

ELECTROMAGNETISME

1^{ière} Partie



Electromagnétisme

Bibliographie du cours (Chapitres 1 à 13):

Les Nouveaux Précis Bréal : Physique

Electromagnétisme MPSI

P. KREMPPF

Bréal Editions

Réf. 209.0343

Les Nouveaux Précis Bréal : Physique

Electromagnétisme MP

P. KREMPPF

Bréal Editions

Réf. 209.0359

Electromagnétisme : Fondements et applications

Premiers cycles - Licence

José-Philippe PEREZ, Robert CARLES, ROBERT FLECKINGER

MASSON Sciences

DUNOD 4^{ème} édition

H Prépa : Nouveau Programme

Electromagnétisme 2^{ième} année MP-MP*-PC-PC*-PSI-PSI*-PT-PT*

Jean-Marie BREBEC, Thierry DESMARAIS, Alain FAVIER, Marc MENETRIER, Bruno NOËL, Régine NOËL, Claude Orsini, Jean-Marc VANHAECKE

Hachette Supérieur

CHAPITRE 0 : Introduction Générale	7
CHAPITRE 1 : Notion de Charge Elémentaire.....	9
I. Introduction	9
II. Historique de l'électrostatique : découverte des particules chargées	10
III. Charges électriques / Loi de Coulomb	12
CHAPITRE 2 : Etude Générale du Champ Electrostatique	21
I. Introduction	21
II. Loi de Coulomb / Rappels.....	22
III. Champ électrostatique créé par des charges.....	23
CHAPITRE 3 : Potentiel et Energie Potentielle Electrostatiques.....	41
I. Introduction	41
II. Notion mathématique / Le gradient (ou vecteur gradient).....	42
III. Potentiel électrostatique	44
IV. Energie potentielle électrostatique	50
CHAPITRE 4 : Conducteurs en Equilibre Electrostatique dans le Vide.....	57
I. Introduction	57
II. Notion d'isolants et conducteurs / Conservation de l'électricité	58
III. Grandeurs électrostatiques et propriétés dans la matière conductrice en équilibre électrostatique	59
IV. Champ électrostatique dans le vide, au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur.....	61
V. Complément sur l'électrisation des conducteurs.....	65
VI. Condensateurs électriques.....	69
CHAPITRE 5 : Dipôle Électrostatique.....	77
I. Introduction	77
II. Définitions.....	78
III. Etude du dipôle actif	79
IV. Etude du dipôle passif.....	83
V. Intérêt de la notion de dipôle.....	87

CHAPITRE 6 : Champ Magnétique & Mouvement de Particules Chargées (Introduction)	94
I. Introduction	94
II. Mise en évidence du champ magnétique	95
III. Lignes de champ	98
IV. Flux et circulation du champ magnétique.	99
V. Théorème d'Ampère.	101
VI. Force de Lorentz.	105
VII. Force de Laplace.	107
VIII. Définition Légale de l'Ampère.	108
CHAPITRE 7 : Mouvements de particules chargées	110
I. Introduction	110
II. La force de Lorentz	111
III. Champ électrostatique uniforme	112
IV. Champ magnétique uniforme	115
V. Mise en œuvre	120

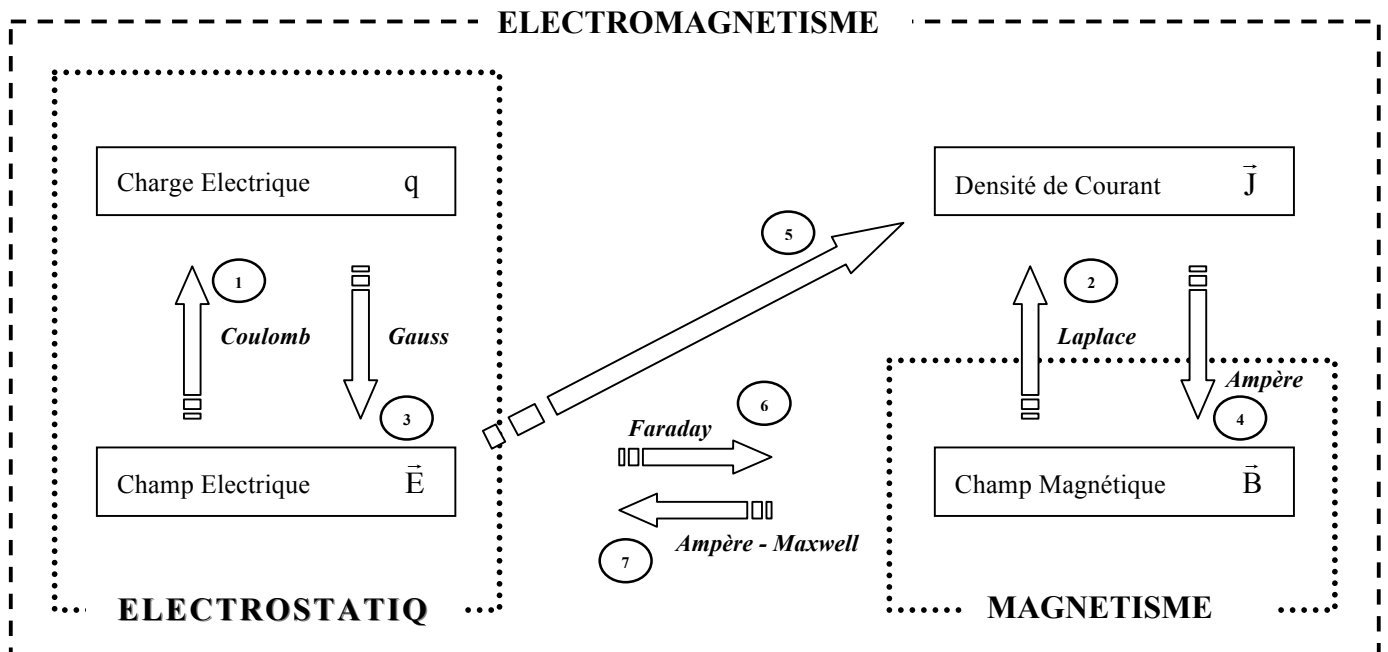
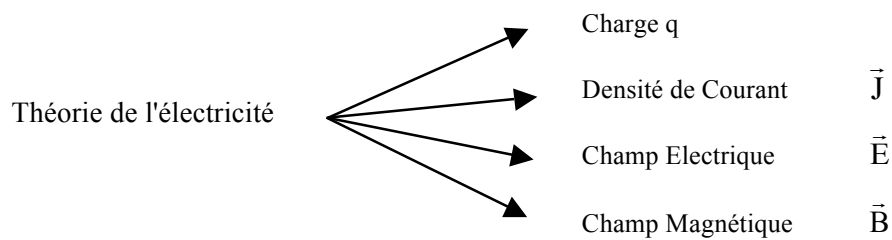


CHAPITRE 0 : Introduction Générale

Dans cette partie de la physique, on va découvrir ce qu'est l'électrostatique et le magnétisme. Plus généralement, on parle d'**Electromagnétisme**.

L'électrostatique est l'étude des phénomènes dus aux charges électriques au repos. Elle fait partie d'une théorie plus vaste : l'électromagnétisme.

Pour avoir une vue globale de l'électromagnétisme, on peut faire le schéma suivant :



Les différents noms cités sont synonymes des lois ou des théorèmes. Par conséquent avant d'entamer la partie magnétisme, nous allons étudier l'électrostatique et débiter par la notion de charge électrique. Puis nous décrirons le champ électrostatique et nous nous intéresserons à la notion de conducteur. Enfin, une fois la partie "Electrostatique" étudiée, nous pourrons nous diriger vers la partie "Magnétisme".



CHAPITRE 1 : Notion de Charge Élémentaire

I. Introduction

Dans ce court chapitre, nous allons introduire et étudier succinctement la loi de Coulomb qui traduit l'interaction entre deux charges électriques dites ponctuelles. A partir de cette loi et de la définition de la charge électrique, nous pourrons, au cours des chapitres suivants, établir toute la théorie de l'électrostatique. Pour étudier ce chapitre et les suivants, nous aurons besoin de définir quelques repères mathématiques (cartésien, cylindrique et sphérique) et d'introduire le calcul d'intégrales multiples.

II. Historique de l'électrostatique : découverte des particules chargées

- 600 : **Thalès de Milet** (625-547), célèbre mathématicien, découvre l'électrisation en frottant un morceau d'ambre jaune avec une peau de chat. Il attribue à ces objets une « âme et un souffle pour expliquer ces phénomènes.

1600 : Le mot électrique est inventé par **William Gilbert** en souvenir de l'ambre (ēlecktron en grec).

1600 : **Otto Van Guerick** (1602-1686) invente une machine électrostatique constituée d'une boule de soufre mise en rotation et sur laquelle vient frotter la main ou un tissu. La boule de soufre est ensuite remplacée par un globe de verre.

Début du 18^{ème} siècle : **Charles François de Cisternay du Fay** (1698-1737) définit l'électricité vitreuse (positive) et résineuse (négatif).

1746 : Invention de la bouteille de Leyde (Pays Bas) qui permet de stocker les charges électriques. Il s'agit d'un condensateur constitué par une bouteille remplie d'eau dans laquelle on plonge une tige métallique traversant le bouchon.

1776 : **Jesse Ramsden** (1735-1800) construit une machine électrostatique qui devient très vite populaire. Elle est constituée d'un disque de verre entraîné par une manivelle et sur lequel viennent frotter 4 coussins de cuir remplis de crin. Les charges positives créées sur le disque provoquent par influence l'électrisation de deux tubes métalliques creux.

1785 : **Charles Augustin de Coulomb**, physicien français, (1736-1806), établit les lois fondamentales de l'électrostatique : «les forces électriques entre deux particules chargées sont proportionnelles à leurs charges et inversement proportionnelles au carré de leurs distances.»

20^{ème} siècle : **Joseph John Thomson**, anglais, (1856-1940) découvre le proton.

En 1911, **Ernest Rutherford**, physicien anglais, (1871-1937), montra l'existence d'un noyau dans les atomes. Environ vingt ans plus tard, il était clair que les noyaux étaient formés de **protons** (de charge électrique positive) et de **neutrons** (électriquement neutres comme leur nom l'indique). A cette époque, seulement deux interactions fondamentales (la gravitation et l'électromagnétisme) étaient connues. Or, aucune des deux ne pouvait expliquer la **cohésion du noyau atomique**. En effet, la gravitation est beaucoup trop faible et l'interaction électromagnétique ne peut pas assurer la cohésion de particules électriquement neutres comme les neutrons. De plus, la répulsion électrostatique des protons entre eux (ils ont tous une charge électrique positive) devrait faire exploser le noyau atomique. Il fallut donc introduire une nouvelle force capable d'assurer la cohésion de ces noyaux: la **force nucléaire** (de *nucleus*=noyau).

La première théorie de la force nucléaire fut élaborée par **Hideki Yukawa** en 1935. Il s'agissait alors d'une interaction entre protons et neutrons par l'intermédiaire d'une particule vecteur **lourde** appelée **pion**. Dans cette théorie, la particule vecteur devait avoir une masse non nulle afin d'expliquer pourquoi les effets de la force nucléaire étaient de courte portée. Cette particule fut bien découverte quelques années plus tard, mais la théorie

de Yukawa ne donnait pas de résultats suffisamment satisfaisants. De plus, contre toute attente, de très nombreuses particules sensibles à la force nucléaire furent découvertes. Ainsi, au début des années 1960, la force nucléaire n'était toujours pas décrite par une théorie correcte.

En 1964, **Murray Gell-Mann** et **George Zweig** émirent l'hypothèse que les protons, les neutrons et les très nombreuses particules récemment découvertes n'étaient pas des particules élémentaires mais plutôt des objets complexes constitués de particules plus petites appelées **quarks**. Cette nouvelle description des particules sensibles à la force nucléaire changea complètement la façon dont cette force était abordée. Ainsi entre 1967 et 1970, une nouvelle théorie appelée **chromodynamique quantique** (ou **QCD**) vit le jour, donnant une description cohérente de l'interaction forte qui permet de **lier les quarks entre eux** pour former des particules composites appelées **hadrons** (les protons, les neutrons et les pions sont des exemples de hadrons). La force nucléaire n'est plus alors que le résidu entre hadrons de cette interaction forte, comme sont les forces de van der Waals par rapport à l'interaction électromagnétique.

http://www.cerimes.fr/e_doc/forces/forte.htm

L'électricité a toujours existé. Même avant la vie sur notre planète il y a 4 milliards d'années, de grands éclairs illuminaient déjà le ciel. La foudre est la manifestation la plus effrayante de cette énergie appelée : électricité. Lorsque la vie apparut, l'électricité devint un élément essentiel du monde vivant.

Déjà les anciens firent des observations sur ce que nous avons appelé depuis, l'électricité et magnétisme. Les grecs furent les premiers penseurs de la tradition scientifique.

Au 17^{ème} siècle, les expériences sur l'électricité se développent mais toujours sans explications pratiques, le but étant simplement le savoir.

Ainsi en 1729, l'anglais Stephen Gray (1666-1736) annonça que tout corps qui touche un autre qui est chargé devient lui-même chargé. C'est, la première approche du concept de conductibilité électrique.

Mais, l'électricité statique que l'on produit et qui fait l'objet des recherches ne peut plus amener grands progrès.

En 1800, la découverte de la pile de Volta permet d'obtenir des courants électriques.

Alors, ce fait la jonction de deux catégories : électricité et magnétisme et l'on découvre les courants d'inductivité (Foucault vers 1850).

III. Charges électriques / Loi de Coulomb

III – 1 Enoncé de la loi de Coulomb

La loi de Coulomb décrit l'interaction entre deux charges électriques dites ponctuelles immobiles dans le vide. (On assimilera souvent l'air au vide).

Enoncé : Soient la charge q_1 , placée au point M_1 , et la charge q_2 , placée au point M_2 .

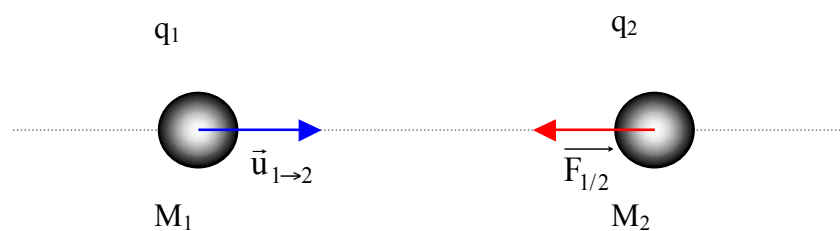
La force $\vec{F}_{1/2}$ exercée par la charge ponctuelle q_1 sur la charge ponctuelle q_2 a pour expression :

$$\vec{F}_{1/2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

On pose les notations suivantes :

$\vec{F}_{1/2}$	force en Newton (N) de q_1 sur q_2
q_1, q_2	charges ponctuelles en Coulomb (C)
r_{12}	(= $M_1 M_2$) distance en Mètre (m) entre q_1 et q_2
$\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$	vecteur unitaire sans dimension dirigé de M_1 vers M_2

Cette loi de Coulomb se schématise par la figure suivante :



Cette force $\vec{F}_{1/2}$ agit en q_2 par la charge q_1 .

