^{in\omega t}\right)$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelée **coefficients de FOURIER complexes de f**.

Proposition 10.6. Soit T un réel strictement positif et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ T-périodique. On note $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de FOURIER complexes de f.

Si f est exclusivement à valeurs réelles, alors $c_{-n} = \overline{c_n}$ pour tout entier relatif n.

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{Z}, c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{in\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)e^{-in\omega t}}\,\mathrm{d}t = \overline{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t} = \overline{c_n}$ □

Proposition 10.7 (Relations entre coefficients de FOURIER réels et complexes)**.**

Soit f une application T-périodique sur $\mathbb{R}$. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\geq1}$ ses coefficients de FOURIER réels et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients de FOURIER complexes.

- $c_0 = a_0$ et $\forall n \geq 1, \begin{cases} c_n = \dfrac{a_n - i b_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + i b_n}{2} \end{cases}$
- $a_0 = c_0$ et $\forall n \geq 1, \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} = 2\,\Re\mathrm{e}\, c_n \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2\,\Im\mathrm{m}\, c_n \end{cases}$

Démonstration. Notons que $c_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-i0\omega t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = a_0$

- $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)[\cos(n\omega t) - i\sin(n\omega t)]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t - i\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_n}{2} - i\frac{b_n}{2} \\
c_{-n} &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{in\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)[\cos(n\omega t) i\sin(n\omega t)]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t + i\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_n}{2} + i\frac{b_n}{2}
\end{aligned}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\cancel{2}}{T}\int_0^T f(t)\frac{e^{-in\omega t} + e^{in\omega t}}{\cancel{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = c_n + c_{-n} \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{\cancel{2}}{T}\int_0^T f(t)\frac{-e^{-in\omega t} + e^{in\omega t}}{\cancel{2}i}\,\mathrm{d}t = \frac{i}{T}\int_0^T f(t)(e^{-in\omega t} - e^{in\omega t})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{i}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t - \frac{i}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t = i(c_n - c_{-n})
\end{aligned}$$

□

10.3 Convergence du développement en série de Fourier

10.3.1 Fonctions périodiques de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$

Définition 10.5 (Discontinuité de première espèce)**.**

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, t_0 un point de I et f une application définie sur $I\backslash\{t_0\}$.

On dit que f possède une **discontinuité de première espèce en t_0** si et seulement f admet une limite finie à gauche en t_0 et une limite finie à droite en t_0. Auquel cas, on note :

$$f\left(t_0^-\right) = \lim_{t \to t_0^-} f(t) \qquad \text{et} \qquad f\left(t_0^+\right) = \lim_{t \to t_0^+} f(t)$$

Définition 10.6 (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux)**.** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Une application f est dite **$\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$** si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que pour tout entier naturel $i \in [\![1,n]\!]$:

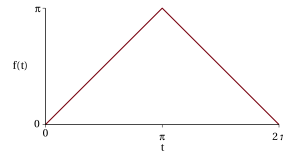
1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]t_{i-1}, t_i[$;
2. la restriction de f à $]t_{i-1}, t_i[$ se prolonge sur $[t_{i-1}, t_i]$ en une application de classe $\mathscr{C}^1$.

Proposition 10.8 (Caractérisation rapide)**.** Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Une application f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que pour tout entier naturel $i \in [\![1, n]\!]$:

1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]t_{i-1}, t_i[$;
2. f et f' admettent une discontinuité de première espèce en t_i.

Exemple. Soit $f : \begin{array}{rcl} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 2\pi - t & \text{si } x \in]\pi, 2\pi] \end{cases} \end{array}$



Montrons que f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$:

— sur les intervalles $]0, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$, f est polynômiale donc de classe $\mathscr{C}^1$;

— on a $f(0^+) = f(2\pi^-) = 0$ et $f(\pi^-) = f(\pi^+) = \pi$: donc toutes les discontinuités de f sont de première espèce ;

— on a $f'(0^+) = f'(\pi^-) = 1$ et $f'(\pi^+) = f'(2\pi^-) = -1$: donc toutes les discontinuités de f' sont de première espèce.

Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$. (Notons que f est de plus continue sur $[0, 2\pi]$.)

Définition 10.7 (Fonction périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux)**.**

Soit T un réel strictement positif et f une application T-périodique sur $\mathbb{R}$.

f est dite **périodique $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur** $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe un nombre réel α tel que f soit de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[\alpha, \alpha + T]$.

10.3.2 Théorème de DIRICHLET

Théorème 10.3 (Théorème de DIRICHLET)**.**

Soit T un réel strictement positif et f une application T-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors les développements en série de FOURIER réel et complexe de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers l'application $S_f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{f(t^-) + f(t^+)}{2} \end{array}$.

IMPORTANT. f et S_f coïncident en tout point de continuité de f.

10.3.3 Théorème de PARSEVAL

Théorème 10.4 (Théorème de PARSEVAL)**.**

Soit T un réel strictement positif et f une application T-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ ses coefficients de FOURIER réels et $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de FOURIER complexes. Alors :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[f(t)\right]^2 \mathrm{d}t = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Rappels Comme $\cos(x+\pi) = -\cos x$ et $\sin(x+\pi) = -\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(x+n\pi) = (-1)^n \cos x \qquad \text{et} \qquad \sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin x$$

En particulier, en $x = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$ et $\sin n\pi = (-1)^n \sin 0 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour calculer $\sin \frac{n\pi}{2}$, on distingue deux cas :

- si n est pair, alors $n = 2p$ et $\sin \frac{n\pi}{2} = \sin \frac{2p\pi}{2} = \sin p\pi = 0$;
- si n est impair, alors $n = 2p+1$ et $\sin \frac{n\pi}{2} = \sin \frac{(2p+1)\pi}{2} = \sin\left(p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p \sin \frac{\pi}{2} = (-1)^p$.

Autrement dit, $\left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots)$.

Interprétation physique

Si f est T-périodique, continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont ses coefficients de FOURIER réels, alors $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$.

En reprenant le vocabulaire utilisé en physique, f est un *signal périodique* avec :

- sa *période* T, sa *pulsation* $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et sa *fréquence* $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$;
- sa *valeur moyenne* $a_0 = \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$;
- son *harmonique de rang* n $f_n : t \longmapsto [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$; l'harmonique de rang un est appelé *fondamental* (car sa période est égale à celle de f).

Soit n un entier naturel. Si $(a_n, b_n) \neq (0,0)$, il existe un unique couple $(A_n, \varphi_n) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

Plus précisément :

- si $a_n = 0$ et $b_n > 0$, alors $A_n = b_n$ et $\varphi_n = \frac{\pi}{2}$;
- si $a_n = 0$ et $b_n < 0$, alors $A_n = -b_n$ et $\varphi_n = -\frac{\pi}{2}$;
- si $a_n \neq 0$, alors $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$.

Les valeurs A_n et φ_n sont respectivement l'*amplitude* et la *phase* de l'harmonique de rang n.
La représentation graphique de $n \longmapsto A_n$ est appelée *spectre de fréquence* du signal f.

Remarque. La formule de PARSEVAL se réécrie $\frac{1}{T} \int_0^T \left[f(t)\right]^2 \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2$.

En remarquant que la puissance du signal $f_n : t \longmapsto [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$ est égal à $\frac{A_n^2}{2} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$, la formule de PARSEVAL traduit la *conservation de la puissance* : la puissance du signal est la seule somme des puissances de toutes les harmoniques qui la composent (il n'y a pas de termes croisés).