La constante k dépend du milieu.

Dans le vide elle vaut : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ [SI] avec ϵ_0 , permittivité absolue du vide.

[SI] : $[\text{Kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{A}^{-2}]$

Le vecteur unitaire $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ est orienté de M_1 vers M_2 .

On peut écrire la force $\vec{F}_{2/1}$, force exercée par la charge ponctuelle q_2 sur q_1 , appliquée en M_1 .

$$\vec{F}_{2/1} = k \frac{q_2 q_1}{r_{21}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = - k \frac{q_2 q_1}{r_{21}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = - \vec{F}_{1/2}$$

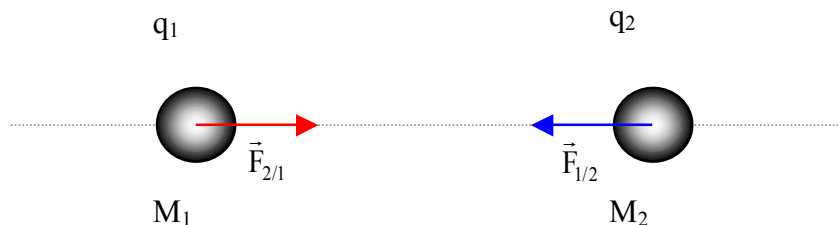
2 cas possibles :

- q_1 et q_2 sont de même signe
- q_1 et q_2 sont de signes opposés

Deux charges q_1 et q_2 de même signe se repoussent.



Deux charges q_1 et q_2 de signes opposés s'attirent.



III – 2 Charge Totale d'une Distribution

Supposons que nous voulons déterminer la charge d'une distribution, c'est à dire, la répartition des charges électriques dans une région donnée de l'espace. Cet "espace" peut être ponctuel, linéique, surfacique ou volumique. Par conséquent, la charge totale de la distribution peut être ponctuelle (pas de calcul), linéique, surfacique ou volumique. Pour cela, on introduira la notion de densité (ou densité de charges). On distinguera des densités linéiques, surfaciques ou volumiques.

Distribution linéique de charges

Soit une ligne Γ et sa distribution linéique de charges de densité λ .

La densité s'exprime en $C.m^{-1}$.

On considère que la densité linéique est constante sur un élément de longueur dl :

Les charges élémentaires dq s'écrivent :



La charge totale Q de la distribution de charges le long de la ligne Γ vaut :

$$Q = \int_{\Gamma} dq = \int_{\Gamma} \lambda dl$$

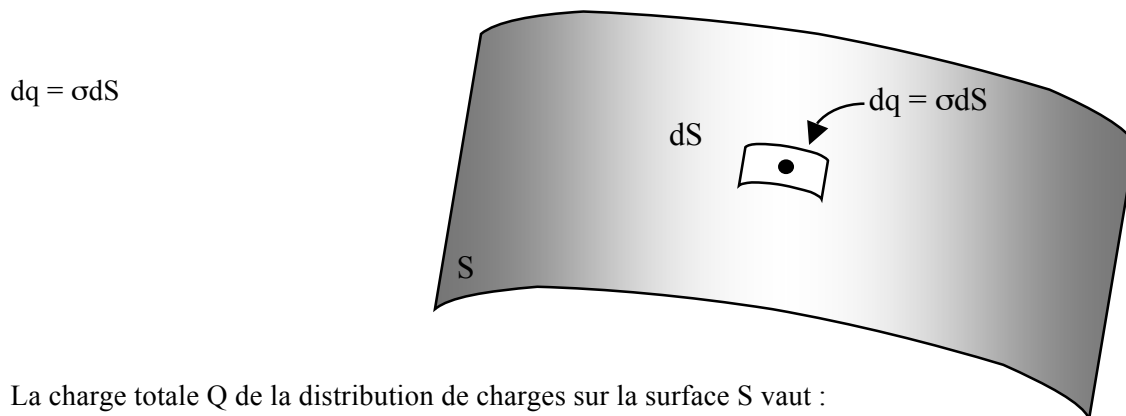
Distribution surfacique de charges

Soit une surface S et sa distribution surfacique de charges de densité σ .

La densité s'exprime en $C.m^{-2}$.

On considère que la densité σ est constante sur un élément de surface dS .

Les charges élémentaires dq s'écrivent :



La charge totale Q de la distribution de charges sur la surface S vaut :

$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma dS$$

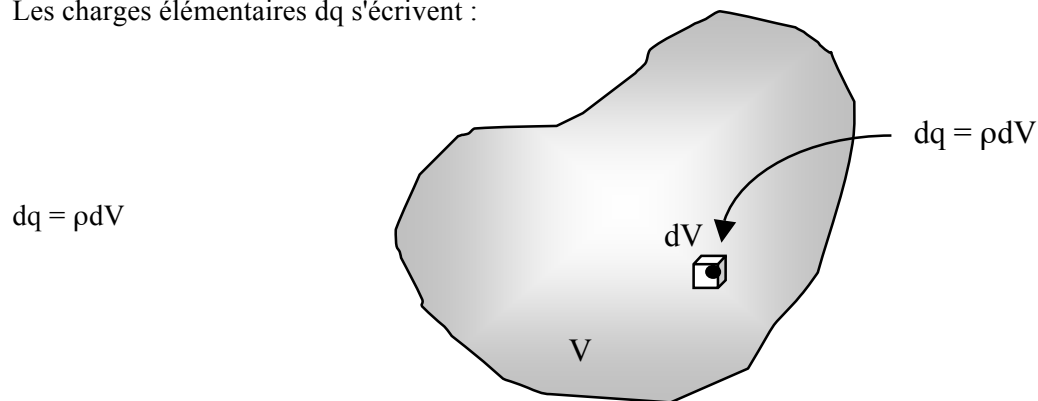
Distribution volumique de charges

Soit un volume V et sa distribution volumique de charges de densité ρ .

La densité s'exprime en $C.m^{-3}$.

On considère que la densité ρ est constante sur un élément de volume dV .

Les charges élémentaires dq s'écrivent :



La charge totale Q de la distribution de charges sur le volume total V vaut :

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV$$

Cas particuliers :

On suppose que la densité linéique/surfacique/volumique est uniforme et constante sur toute la distribution :

$$Q = \int_r dq = \int_r \lambda dl = \lambda \int_r dl = \lambda L \quad \text{pour une ligne de longueur } L$$

$$Q = \iint_s dq = \iint_s \sigma dS = \sigma \iint_s dS = \sigma S \quad \text{pour une surface d'aire } S$$

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dV = \rho \iiint_V dV = \rho V \quad \text{pour un volume de capacité } V$$

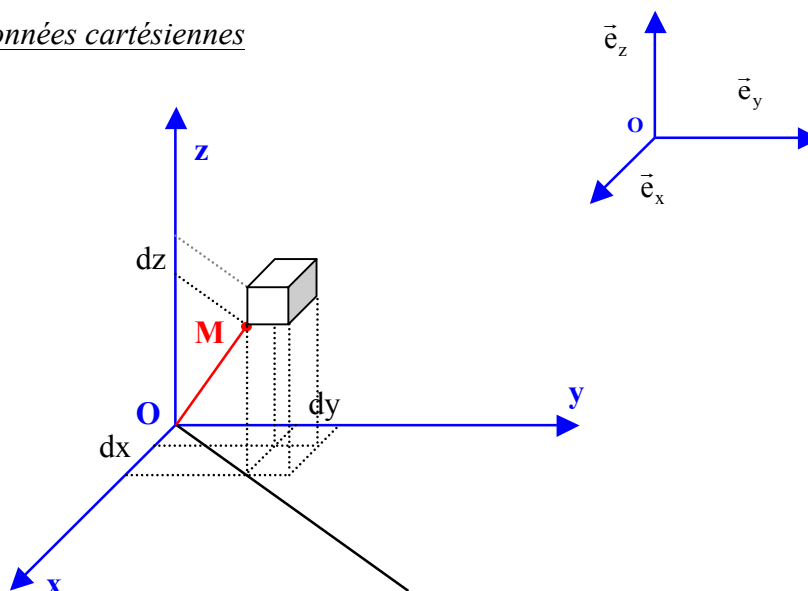
Intégrales multiples :

Lorsqu'on intègre sur une surface ou un volume, il est nécessaire de faire varier plusieurs coordonnées. Le calcul d'une telle intégrale dans le cas général est très compliqué. Cependant, si la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées et que les bornes d'intégration de chaque coordonnée sont indépendantes des autres coordonnées, alors l'intégrale multiple est le produit des intégrales simples.

$$\iiint f(x)g(y)h(z) dx dy dz = \int f(x) dx \int g(y) dy \int h(z) dz$$

Pour calculer des distributions de charges, on fait appel à des intégrales simples ou multiples (doubles ou triples). Dans tous les cas, il faut utiliser un repère pour définir les positions, les longueurs, Nous allons rapidement voir trois systèmes (ou repères) de coordonnées.

Coordonnées cartésiennes



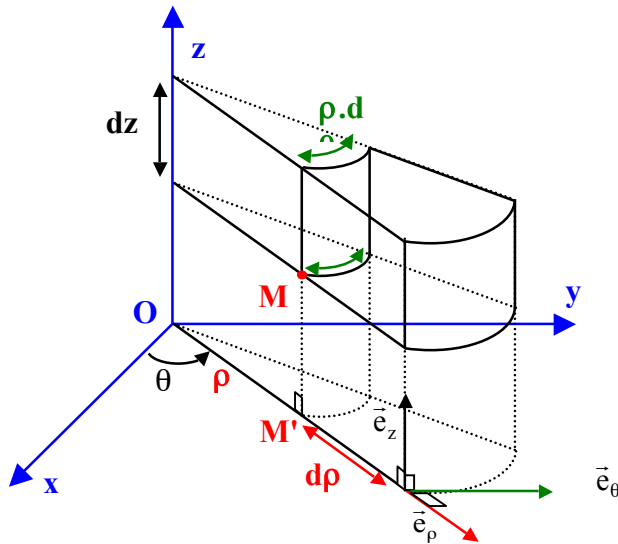
Le point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes dx, dy, dz.

$$dV = dx.dy.dz$$

Coordonnées cylindriques



Le point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (ρ, θ, z) :

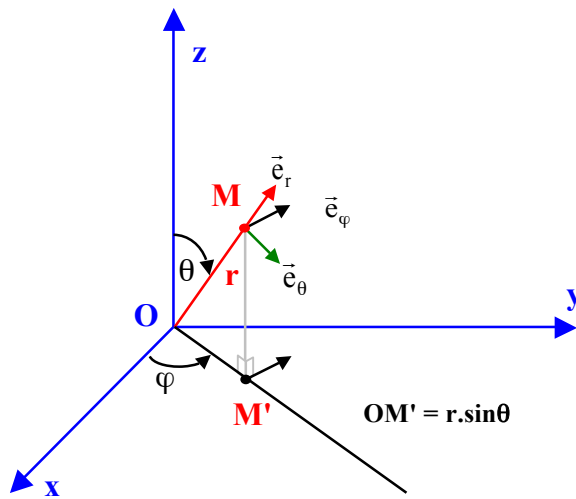
$$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

Le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes $d\rho$, $\rho d\theta$, dz .

$$dV = d\rho \cdot \rho d\theta \cdot dz$$

Coordonnées sphériques

Le point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) : $\vec{OM} = r \vec{e}_r$



\vec{e}_r **colinéaire à \vec{OM}**

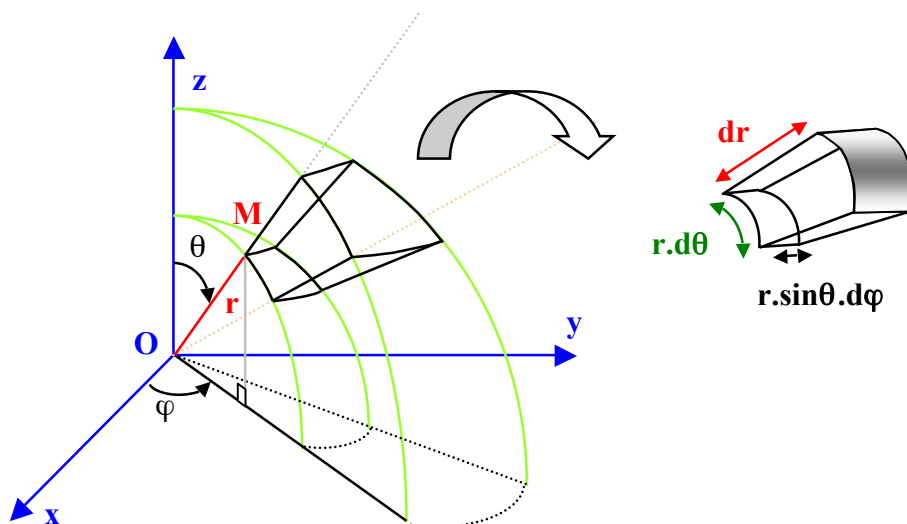
\vec{e}_θ **situé dans le plan (OM),(OM')**

\vec{e}_φ **situé dans le plan (Ox),(Oy)**

\vec{e}_r ; \vec{e}_θ ; \vec{e}_φ forment un trièdre direct orthonormé.

Le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle de côtés dr , $r.d\theta$ et $r.\sin\theta.d\varphi$

$$dV = dr.r.d\theta.r\sin\theta d\varphi = r^2.\sin\theta.dr.d\theta.d\varphi$$



III – 3 Propriétés Fondamentales Liées aux Charges Electriques

a) Conservation de la charge électrique

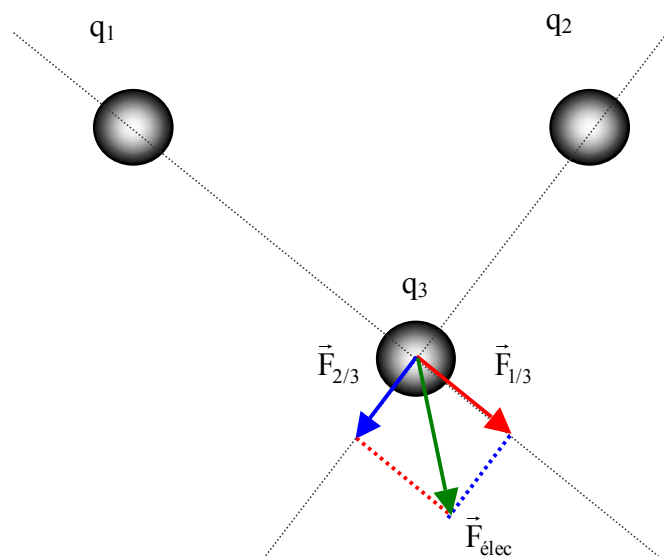
Considérons un système fermé (c'est à dire qu'il n'échange pas de matière avec l'extérieur). La charge électrique d'un système fermé se conserve, c'est à dire qu'elle reste constante et indépendante (invariante) du référentiel dans lequel on étudie le système.

b) Principe de superposition

La force totale subie par une charge q_3 en interaction avec les charges q_1 et q_2 , est la somme des forces $\vec{F}_{1/3}$ et $\vec{F}_{2/3}$ exercées individuellement par q_1 et q_2 .

$$\vec{F}_{\text{élec}} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$$

Autrement dit, la somme des causes produit un effet électrique égal à la somme des effets individuels.



c) Charges positives et charges négatives

La charge électrique peut exister sous deux formes, l'une qualifiée de positive et l'autre de négative. Le choix d'affecter une charge (électrique) négative pour l'électron est purement conventionnel.

d) Extensivité de la charge

La charge électrique d'un système est une grandeur extensive : elle peut se mettre sous la forme d'une somme algébrique des charges qui la constituent (rejoint le principe de superposition).

e) Quantification de la charge

De nombreuses expériences montrent que la charge électrique d'un système ne peut varier que par de multiples entiers d'une charge élémentaire de valeur e :

$$e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

L'unité est le coulomb. La charge d'un système s'écrit donc : $Q = Z \cdot e$ avec Z un entier positif ou négatif. Les porteurs stables usuels de ces deux types de charges ont des masses différentes :

Electron	$q = - e$	$m_e = 0,91091 \cdot 10^{-30} \text{ Kg}$	
Proton	$q = + e$	$m_p = 1,6725 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$	2000 fois plus lourd que l'électron

CHAPITRE 2 : Etude Générale du Champ Electrostatique

I. Introduction

L'interaction électrostatique obéit à des lois quantitatives simples qui ont été interprétées par Coulomb en 1785, à partir de la notion de charge électrique. Plus précisément, la loi de Coulomb met en évidence l'existence du champ électrique (ou électrostatique si pas de variation au cours du temps). Ce champ électrostatique pourra être obtenu en utilisant le théorème de Gauss.

II. Loi de Coulomb / Rappels

Compte tenu de ce qui a été écrit dans le chapitre précédent, on écrit la force de Coulomb entre deux charges ponctuelles immobiles (dans le vide), sous la forme :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^3} \vec{AB}$$

où $\vec{e}_r = \frac{\vec{AB}}{AB}$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ [S.I]} \text{ avec } \epsilon_0, \text{ permittivité absolue du vide.}$$

La norme de la force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ qu'exerce la charge ponctuelle A sur la charge ponctuelle B est inversement proportionnelle au carré de la distance AB qui sépare les deux charges.

III. Champ électrostatique créé par des charges

Dans un premier temps, nous allons écrire la définition relative à un champ électrostatique et sa force créés par une charge quelconque. Puis, dans un second temps, on écrira l'expression du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle et par une distribution linéique, surfacique ou volumique de charges.

III – 1 Définition de Champ Electrostatique

Définition : Si une particule ponctuelle de charge q , immobile en un point M de l'espace, est soumise à une force \vec{F} autre que son poids et nulle si q est nulle, alors, il existe un champ électrostatique \vec{E} au point M tel que :

$$\vec{F} = q \times \vec{E}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{F} & : \text{force en Newton (N)} \\ q & : \text{charge ponctuelle en Coulomb (C)} \\ \vec{E} & : \text{champ électrostatique en N.C}^{-1} \text{ ou V.m}^{-1} \end{aligned}$$

III – 2 Champ Electrostatique Créé par une Charge Ponctuelle

Soit une charge q' placée en M et subissant de la part d'une charge ponctuelle q placée en P la force de Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q'}{r^2} \vec{e}_{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q'}{PM^3} \vec{PM} = q' \times \vec{E}$$

On dit que la charge q est en interaction coulombienne avec la charge q' .

La charge ponctuelle q , placée en P, crée sur le point M, situé à une distance r de P, le champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM^3} \overrightarrow{PM}$$

avec

\vec{E} : champ électrostatique en M

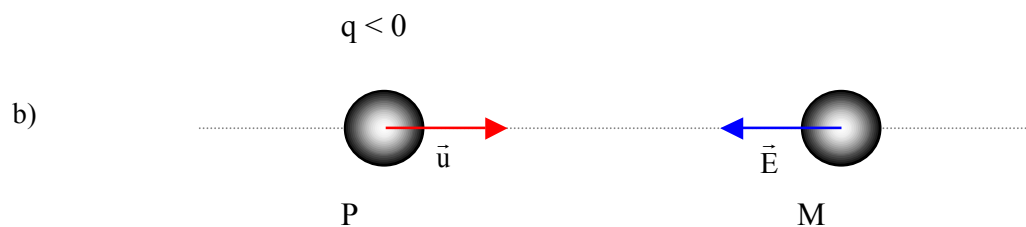
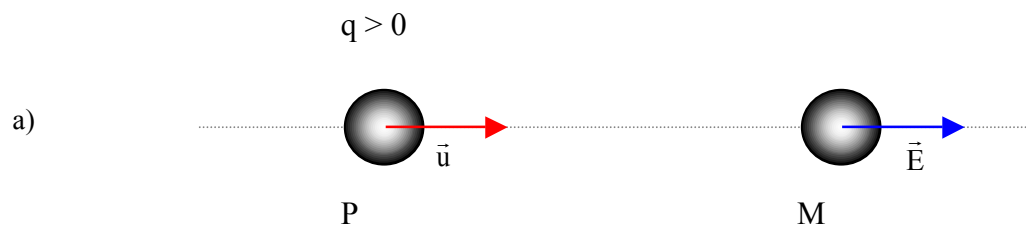
q : la charge en P

r : distance PM

ϵ_0 : permittivité du vide

Deux cas se présentent : q positive ou q négative.

- Si q est une charge positive, alors \vec{E} est de même sens que \vec{u} (a)
- Si q est une charge négative, alors \vec{E} est de sens opposé à \vec{u} (b)



III – 3 Champ Electrostatique Créé par un ensemble de Charges Ponctuelles

Soit un ensemble de N charges ponctuelles (distinctes) q_i situées respectivement aux points P_i . Grâce au théorème de superposition, additivité vectorielle des forces électrostatiques, il est possible d'écrire au point M, l'expression des champs électrostatiques :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M)$$

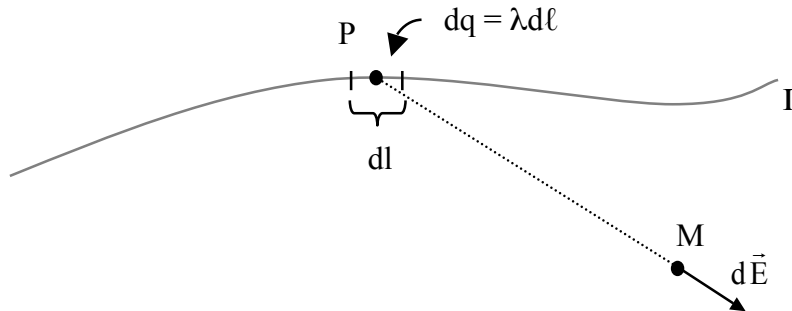
$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}$$

où $\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM} = \frac{\vec{r}_i}{r_i}$: vecteur unitaire de la droite (P_iM) dirigé de P vers M

III – 4 Champ Electrostatique Créé par une Distribution Linéique de Charges

Il faut reprendre la définition d'une distribution linéique de charge avec la densité linéique λ . On suppose que cette densité est uniforme (constante).

Soit une distribution linéique de charge :



Sur cette ligne Γ , sont disposées avec une densité λ , les charges électriques. Soit un point P sur Γ et dl un élément de longueur de Γ autour de P . Cet élément est considéré comme ponctuel. Pour cet élément dl , il existe la charge dq telle que $dq = \lambda dl$. Cet élément ponctuel va créer sur le point M un champ électrostatique $d\vec{E}$ de valeur :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

avec

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{\vec{r}}{r} : \text{le vecteur unitaire de la droite (PM) dirigé de P vers M.}$$

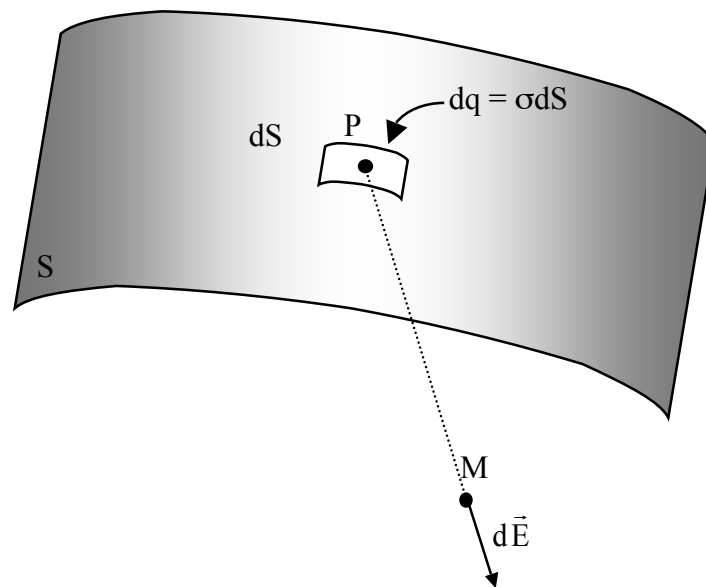
Le champ total en M de la ligne Γ est la somme de tous les champs élémentaires créés par tous les éléments dl formant la ligne Γ , d'où :

$$\vec{E}(M) = \int_{\Gamma} d\vec{E} = \int_{\Gamma} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \int_{\Gamma} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{\vec{r}}{r}$$

III – 5 Champ Electrostatique Créé par une Distribution Surfaccique de Charges

Comme précédemment, on se réfère à la définition de la distribution étudiée.

Soit S une distribution surfaccique de charges de densité uniforme σ :



Sur cette surface S, sont disposées avec une densité σ , les charges électriques. Soit un point P sur S et dS un élément de surface de S autour de P. Cet élément dS est considéré comme ponctuel. Pour cet élément dS, il existe la charge dq telle que $dq = \sigma dS$. Cet élément ponctuel dS va créer sur le point M un champ électrostatique $d\vec{E}$ de valeur :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

avec

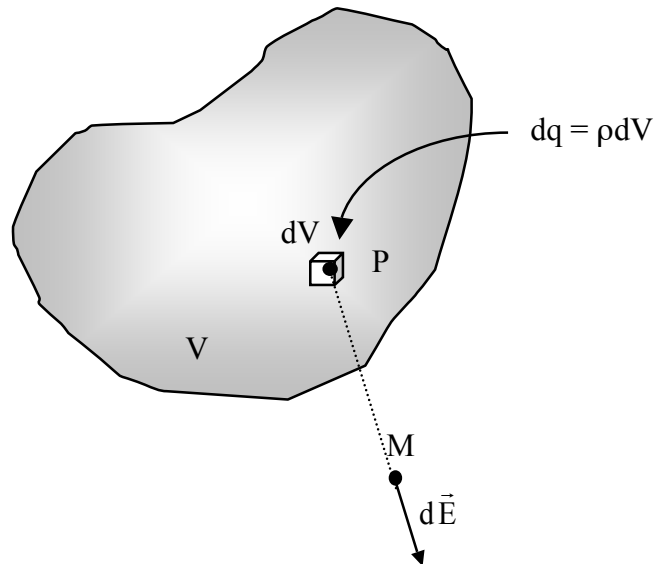
$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{\vec{r}}{r} : \text{le vecteur unitaire de la droite (PM) dirigé de P vers M.}$$

Le champ total en M de la surface S est la somme de tous les champs élémentaires créés par tous les éléments dS formant la surface S, d'où :

$$\vec{E}(M) = \iint_S d\vec{E} = \iint_S \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \iint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{\vec{r}}{r}$$

III – 6 Champ Electrostatique Créé par une Distribution Volumique de Charges

Soit V une distribution volumique de charges de densité uniforme ρ :



Dans ce volume V , sont disposées avec une densité ρ , les charges électriques. Soit un point P de V et dV un élément de volume de V contenant P . Cet élément dV est considéré comme ponctuel. Pour cet élément dV , il existe la charge dq telle que $dq = \rho dV$. Cet élément ponctuel dV va créer sur le point M un champ électrostatique $d\vec{E}$ de valeur :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

avec

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{\vec{r}}{r} : \text{le vecteur unitaire de la droite (PM) dirigé de P vers M.}$$

Le champ total en M du volume V est la somme de tous les champs élémentaires créés par tous les éléments dV formant le volume V , d'où :

$$\vec{E}(M) = \iiint_V d\vec{E} = \iiint_{P \in V} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \iiint_{P \in V} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{\vec{r}}{r}$$

III – 7 Définition et continuité du Champ Electrostatique

Soit une collection de charges ponctuelles. Le champ électrostatique \vec{E} créé par cette collection est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur les charges.

Soit une distribution linéique de charges. Le champ électrostatique \vec{E} créé par cette distribution est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur les points de la distribution.

Soit une distribution surfacique de charges. Le champ électrostatique \vec{E} créé par cette distribution est défini et continu en tout point de l'espace, sauf sur les points de la distribution ; il est donc discontinu à la traversée de la surface.

Soit une distribution volumique de charges. Le champ électrostatique \vec{E} créé par cette distribution est défini et continu en tout point de l'espace.

III – 8 Champ Electrostatique Créé par une Distribution Quelconque de Charges

Considérons le cas le plus général pour la distribution de charges électriques : distribution volumique.

Soit P, un point de la distribution et M, hors de la distribution. La densité est variable (non uniforme).

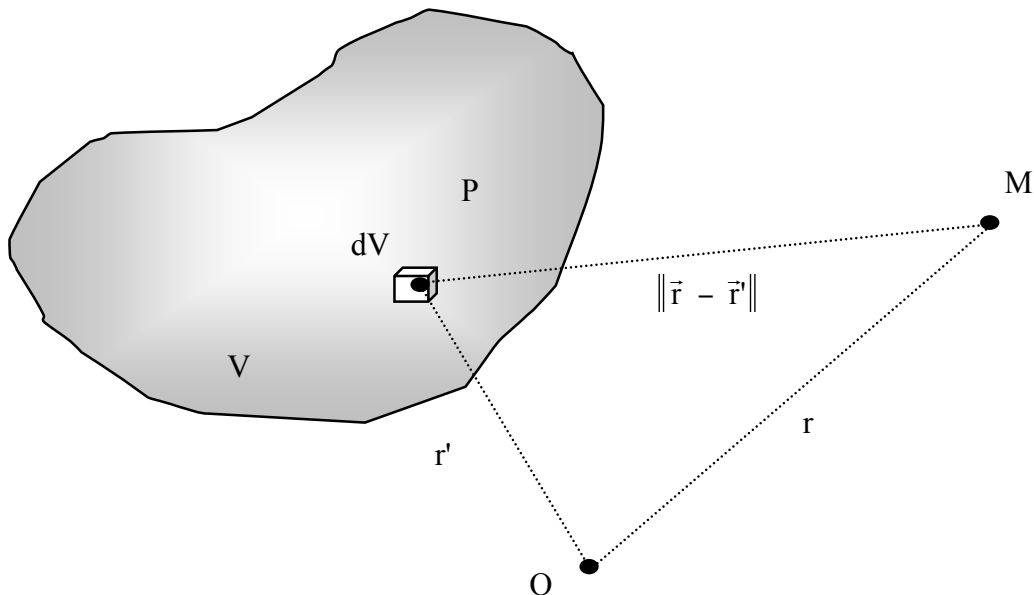
Le champ \vec{E} résultant en M s'écrit alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in V} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \rho(P) dV$$

nouveauté

L'intégration porte sur les **variables qui caractérisent le point P**. Si l'on désigne par \vec{r} et \vec{r}' , les vecteurs \vec{OM} et \vec{OP} respectivement, il vient :

$$\vec{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(\mathbf{r}') dV$$



III – 9 Propriétés de Symétrie du Champ Electrostatique

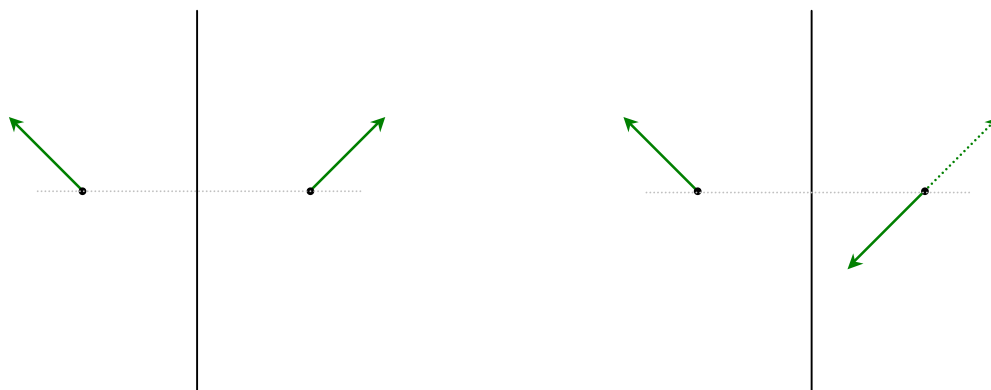
Du fait que le champ soit un effet créé par une distribution de charges, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Par conséquent, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique associé. Ces propriétés pourront simplifier le calcul du champ électrostatique.

Cela correspond au principe de Curie : lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Donc, on étudie l'effet des isométries (transformations qui conservent les distances) de l'espace sur la direction du champ.

Règles de symétrie :

- Invariance par translation** : Si S, un système physique est invariant dans toute translation parallèle à un axe (Oz) (du repère cartésien), **les effets ne dépendent pas de z**.
- Symétrie axiale** : Si S est invariant dans toute rotation θ (du repère cylindrique) autour d'un axe (Oz), alors, ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) **ne dépendent pas de θ** .
- Symétrie cylindrique** : Si S est invariant par translation le long de l'axe (Oz) et par rotation autour de ce même axe, alors, ses effets exprimés en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) **ne dépendent que de la distance à l'axe ρ** .
- Symétrie sphérique** : Si S est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O, alors, ses effets exprimés en coordonnées sphériques (r, θ, φ) **ne dépendent que de la distance au centre r** .
- Plan de symétrie Π** : Si S admet un plan de symétrie Π , alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.
- Soit deux points M et M' (**le symétrique de M par rapport à un plan de symétrie Π**), alors le champ électrique en M' est le symétrique par rapport à Π du champ électrique en M.
- Plan d'antisymétrie Π'** : Si, par symétrie par rapport à un plan Π' , S est transformé en $-S$, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique lui est perpendiculaire.



Remarques :

On verra par la suite (et en TD) que le champ électrostatique est un vecteur appelé *vrai vecteur* car son sens ne dépend pas de l'orientation de l'espace. Un vrai vecteur est aussi appelé vecteur polaire.

A contrario, nous verrons par la suite que le champ magnétique est un pseudo-vecteur (son sens dépend de l'orientation de l'espace).

(De manière générale, tout produit vectoriel de deux vrais vecteurs est un pseudo-vecteur, alors que le produit vectoriel d'un vrai vecteur par un pseudo-vecteur est un vrai vecteur).

III – 10 Calcul du Champ Electrostatique par le Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss fournit une méthode utile pour calculer le champ \vec{E} lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Grâce à ce théorème, il est possible de calculer le champ \vec{E} sans calculer d'intégrale. Cependant, nous devons dans un premier temps calculer le flux du champ \vec{E} (à travers une surface).

Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée "surface de Gauss".

a) Flux élémentaire $d\phi$

On considère un élément de surface dS infinitésimal.

Le champ \vec{E} est considéré uniforme sur dS .

Le vecteur surface $d\vec{S} = \vec{n}.dS$ avec \vec{n} le vecteur unitaire de la normale à l'élément dS .

Le flux élémentaire $d\phi$ du champ \vec{E} à travers dS est défini par :

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S} = \vec{E}.\vec{n}.dS \quad \text{avec} \quad dS \text{ en } m^2, d\phi \text{ en } V.m \text{ et } \vec{E} \text{ en } V.m^{-1}$$

b) Flux total Φ à travers une surface S

De la même manière que pour un élément dS , on considère une surface S composée d'éléments dS .

Le flux total Φ du champ \vec{E} à travers S est défini par la relation :

$$\phi = \iint_S d\phi$$

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

c) Théorème de Gauss

Théorème : Le flux Φ du champ \vec{E} à travers une surface fermée S_{Gauss} , dite "Surface de Gauss", est proportionnel à la charge q_{int} contenue dans le volume V délimité par la Surface de Gauss.

$$\phi = \iint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$\phi = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

avec Φ flux [V.m]

q_{int} charge [C]

ϵ_0 permittivité absolue du vide [SI]

Remarque : Il arrive parfois, pour signaler que la surface est fermée, que l'on note :

$$\phi = \oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$z$$

$$S_1 \quad M \quad \vec{n}$$

d) Quelques exemples :

$$S_3 \quad \vec{n}$$

- **Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé**

On considère un plan infini Π portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface.

Déterminer le champ \vec{E} .

Tous les plans perpendiculaires au plan infini Π passant par M sont des plans de symétrie de celui-ci :

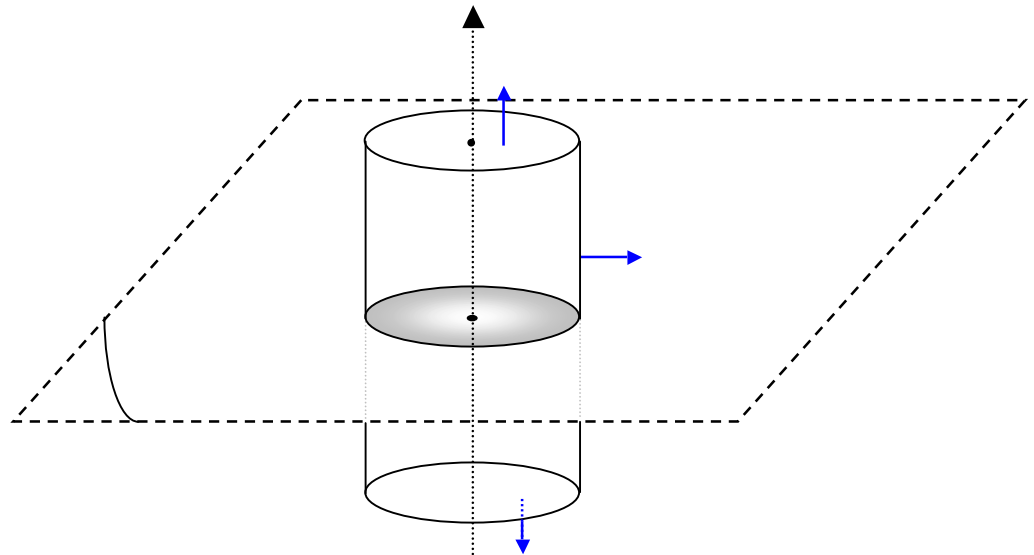
\vec{E} appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à Π .

$$\Rightarrow \vec{E} = E_z(x,y,z) \vec{k} \text{ au point } M \quad \vec{n}$$

Il existe une invariance par translation selon x et y :

$$\Rightarrow \vec{E} = E_z(z) \vec{k} \text{ au point } M$$

\Rightarrow On peut donc choisir comme surface de Gauss, un cylindre de sections perpendiculaires aux plans avec des hauteurs symétriques :



Aussi, par raison de symétrie, $E(z) = E(-z)$ et $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$

On calcule le flux total :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ \Phi &= E(z) \cdot S + E(-z) \cdot S + 0 \\ &= 2ES \quad \text{car} \quad \vec{E}(-z) = -\vec{E}(z) \quad \text{et} \quad \vec{n}_2 = -\vec{n}_1 \end{aligned}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Or : $\Phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_S \sigma dS = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$

$\Rightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow$



Le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé vaut $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ et dirigé suivant l'axe (Oz).

- **Champ électrostatique créé par une distribution linéique uniformément chargée**

Etablir l'expression du champ \vec{E} créé en un point quelconque M de l'espace par une distribution linéique de charge de densité λ uniforme répartie le long d'un fil rectiligne infini.



Comme pour l'exemple précédent, on recherche les isométries :
 Il existe des symétries cylindriques et invariance de translation,
 par conséquent, le champ \vec{E} en M s'exprime en coordonnées
 cylindriques : $\Rightarrow \vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$

$$\vec{E} \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

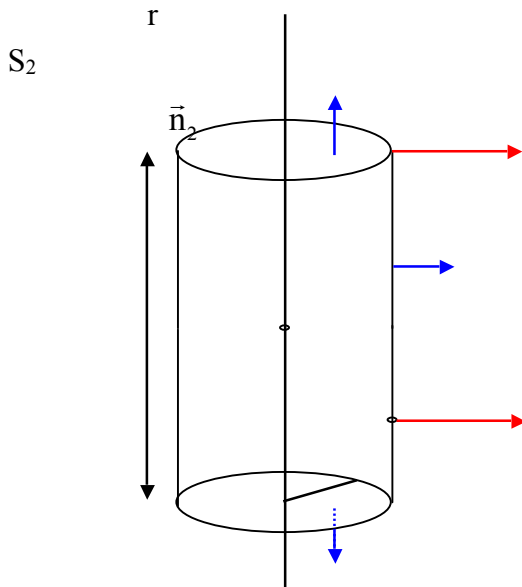
$S_3 \quad \vec{n}_3$

h

On recherche ensuite une surface de Gauss qui respecte les considérations de symétrie et d'invariance :

choisissons une surface cylindrique en trois parties S_1, S_2 et S_3 .

$\lambda \quad M \quad \vec{E}$



On applique le théorème de Gauss sur S_1, S_2 et S_3 .

Le flux du champ \vec{E} pour S_1 et S_2 est nul car :

$$\vec{E} \perp \vec{n}_1 \text{ et } \vec{E} \perp \vec{n}_2$$

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS = 0$$

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS = 0$$

Calcul du flux à travers la surface S_3

$$\Phi_3 = \iint_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 dS = \iint_{S_3} E(r) dS = E(r) \iint_{S_3} dS = E(r) \cdot 2\pi r h$$

En appliquant le théorème de Gauss, on obtient :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_3 = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow$$



ou bien encore

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r$$

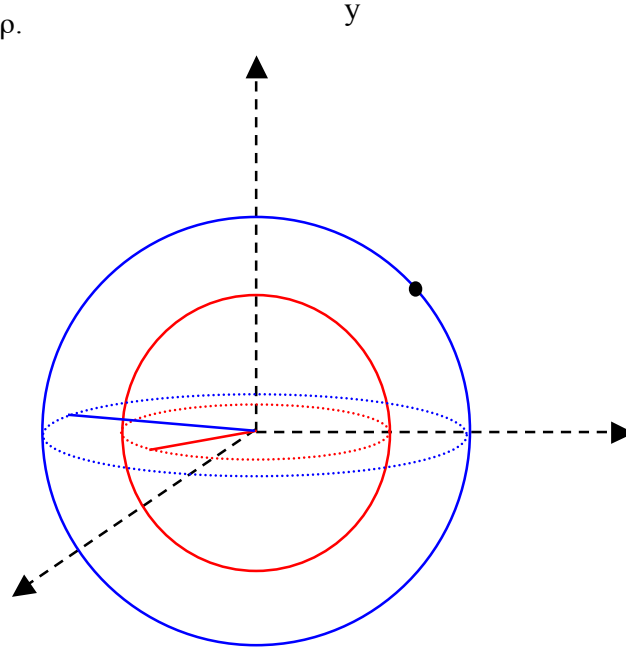
M

- **Champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée**

On considère une boule (sphère pleine) de centre O et de rayon R, chargée avec une distribution volumique de charge de densité ρ .

Déterminer le champ \vec{E} .

x



Cette distribution possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie, donc \vec{E} ne dépendra que du rayon r (distance du point M au centre O) en coordonnées sphériques :

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$$

On peut prendre comme surface de Gauss une sphère de rayon r :

Le flux du champ \vec{E} s'écrit alors :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E_n \cdot dS = \oiint_S E(r) \cdot dS = E(r) \cdot \oiint_S dS = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

En appliquant le théorème de Gauss, on obtient :

$$\Phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Deux solutions sont possibles

Si la sphère de Gauss a un rayon $r > R$

Alors, la charge intérieure (à la sphère de Gauss) est la charge totale Q .

$$q_{int} = Q = \iiint_{\text{Sphère Chargée}} \rho dV = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\text{Donc, } E(r).4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\phantom{E(r).4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon_0}}}$$

Si la sphère de Gauss a un rayon $r < R$

Alors, la charge intérieure est la charge contenue **dans la sphère de Gauss** de rayon r .

$$q_{int} < Q \quad \text{et} \quad q_{int} = \iiint_{\text{Sphère de Gauss}} \rho dV = \rho V_{\text{Gauss}} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Donc, } E(r).4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\phantom{E(r).4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}}}$$

Remarque : Le champ électrique \vec{E} créé par une boule de centre O (sphérique) uniformément chargée est le même que celui d'une charge ponctuelle égale, située en O .

On constate la continuité du champ électrique \vec{E} pour $r = R$: $E(R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$

e) Lignes de champ \vec{E}

La notion de lignes de champ permet de visualiser l'évolution de \vec{E} dans l'espace. Les lignes de champ sont déterminées à partir de la définition suivante :

Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe C définie dans l'espace telle qu'en chacun de ses points, le vecteur y soit tangent.

Cette définition est équivalente à la relation suivante : $\vec{E} \wedge d\vec{\ell} = \vec{0}$ ($d\vec{\ell}$ est parallèle à E)

$$\vec{E} \wedge d\vec{\ell} = \vec{0} \quad (d\vec{\ell} \text{ est parallèle à } E)$$

Dans le repère cartésien, $d\vec{\ell}$ s'écrit :

$$d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} *$$

Dans le repère de coordonnées cylindriques, $d\vec{\ell}$ s'écrit :

$$d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\theta \\ dz \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

Dans le repère de coordonnées sphériques, $d\vec{\ell}$ s'écrit :

$$d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin\theta d\varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

Justification du *

Dans le repère cartésien :

$$d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Le produit vectoriel donne : $\vec{E} \wedge d\vec{\ell} = \vec{0}$ (on note aussi $\vec{E} \times d\vec{\ell} = \vec{0}$)

Rappel : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \sin(\vec{A}, \vec{B}) \vec{u}$

r
O

$$\vec{E} \wedge d\vec{\ell} = \begin{vmatrix} E_x & dx \\ E_y & dy \\ E_z & dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ E_x dy - E_y dx & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

D'où $E_x dy - E_y dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}$

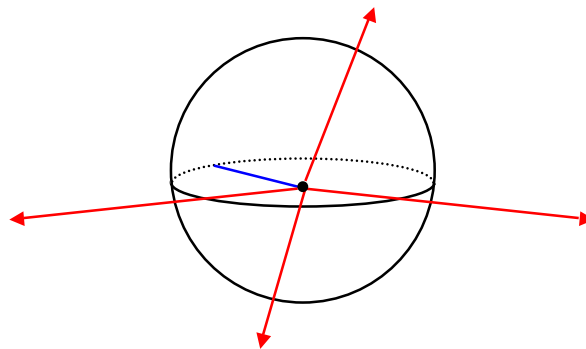
En faisant le produit vectoriel complet, on trouve : $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$

Exemple :

Le champ \vec{E} pour une boule chargée uniformément de rayon r (considérée comme une charge ponctuelle en O).

On retrouve une symétrie sphérique donc, $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$

Ainsi les lignes de champ produites par une charge ponctuelle placée en O sont des droites passant par O.



Remarque :

Nous allons voir, dans le chapitre suivant, que ces lignes de champ sont fortement liées à la notion de lignes/surfaces équipotentielles et donc à la notion de potentiel électrique.

CHAPITRE 3 : Potentiel et Energie Potentielle Electrostatiques

I. Introduction

Nous avons vu que le champ électrostatique \vec{E} , introduit à partir de la force de Coulomb, satisfait à une première propriété fondamentale, connue sous le nom de théorème de Gauss, attribuée à la forme en $\frac{1}{r^2}$ de cette force.

A partir de la **circulation** du champ, on va établir une formule permettant de calculer le **potentiel électrostatique**, en introduisant la **notion de gradient**. Ensuite, nous pourrions définir les **surfaces équipotentiels** et, enfin, **l'énergie potentielle électrostatique**.

II. Notion mathématique / Le gradient (ou vecteur gradient)

Prenons un scalaire $V(M)$ défini en tout point de l'espace (on dit un champ scalaire). Une variation dV de ce champ, lorsque l'on passe d'un point M à un point M' (proche de M) est défini par la différentielle totale :

$$dV(M) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

où le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}V}$ est le gradient du champ scalaire V .

En coordonnées cartésiennes, on a :

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

et
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

donc, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}V} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right\}$$

En coordonnées cylindriques, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{grad}V} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right\}$$

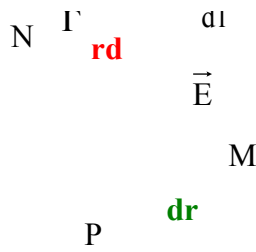
Et en coordonnées sphériques, on trouve :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{array} \right]$$

Une propriété importante du vecteur gradient découle directement de sa définition. Considérons une surface "équipotentielle" S de $V(M)$, c'est à dire, une surface telle qu'en tout point M qui lui appartient, $V(M)$ prend la même valeur V_0 . Pour un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ du point M sur S , on a :

$$dV(M) = V_0 - V_0 = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$$

Le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}} V$ est donc **normal** à la surface équipotentielle passant par M de la fonction scalaire $V(M)$.



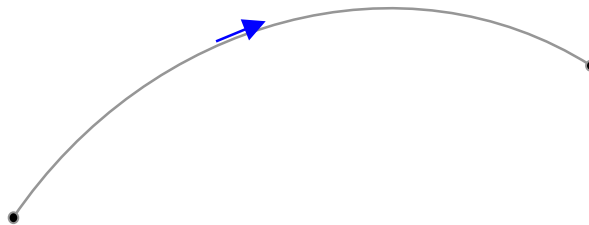
III. Potentiel électrostatique

III – 1 Définition de la circulation du champ électrostatique

Considérons une courbe Γ liant deux points A et B. La circulation C d'un champ de vecteurs \vec{E} , sur cette courbe, de A à B, est définie par :

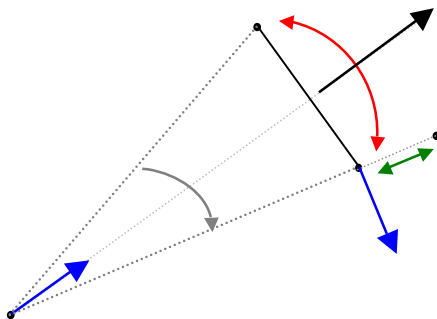
$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

où $d\vec{l}$ désigne le déplacement élémentaire le long de la courbe Γ .



III – 2 Circulation du champ d'une charge ponctuelle

Considérons, dans un premier temps, une charge ponctuelle q , placée en O, et deux points N et M voisins.



On a $\vec{NM} = \vec{NP} + \vec{PM}$

ou $\vec{NM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$

Soit le champ \vec{E} créé par q en N (ou M)
car (NM) = distance infinitésimale :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

La circulation élémentaire dC du champ \vec{E} vaut :

$$dC = \vec{E} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta)$$

En respectant les vecteurs unitaires :

$$dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

On suppose maintenant 2 points M_1 et M_2 éloignés avec $r_1 = OM_1$ et $r_2 = OM_2$

La circulation du champ \vec{E} est l'intégrale (somme) des circulations élémentaires dC :

$$C = \int_{M_1}^{M_2} dC = \int_{r_1}^{r_2} -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

On pourrait généraliser pour toute distribution de charges élémentaires en appliquant le théorème de superposition, la circulation C est la somme des circulations élémentaires de chaque élément de charge considéré comme ponctuel. D'où la définition suivante :

Définition :

La circulation du champ ne dépend que des positions des points de départ et d'arrivée, et non du chemin suivi. On dit que le **champ est à circulation conservative**.

III – 3 Définition du potentiel électrostatique

Le champ est à circulation conservative et la fonction potentiel électrostatique est définie par :

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

avec \vec{E} champ électrostatique [$V.m^{-1}$]
 V potentiel [V]

D'après cette relation, on peut écrire la circulation du champ \vec{E} :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B - \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} = \int_A^B - dV$$

$$C = V(A) - V(B)$$

La circulation C se mesure donc en Volts (V)

On définit, donc, le potentiel électrostatique V en un point M créé par une charge q placée en O :

$$dV(M) = - \vec{E} \cdot d\vec{OM} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} \quad \text{avec } d\vec{r} = dr \vec{u}_r$$

$$dV(M) = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

Après intégration,

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

$V(M)$ potentiel en M [V]

V_0 constante d'intégration [V], (généralement choisie comme étant nulle)

r OM [m]

Vérification :

On a vu que $C = V(M_1) - V(M_2)$ de M_1 à M_2 *relation du III - 3*

$$\Rightarrow C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + V_0 - \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} + V_0 \right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad \text{relation du III - 2}$$

PIII – 4 Potentiels pour différents cas de figure de distribution.

dℓ a) Potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles

On considère n charges q_i . Grâce au principe de superposition, le champ électrostatique vaut :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad \text{et donc} \quad V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M)$$

tels que la relation $\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$ soit vérifiée, d'où :

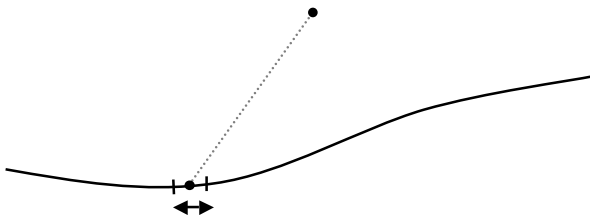
$$V(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + V_0$$

où r_i est la distance entre q_i et M.

Le potentiel électrique est défini et continu en tout point sauf aux points où se trouvent les charges ponctuelles.

b) Potentiel créé par une distribution linéique de charges

Soit une distribution linéique de densité λ :



Le potentiel $V(M)$ du champ \vec{E} créé en un point M s'écrit :

$$V(M) = \int_{\Gamma} dV = \int_{\Gamma} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

$$V(M) = \int_{\Gamma} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

avec $r = PM$

Dans le cas d'une distribution linéique de charges, le potentiel électrique n'est pas défini sur les points où se trouvent les charges.

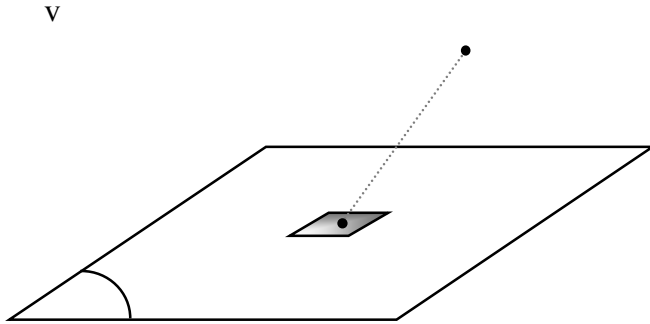
Attention !!
 Ne pas confondre ici
 $V \Rightarrow$ pour le potentiel
 $v \Rightarrow$ pour le volume

M
 dM
 dV
 r r

PP

c) Potentiel créé par une distribution surfacique de charges

Soit une distribution surfacique de densité σ :



Le potentiel $V(M)$ du champ \vec{E} créé en un point M s'écrit :

$$V(M) = \iint_S dV = \iint_S \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

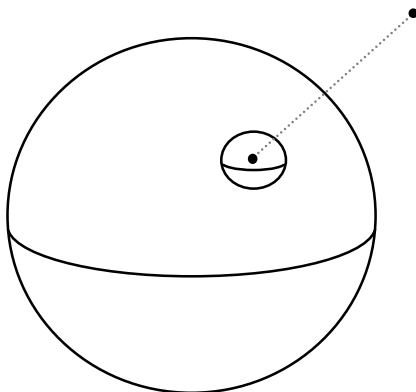
$$V(M) = \iint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

avec $r = PM$

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, le potentiel électrique est défini sur la surface chargée et il est continu à la traversée de la surface.

d) Potentiel créé par une distribution volumique de charges

Soit une distribution volumique de densité ρ :



Le potentiel $V(M)$ du champ \vec{E} créé en un point M s'écrit :

$$V(M) = \iiint_V dV = \iiint_{P \in V} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

$$V(M) = \iiint_{P \in V} \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

avec $r = PM$

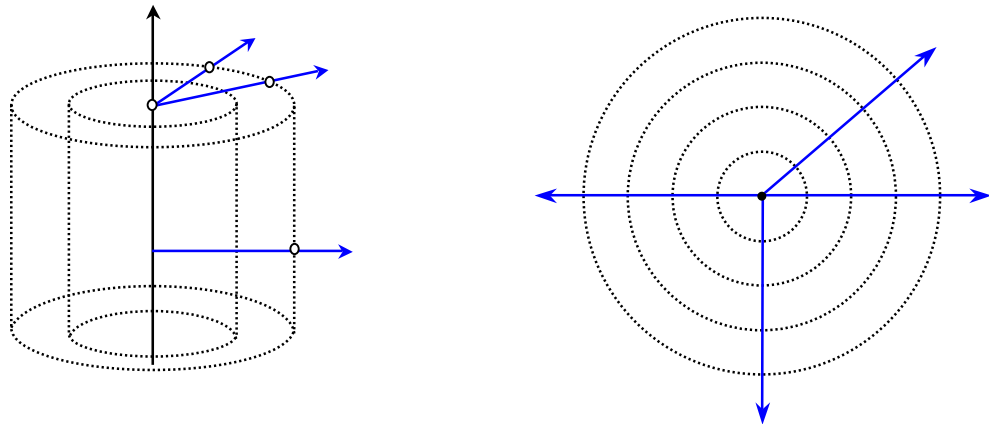


Dans le cas d'une distribution volumique de charges, le potentiel électrique est défini et continu en tout point de l'espace.

III – 5 Complément sur les lignes de champ et les surfaces équipotentielles.

D'après ce qui a été écrit précédemment, on peut énoncer les différentes propriétés suivantes :

- 1) Les lignes de champ sont telles qu'en chacun de leurs points M , le vecteur \vec{E} leur est tangent.
- 2) Une surface équipotentielle est définie par l'ensemble des points où la valeur du potentiel électrostatique est invariante.
- 3) Les lignes de champ sont en tout point \perp aux équipotentielles (car $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV = 0$)



exemple pour un fil infini chargé avec une densité linéique λ .

- 4) Si le déplacement a lieu le long d'une ligne de champ et dans le sens du champ depuis un point

$$M_1 \text{ vers un point } M_2 \text{ alors : } \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$

Donc, $V(M_1) - V(M_2) > 0$

Ce qui amène $V(M_1) > V(M_2)$

Le long d'une ligne de champ, le champ \vec{E} est dirigé vers les potentiels décroissants :

IV. Energie potentielle électrostatique

Pour étudier l'énergie potentielle gravitationnelle, on utilise la notion de travail fourni pour déplacer le corps ou le système en question.

On va retrouver l'analogie pour l'énergie potentielle électrostatique.

IV – 1 Travail de la force électrostatique de Coulomb.

Le travail élémentaire de la force $\vec{F} = q\vec{E}$ lors d'un déplacement $d\vec{l}$ de celle-ci est :

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{l} \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}(qV) \cdot d\vec{l} \\ &= -d(qV) \end{aligned}$$

Sur un trajet entre A et B ($A \rightarrow B$), on obtient :

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B -d(qV) = -q \int_A^B dV \\ W_{AB} &= q[V(A) - V(B)] \end{aligned}$$

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi. L'énergie potentielle d'interaction entre une charge q et un champ électrostatique \vec{E} créant le potentiel V , est :

$$E_p = \varepsilon_p = q \cdot V + K$$

En effet, le travail élémentaire est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -d\varepsilon_p$$

Sur un trajet $A \rightarrow B$, le travail vaut :

$$W_{AB} = -\varepsilon_p(B) + \varepsilon_p(A) = q[V(A) - V(B)] = -\Delta\varepsilon_p$$

On peut aussi écrire que la force de Coulomb dérive de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon_p$$

car,

$$\varepsilon_p = q \cdot V + K \quad \Leftrightarrow$$

$$- \overrightarrow{\text{grad}} \varepsilon_p = - \overrightarrow{\text{grad}} (qV + K) = - \overrightarrow{\text{grad}} (qV) = q(- \overrightarrow{\text{grad}} V) = q\vec{E} = \vec{F}$$

Remarque : Energie potentielle d'interaction de deux charges ponctuelles

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 en M_1 et M_2 et $M_1M_2 = r_{12}$

Energie potentielle de q_1 $\varepsilon_{p1} = q_1 V_2 + K = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + K$

Energie potentielle de q_2 $\varepsilon_{p2} = q_2 V_1 + K = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + K$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_{p1} = \varepsilon_{p2}$$

L'énergie potentielle d'interaction est le travail fourni par un opérateur pour amener les charges depuis des positions où elles sont infiniment éloignées et n'interagissent pas (pas de force de Coulomb entre les charges), jusqu'à des positions de voisinage où chaque charge est soumise au champ créé par l'autre charge : on montre que (cf TD)

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + K = \varepsilon_{p1} = \varepsilon_{p2}$$

Application 1 :

Soit un cylindre de rayon R et de hauteur infinie chargé uniformément avec une densité volumique de charges ρ . Déterminer le potentiel créé ce système.

Le champ sera déterminé dans la série de TD en utilisant le théorème de Gauss.

Dans un système de coordonnées cylindriques, on trouve : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$ $\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}\vec{u}_r$ $\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\vec{u}_r$

Le potentiel est déterminé par la relation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$.

Elle donne ici : $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr}$, car r est la seule variable (trouvée grâce aux invariances). On a donc :

$$V(r \geq R) = \int -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} dr \quad \text{et} \quad V(r \leq R) = \int -\frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr$$

Les constantes K et K' sont a priori différentes, car sur chacun de ces domaines, le champ a une expression mathématique différente. Il vient : $V(r \geq R) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(r) + K$ $V(r \leq R) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + K'$

La relation entre les constantes est trouvée en écrivant que le potentiel doit être continu en $r = R$

$$V(r = R^+) = V(r = R^-) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(R) + K = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + K'$$

Si l'on garde K' , alors $K = -\frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + K' + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(R)$, et donc :

$$V(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + K' \quad \text{et} \quad V(r \leq R) = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon_0} + K'$$

Le calcul direct du potentiel s'obtient en écrivant : $V(M) = \iiint_{r \in V} \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM} + K$

P est un point quelconque du volume. En prenant l'origine O du repère cylindrique sur le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre et l'axe (Ox) confondu avec la droite (OM) , on simplifie au maximum le calcul.

Le point P est repéré par sa distance r' à l'axe, l'angle θ et sa cote z .

$$\text{On a : } \vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -r'\cos\theta\vec{u}_x - r'\sin\theta\vec{u}_y - z\vec{u}_z + r\vec{u}_x$$

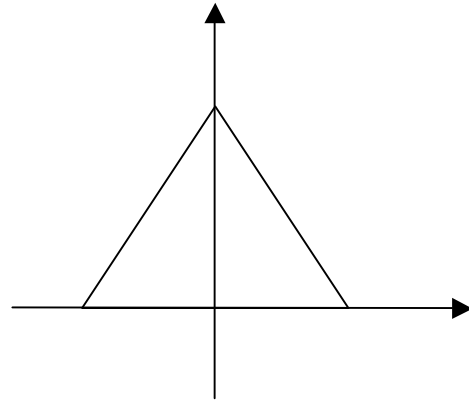
$$\text{D'où, } PM = \sqrt{(r - r'\cos\theta)^2 + (r'\sin\theta)^2 + (z)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta + z^2}$$

Le potentiel est donné par le calcul de l'intégrale triple :

$$V(M) = \iiint_{r \in V} \frac{\rho r' dr' d\theta dz}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta + z^2}}$$

Cette intégrale est absolument incalculable à la main. Il est plus intéressant pour les problèmes à haute symétrie de calculer d'abord le champ électrique en utilisant le théorème de Gauss, puis le potentiel en cherchant la primitive du champ.

A O B y



Application 2 :

Déterminer l'énergie potentielle électrostatique d'un ensemble de trois charges identiques q présentes aux sommets A, B et C d'un triangle équilatéral de côté $2a$.

On fixe la charge en A. On approche la charge suivante pour la placer en B. Enfin on amène la dernière charge pour la placer en C.

La seconde charge subit l'action du champ créé par la première.

Le potentiel créé au point B par la charge q placée en A vaut :

$$V_A(B) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a}$$

L'opérateur doit donc fournir un travail :

$$W = q_B \times V_A(B) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

On approche la troisième charge jusqu'en C. Celle-ci est plongée dans le potentiel électrostatique des deux premières charges placées en A et en B. Le potentiel créé en C par les deux charges présentes en A et en B est la somme des potentiels créés par chacune d'elles :

$$V(C) = V_A(C) + V_B(C) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Le travail que l'opérateur doit accomplir pour rapprocher cette dernière charge jusqu'en C vaut :

$$W' = q_C \times V(C) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

L'énergie potentielle électrostatique d'interaction E_p de ce système de trois charges est égale à la somme des travaux effectués par l'opérateur :

$$E_p = W + W' = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{3q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Le cas de l'énergie d'une distribution continue de charges est hors programme.







CHAPITRE 4 : Conducteurs en Equilibre Electrostatique dans le Vide

I. Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude des conducteurs comme des milieux où l'électrisation ne reste pas localisée mais peut se transmettre. Il s'agit d'examiner comment appliquer aux conducteurs les lois générales de l'électrostatique, exposées aux chapitres 1, 2 et 3 et d'en tirer les conséquences pour ces milieux. Au cours de ce chapitre, on mentionnera aussi les applications des propriétés électrostatiques des conducteurs (ex : condensateurs)

II. Notion d'isolants et conducteurs / Conservation de l'électricité

Un isolant est un corps dont l'électrisation reste localisée là où elle est apparue.

Un conducteur est un corps dont l'électrisation peut se transmettre hors de la région où elle est apparue. Ces définitions rejoignent bien évidemment celles qui seront évoquées en électronique (diodes, diodes Zener), concernant les électrons libres (ou pas) des matériaux.

Une définition (ou un principe) découle des notions d'isolants et de conducteurs :

L'état électrique global d'un corps isolé électriquement est invariable : conservation de l'électricité.

Ce principe de conservation de l'électricité ne souffre d'aucune exception.

Un conducteur est en équilibre électrostatique lorsque les porteurs de charges libres qu'il contient n'ont aucun mouvement d'ensemble (à l'échelle macroscopique).

Dans un conducteur en équilibre électrostatique, on appliquera les lois de l'électrostatique dans le vide, comme dans les chapitres 1, 2 et 3.

III. Grandeurs électrostatiques et propriétés dans la matière conductrice en équilibre électrostatique

III – 1 Propriété fondamentale de la matière conductrice en électrostatique : nullité du champ

Le vecteur champ électrique est nécessairement uniformément nul en tout point de la matière conductrice en équilibre, sinon, les porteurs de charges libres seraient soumis à des forces électrostatiques leur donnant un mouvement d'ensemble incompatible avec un état d'équilibre. Donc, dans un conducteur en équilibre électrostatique, le vecteur champ électrique est uniformément nul :

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

III – 2 Potentiel électrostatique dans un conducteur

En tout point intérieur on trouve la relation : $\vec{E} = \vec{0}$

Or, le champ électrostatique peut s'exprimer en fonction de V

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$$

En choisissant par exemple d'exprimer le gradient de V dans le repère cartésien :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \left\{ \begin{array}{l} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial z \end{array} \right\} = \vec{0}$$

Le potentiel V est uniforme dans tout le volume de la matière conductrice, y compris sur la surface du conducteur.

La surface du conducteur est donc une surface équipotentielle.

III – 3 Charge volumique d'un conducteur en équilibre

Considérons une petite surface fermée intérieure à la matière conductrice, délimitant un petit volume dV . Cette surface peut représenter une surface dite de Gauss. D'après le théorème de Gauss, le flux du champ \vec{E} sortant de la petite surface est défini par :

$$\phi = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

Mais, il peut également s'exprimer par la relation suivante :

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

En fait ce flux est nul car $\vec{E} = \vec{0}$ donc, $\phi = 0 \Rightarrow \rho dV = 0 \Rightarrow \rho = 0$

La charge volumique est nulle en tout point.

**L'électrisation d'un conducteur en équilibre électrostatique
ne peut être que superficielle.**

IV. Champ électrostatique dans le vide, au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur.

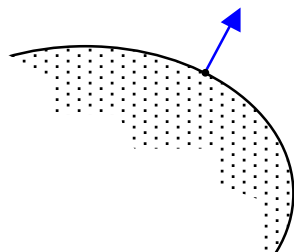
IV – 1 Application du théorème de Coulomb

Pour bien comprendre le phénomène du champ électrostatique au voisinage immédiat, on applique la remarque suivante :

La surface d'un conducteur électrisé doit être considérée comme une couche caractérisée par une charge surfacique σ , généralement non uniforme.

Soit un point M de la surface d'un conducteur et \vec{n} le vecteur unitaire normal sortant du conducteur en M, dirigé de la région (R₁) intérieure au conducteur vers la région extérieure vide (R₂).

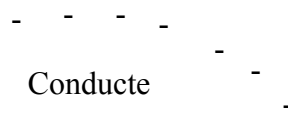
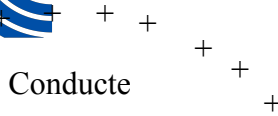
On considère deux cas en **scindant le point M en deux parties : M₁ et M₂**.



Un point M₁ ∈ (R₁), intérieur au conducteur : le champ y est nul par définition (cf. partie III).

$$\vec{E}_1 = \vec{0}$$

Un point M₂ ∈ (R₂) : on pose : $\vec{E} = \lim_{(M_2)} \vec{E}_2$ pour M₂ infiniment voisin de M.



En calculant le flux pour une surface autour de M_2 , on peut exprimer la relation suivante :

$$\oiint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \vec{E}_2 S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S \quad \text{en appliquant le théorème de Gauss}$$

σ : charge surfacique (positive ou négative)

Donc, on peut écrire : $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ et de manière vectorielle $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ pour un point $M_2 \in (R_2)$ infiniment voisin de M .

D'après les relations de \vec{E} pour M_1 et M_2 , on peut écrire

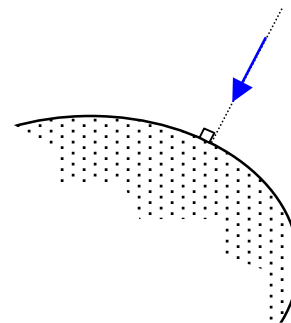
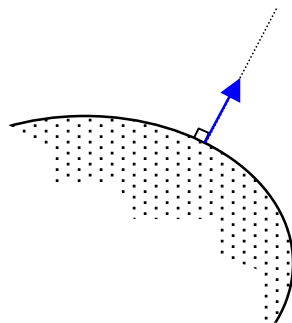
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

C'est la relation de passage à la traversé de (S) en M (Théorème de Coulomb).

Il en résulte que :

- Les lignes de champ sont normales à la surface du conducteur au voisinage **immédiat** de celui-ci.
- Si $\sigma > 0$, ces lignes sont orientées vers l'extérieur (elles "sortent" du conducteur).
- Si $\sigma < 0$, ces lignes sont orientées vers l'intérieur (elles "rentrent" dans le conducteur).

Remarque 1 : la "fonction" champ électrostatique $\|\vec{E}\|$ est une fonction non continue.



Remarque 2 : s'il existe plusieurs corps en présence, il faut considérer l'ensemble de ces corps pour déterminer le champ électrostatique \vec{E} (le sens).

Par conséquent, la charge surfacique σ en M dépend de l'électrisation de tous les corps en présence. Cela est dû au phénomène d'influence.

IV – 2 Calcul de la pression électrostatique – Hors Programme

Soit une charge $dQ = \sigma dS$, plongée dans le champ \vec{E} d'origine extérieure à (dS) ; elle subit la force extérieure :

$$d\vec{F} = dQ\vec{E}$$

L'expression d'un champ \vec{E} pour une surface (plane) est : $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$, donc $d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n} dS$

Cette force a une expression analogue à celle de la force pressante exercée par un fluide au contact d'une paroi : $d\vec{F} = p\vec{n}dS$ avec le vecteur \vec{n} unitaire normal à la paroi et sortant du fluide.

Par analogie, on pose $p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$: **p** étant la **pression électrostatique**.

En introduisant le champ au voisinage de M_2 , on peut écrire , avec $|\sigma| = \epsilon_0 E$

$$p = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

Application 1

Au voisinage immédiat d'un conducteur, règne un champ de 10^4 V.m^{-1} . Calculer $|\sigma|$ et le nombre surfacique d'électrons correspondant.

$$|\sigma| = \epsilon_0 E = \frac{10^4}{36\pi 10^9} = 8,84 \cdot 10^{-8} \text{ C.m}^{-2}$$

On obtient le nombre d'électrons par cm^2 :

$$n = \frac{8,84 \cdot 10^{-12}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 55,25 \cdot 10^6 \text{ électrons/cm}^2 \quad \text{ou} \quad 5,525 \cdot 10^{11} \text{ électrons/m}^2$$

Application 2

Calculer la pression électrostatique p en un point de la surface d'un conducteur, au voisinage immédiat duquel, le champ est de 10^4 V.m^{-1} .

On a la relation suivante : $p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$ avec $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$

On a donc $p \approx 18 \cdot \pi \cdot 10^9 \cdot \sigma^2$ ou $p = \frac{1}{72 \cdot \pi \cdot 10^9} E^2$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{72 \pi 10^9} (10^4)^2 = \frac{1}{720 \pi} \text{ en Pascal}$$

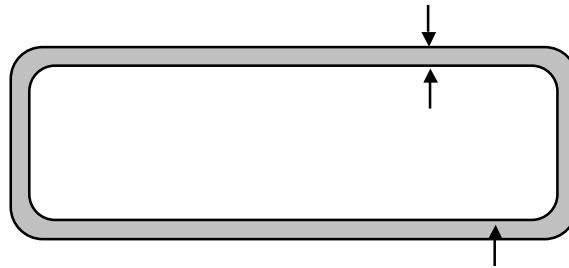
$$\Rightarrow p = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$$

Cette pression est très faible par rapport à la pression atmosphérique normale ($p_0 \approx 10^5 \text{ Pa}$).

V. Complément sur l'électrisation des conducteurs.

V – 1 Propriétés des conducteurs creux.

Soit un conducteur creux (C) entourant une cavité dont l'intérieur ne contient aucune charge.



A l'intérieur d'une cavité sans charge, le potentiel est uniformément égal à V_0 , potentiel de la matière du conducteur (C).

En tout point de la cavité, le champ est nul. En effet, V étant uniforme :

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = - \vec{E} = \vec{0}$$

On peut écrire aussi :

Le champ dans la cavité \vec{E}_2

Le champ dans le conducteur \vec{E}_1

La relation de passage à la traversée du conducteur, côté intérieur, s'écrit :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma_{0i}}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Mais ici, pour le côté intérieur, on a $\vec{E}_1 = \vec{0}$ et $\vec{E}_2 = \vec{0}$, d'où $\sigma_{0i} = 0$ en tout point de la surface (S_{0i}).
Socle isolant

On dit que la surface (S_{0i}) limitant la cavité n'est pas électrisée (la charge surfacique intérieure σ_{0i} est uniformément nulle).

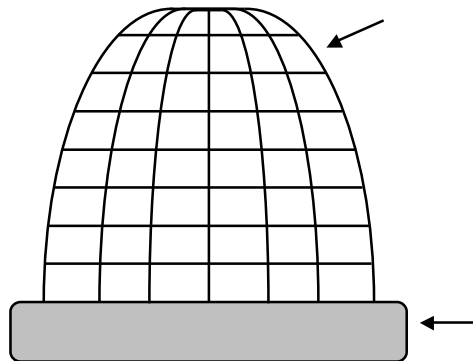
Par conséquent, l'électrisation ne peut apparaître que sur la surface extérieure (S_{0E}) de (C).

On dit :

L'électrisation du conducteur creux est identique à celle du conducteur plein ayant même surface extérieure.

Application Pratique : La Cage de Faraday

Un conducteur dont les parois sont un simple treillage se comporte comme un conducteur creux sans lacune avec une approximation d'autant meilleure que le treillage est fin.

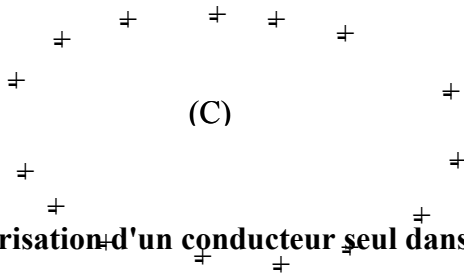


Il va exister une charge électrostatique sur la surface extérieure du conducteur creux. Un champ électrostatique existe de la surface extérieure vers le vide.

A l'intérieur de cette cage, le champ est nul.

Cette situation simple de phénomène électrostatique pour un conducteur creux se trouve dans le cas d'une voiture (véhicule) en présence d'orages.

Le véhicule joue le rôle de cage de Faraday. Donc il est préférable de rester à l'abri à l'intérieur de véhicule car il y a un phénomène d'autoprotection dû à la carcasse métallique creuse du véhicule (et en plus on reste au sec !).



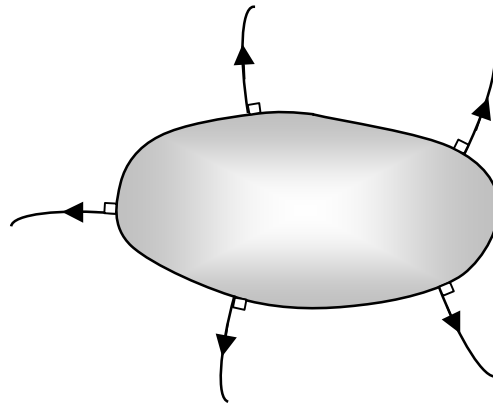
V – 2 Electrification d'un conducteur seul dans l'espace.

Pour cette section, on donnera quelques observations sans les démontrer.

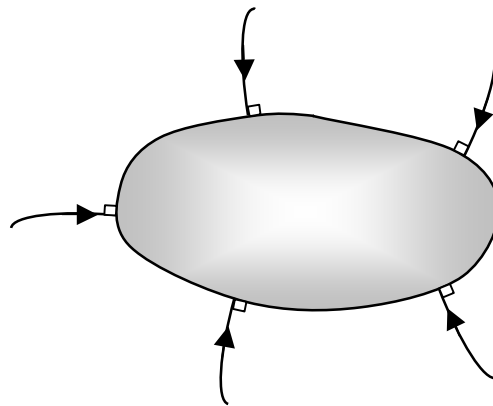
On considère un conducteur seul dans l'espace. L'électrification d'un conducteur seul dans le vide (purement superficielle) est partout de même signe. La charge Q du conducteur et sa charge surfacique $\sigma_{(M)}$ ont même signe que son potentiel V .

Les deux types d'électrification sont :

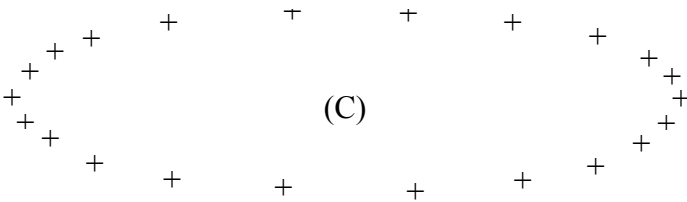
1. $V > 0, \sigma_{(M)} > 0$ et $Q > 0$



2. $V < 0, \sigma_{(M)} < 0$ et $Q < 0$



L'allure des lignes de champ au voisinage immédiat du conducteur est normale entrante (pour $V < 0$) ou sortante (pour $V > 0$). Les lignes de champ sont orientées vers les potentiels décroissants (cf. Chapitre III).



Faible courbure

Aucune ligne de champ ne peut relier deux points de la surface du conducteur : la surface du conducteur est une surface équipotentielle.

La charge Q est proportionnelle au potentiel V du conducteur. On pose :

$$C = \frac{Q}{V} \text{ (C est toujours positif)}$$

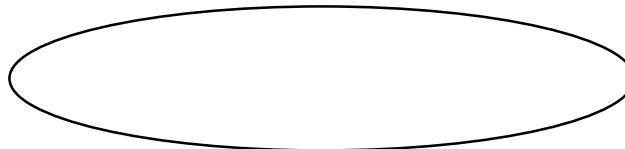
C est la capacité propre du conducteur supposé seul dans l'espace illimité. L'unité de la capacité est le Farad (F).

La charge surfacique $\sigma_{(M)}$ n'est pas uniforme, sauf pour la sphère seule dans l'espace.

$|\sigma_{(M)}|$ est faible dans les régions à faible courbure.

$|\sigma_{(M)}|$ est grande dans les régions à forte courbure.

On appelle ce phénomène, le pouvoir des pointes.



Application :

Calculer la capacité propre d'une sphère de rayon R. Rechercher le rayon R pour une capacité de 1 Farad

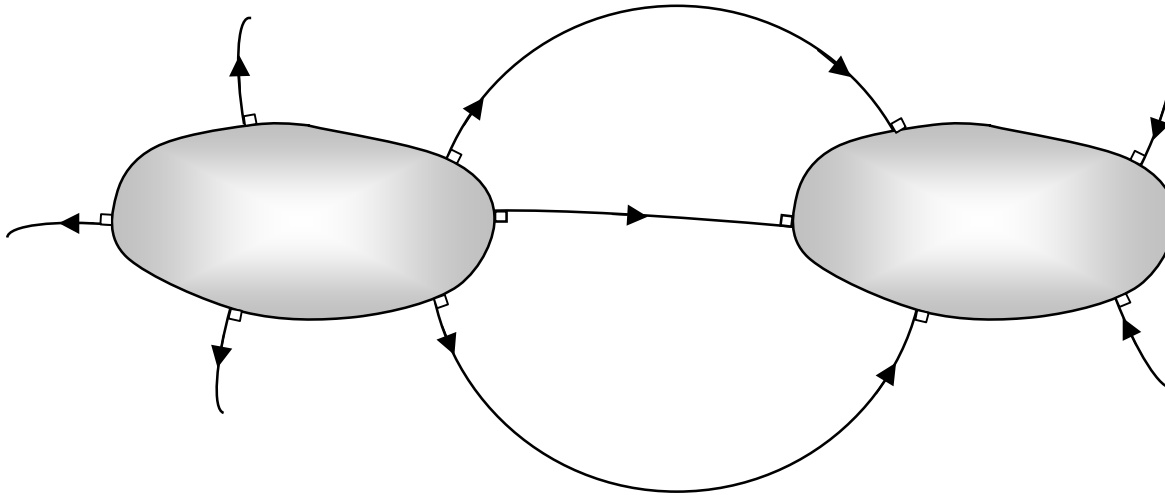
Le potentiel pour une sphère vaut : $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ donc on a $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$

$$\Rightarrow C = 1 \text{ F} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad R \approx 9.10^9 \text{ m} \approx 9.10^6 \text{ Km} \quad \Rightarrow \quad \text{énorme}$$

On utilise des sous multiples du Farad (μF , nF).

VI. Condensateurs électriques

On considère deux conducteurs isolés A et B et l'on admet qu'une charge $+Q$ a été enlevée de l'un des deux pour être déposée sur l'autre.



Les lignes de champ partent du conducteur chargé positivement pour rejoindre celui de charge négative. Les charges $+Q$ et $-Q$ sont stationnées à la surface des conducteurs.

Une telle configuration est appelée condensateur :

Chaque conducteur est une armature du condensateur et comme on l'a vu précédemment, chacune des surfaces est une équipotentielle. Si Q est différent de 0, les potentiels des armatures (chargée positivement et négativement) sont différents.

Comme le champ est dirigé de l'armature positive vers l'armature négative, le potentiel de la première est donc plus élevé que celui de la seconde.

Nous appellerons tension aux bornes du condensateur la différence de potentiel (ddp) entre les armatures :

$$U = V_A - V_B \quad \text{en Volt (V)}$$

La charge Q du conducteur, armature chargée positivement et la chute du potentiel U sont liés par la relation d'état du condensateur :

$$Q = C.U$$

avec C la capacité du condensateur en Farad (F).

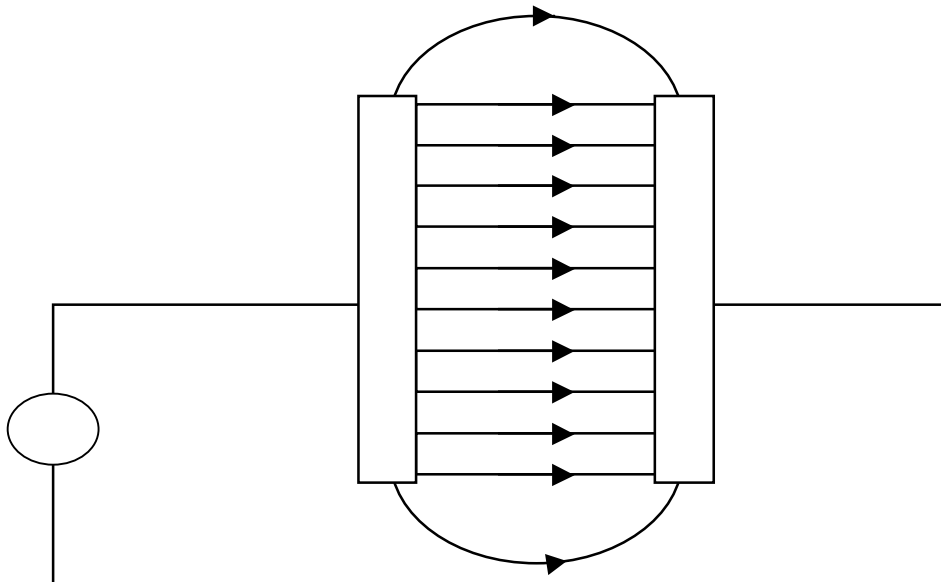
C dépend de la configuration géométrique du condensateur (forme et dimensions des armatures, distance entre celles-ci) ainsi que des propriétés diélectriques du milieu.

Pour calculer la capacité d'un condensateur, on décompose le procédé en 4 étapes :

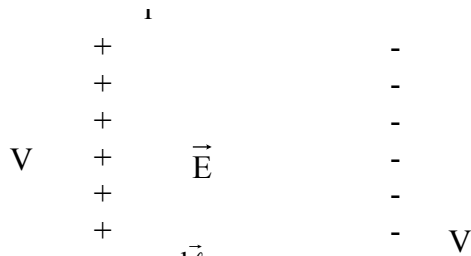
1. A partir de la forme géométrique des armatures, on cherche la répartition de la charge sur ces armatures.
2. On calcule le champ électrique avec la loi de Gauss
3. On calcule le potentiel entre les armatures ($dV = - \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$)
4. On relie le potentiel, la ddp et la relation d'état du condensateur

Exemple : Condensateur plan

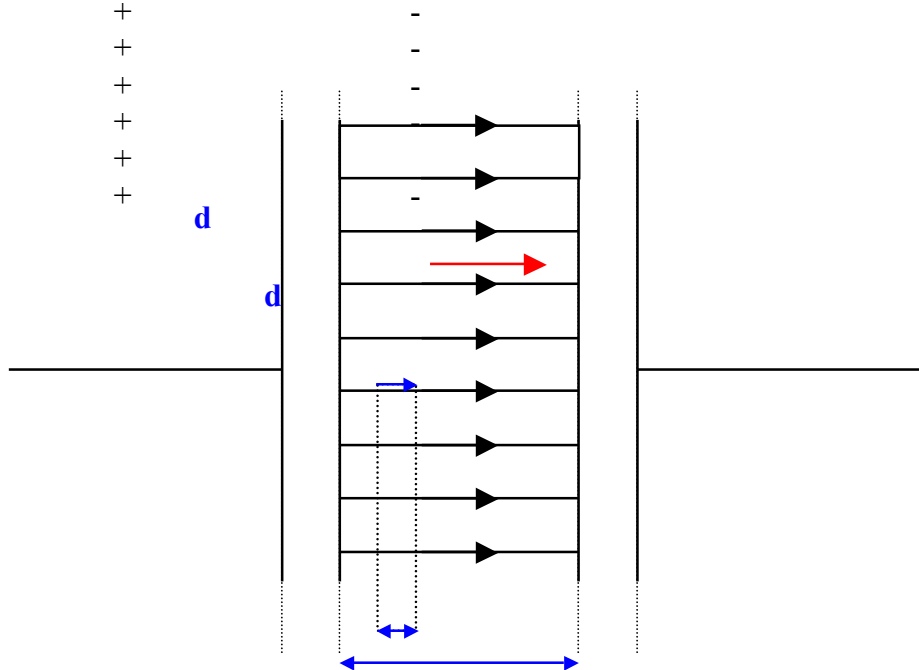
Un condensateur plan est formé par deux armatures planes de même section A situées à une distance d l'une de l'autre (elles sont parallèles entre elles).



Si l'on considère un condensateur idéal, les armatures parallèles sont supposées infinies, il n'existe pas d'effets de bord, c'est à dire que toutes les lignes de champ sont parallèles entre elles.



Mais, réellement, il existe un effet de bord que l'on négligera, ce qui donne :



Pour des raisons de symétrie, le champ \vec{E} est perpendiculaire aux armatures, de module constant (loi de Gauss) :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Pour calculer le potentiel, on utilise la relation

$$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{avec} \quad d\vec{\ell} = dx \vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}$$

$$dV = - E dx$$

$$dV = - \frac{Q}{\epsilon_0 A} dx$$

Ce qui donne en intégrant :

$$V(x) = - \frac{Q}{\epsilon_0 A} x + \text{cte}$$

En considérant la ddp U entre les armatures, on a :

$$U = V_A - V_B = V_{(x=0)} - V_{(x=d)} = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

A partir de la relation $Q = C.U$, on obtient :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{Formule de la capacité d'un condensateur plan idéal.}$$

Un condensateur, de capacité C et portant la charge Q, a une ddp U entre ses bornes telle que $Q = CU$ et son énergie potentielle a pour expression :

$$E_p = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2$$

E_p = énergie potentielle en Joule (J)

Q = charge en Coulomb (C)

U = tension en Volt (V)

C = capacité en Farad (F)

Remarques :

- Il existe aussi des condensateurs cylindriques, sphériques et bifilaires (2 fils chargés), pour lesquels, on peut appliquer la méthode précédente.
- On peut rencontrer un diélectrique autre que le vide entre les armatures, c'est à dire, un matériau isolant placé entre les armatures faisant varier la capacité C du condensateur.

Application :

On cherche l'expression de la capacité d'un condensateur cylindrique : les armatures sont des cylindres coaxiaux (même axe) de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, de hauteur h et portent respectivement les charges $(+q)$ et $(-q)$ sur leur surface avec une densité surfacique uniforme. On utilisera l'approximation du cylindre infiniment haut.

Solution :

Le condensateur est cylindrique de rayon R et le champ \vec{E} créé par un cylindre ayant une distribution surfacique uniforme de charges de densité σ a été déjà calculé . On en rappelle les résultats :

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(r > R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

dans le système de coordonnées cylindriques.

Donc, le cylindre de rayon R_2 crée un champ nul dans l'espace inter-armatures et le cylindre de rayon R_1 crée le

champ : $\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$

au point M situé à la distance r de l'axe du cylindre , avec $R_1 < r < R_2$.

La charge q est uniformément répartie sur le cylindre de rayon R_1 et de hauteur h . La surface du cylindre sur laquelle se trouve la charge est $S_1 = 2\pi R_1 h$, de sorte que la charge s'écrit : $q = \sigma_1 \cdot 2\pi R_1 h$ (puisque la densité surfacique est uniforme)

La circulation du champ électrostatique doit être calculée de R_1 à R_2 . On choisit la ligne que l'on veut, puisque le champ électrostatique est à circulation conservative. Il est préférable de choisir une ligne pour laquelle \vec{E} et $\vec{d\ell}$ sont colinéaires et de même sens en tout point, c'est à dire une ligne de champ ; une telle ligne est une droite radiale et le déplacement élémentaire s'écrit : $\vec{d\ell} = dr \cdot \vec{u}_r$

La circulation est donc :

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

On sait que la circulation du champ s'exprime aussi en fonction du potentiel électrostatique :

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = \int_1^2 -\vec{\text{grad}}V \cdot \vec{d\ell} = \int_1^2 -dV = V_1 - V_2 = U$$

Il vient donc :

$$U = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \text{avec } q = \sigma_1 \cdot 2\pi R_1 h \quad \text{soit : } \sigma_1 R_1 = \frac{q}{2\pi h}$$

Et l'on trouve : $U = \frac{q}{C}$ soit $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$







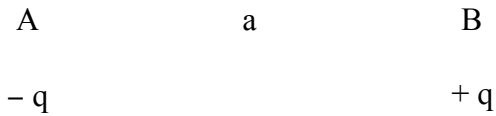
CHAPITRE 5 : Dipôle Électrostatique

I. Introduction

Le dipôle électrostatique est un dispositif fréquemment utilisé en physique.

Il possède une charge électrique nulle mais crée un champ électrostatique non nul. On trouve cette situation lorsque les barycentres des charges positives et négatives sont décalés (cas de la molécule d'eau) et un grand nombre de distributions de charges de ce type peut être considéré, par analogie, comme un dipôle.

$$\vec{p} = q\overline{AB}$$



II. Définitions

Un doublet électrostatique est un ensemble de deux charges opposées (+ q) et (- q) liées l'une à l'autre invariablement en deux points A(- q) et B(+ q). La distance $a = AB$ reste donc constante

Un dipôle électrostatique est un doublet électrostatique tel que la distance a entre les deux charges opposées (- q) et (+ q) est petite.

Le dipôle est dit *actif* lorsque la distance a reste petite devant la distance $r = AM = BM$ du point M où l'on considère le champ électrostatique créé par le doublet A(- q) et B(+ q).

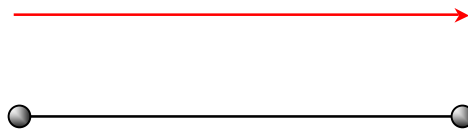
Le dipôle est dit *passif* lorsque la distance a reste suffisamment petite pour que l'on puisse considérer le champ dans lequel le doublet se trouve plongé comme uniforme sur l'étendue du doublet.

On appelle moment dipolaire le vecteur :

$$\vec{p} = q\overline{AB}$$

Le moment dipolaire $p = qa$ se mesure en coulombs mètre (C.m) ou en debye (D) :

$$1D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$$



III. Etude du dipôle actif

III – 1 Potentiel créé par deux charges

Soit le point A portant la charge (- q), le point B portant la charge (+ q) et un point M quelconque. Les points A, B et M définissent un plan (Oxy) où l'origine O est située au milieu de AB. On choisit un système de coordonnées polaires de sorte que le moment dipolaire porté par l'axe (Ox) soit orienté vers les x positifs.

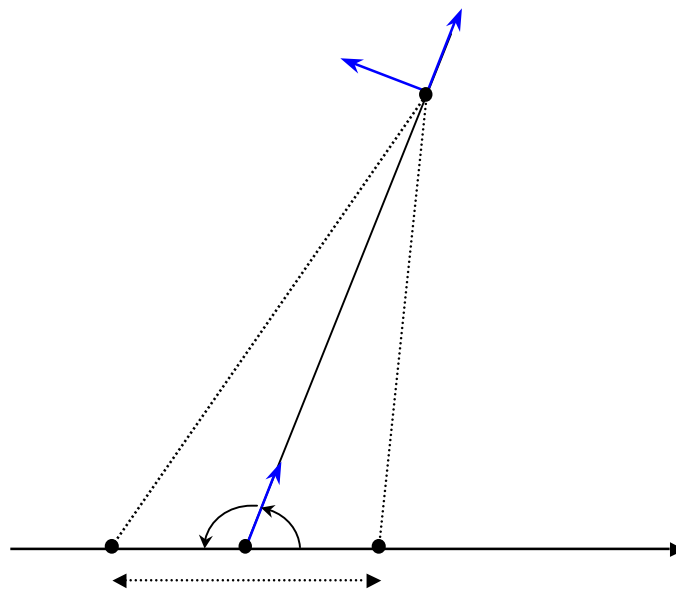
Le potentiel en M (choisi nul à l'infini) créé par les deux charges ponctuelles s'écrit, d'après le principe de superposition :

$$V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$

On peut exprimer les distances AM et BM à partir de coordonnées des points A, B et M :

$$A\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right), B\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) \text{ et } M(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

en prenant la norme des vecteurs \vec{AM} et \vec{BM} .



On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore généralisé dans les triangles AOM et BOM.

Dans le triangle AOM : $AM^2 = AO^2 + OM^2 - 2AO \cdot OM \cdot \cos\alpha$

Or, $\alpha = \pi - \theta$, $OM = r$ et $AO = OB = \frac{a}{2}$, donc la relation devient :

$$AM^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + a r \cos\theta \text{ soit } AM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2 + a r \cos\theta}$$

Dans le triangle BOM : $BM^2 = BO^2 + OM^2 - 2BO \cdot OM \cdot \cos\theta$

$$BM^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - a r \cos\theta \text{ soit } BM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2 - a r \cos\theta}$$

Le potentiel s'écrit $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{AM} + \frac{1}{BM} \right)$ et comme $a \ll r$, les distances AM et BM

sont voisines ; un développement limité en $\frac{a}{r}$ est ici adapté pour simplifier cette différence :

$$\frac{1}{AM} = \left(\frac{a^2}{4} + r^2 + a r \cos\theta \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos\theta \right)$$

De même :

$$\frac{1}{BM} = \left(\frac{a^2}{4} + r^2 - a r \cos\theta \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos\theta \right)$$

Et le potentiel $V(M)$ s'écrit alors :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-1}{AM} + \frac{1}{BM} \right) \approx \frac{q}{4\pi r \epsilon_0} \left(- \left(1 - \frac{a}{2r} \cos\theta \right) + \left(1 + \frac{a}{2r} \cos\theta \right) \right)$$

$$V(M) \approx \frac{q a \cos\theta}{4\pi r^2 \epsilon_0} \text{ au premier ordre en } \frac{a}{r}.$$

Le potentiel électrostatique créé par un dipôle actif vaut :

$$V(M) \approx \frac{q a \cos\theta}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi r^3 \epsilon_0}$$

Equipotentielles

On choisit la constante additive nulle, ce qui rend V nul à l'infini où le champ électrostatique créé par chacune des charges ponctuelles est nul.

III – 2 Champ créé

La relation $\vec{E} = -\text{grad}V$ permet d'exprimer, en coordonnées polaires, le champ électrostatique créé par le dipôle :

$$-\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta, \text{ soit } \vec{E} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

Le champ \vec{E} à la distance r créé par un dipôle $\vec{p} = p \cdot \vec{u}_x$ placé en O a pour composantes, en coordonnées polaires d'origine O :

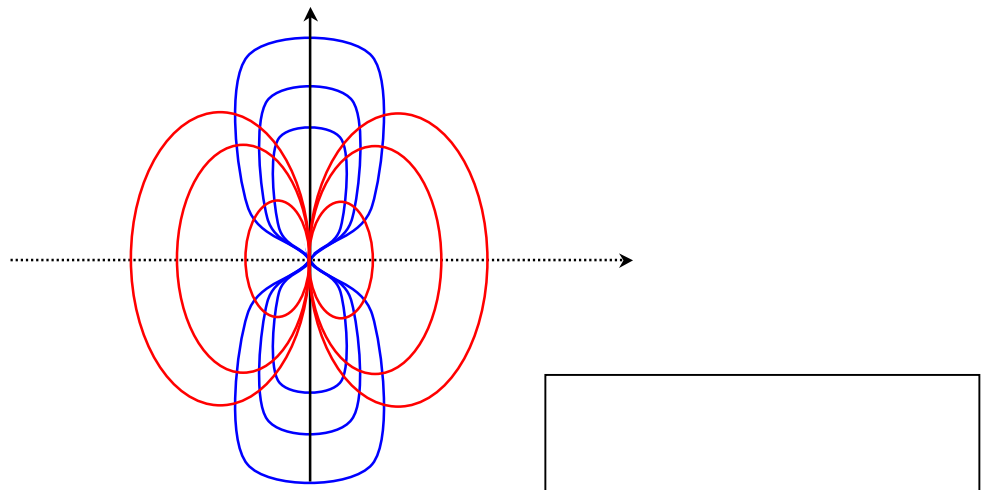
$$E_r \approx \frac{2p\cos\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad E_\theta \approx \frac{p\sin\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

Le vecteur champ est inclus dans le plan (Oxy), ce que vérifie le principe de superposition.

III – 3 Diagramme électrique

Les équipotentielles sont données par : $V = \text{cte}$, soit $r^2 = k \cdot \cos\theta$

où k est une constante qui dépend de la valeur du potentiel : $k = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 V}$



L'équipotentielle $V = 0$ est le plan (Oyz), qui se projette selon l'axe (Oy) dans le plan (Oxy).

Les lignes de champ sont orthogonales aux équipotentielles. Elles ont pour équation, en coordonnées polaires :

$r = k' \cdot \sin^2\theta$, où k' est une constante. (*démonstration hors programme*)

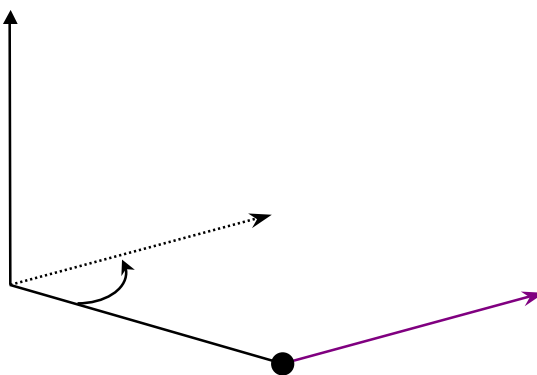
$\vec{F}(M)$

IV. Etude du dipôle passif

On étudie les actions subies par un dipôle électrostatique (points A(-q) et B(+q)) lorsqu'il est plongé dans un champ électrostatique extérieur.

On cherche la résultante des forces que le dipôle subit de la part du champ extérieur, puis le moment résultant.

IV – 0 Moment d'une force et produit vectoriel



Une force \vec{F} permet de mettre un système en mouvement de translation, mais elle peut également le faire tourner autour d'un axe ou un point. On définit alors le vecteur moment d'une force par rapport à un point O :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} \quad \text{où M désigne le point matériel sur lequel s'applique la force } \vec{F}.$$

On appelle **produit vectoriel** de $\vec{v}_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{v}_2 (X_2, Y_2, Z_2)$ le **vecteur** noté $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ tel que $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) \vec{i} + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1) \vec{j} + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \vec{k}$. Le produit vectoriel a son support perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs. Son sens est tel que le trièdre formé par \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ soit direct. Son module est égal à l'aire du parallélogramme construit à partir des deux vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ou encore égal à $\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot |\sin(\theta)|$

$$\|\vec{v}_2\| \cdot |\sin(\theta)|$$

IV – 1 Cas d'un champ extérieur uniforme : force et moment

La résultante des forces subies par le dipôle s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = -q\vec{E} + q\vec{E} = \vec{0}$$

On calcule le moment de cet ensemble de forces en un point C quelconque.

$$\vec{M}_C = \vec{CA} \wedge \vec{F}_A + \vec{CB} \wedge \vec{F}_B = (-\vec{CA} + \vec{CB}) \wedge q\vec{E} = q\vec{AB} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Ce moment ne dépend plus de C, donc du point où on le calcule.

On dit que le dipôle **subit un couple** (force nulle et moment non nul).

Un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrostatique uniforme subit une résultante des forces nulle, le moment de cette force étant non nul et indépendant du point où on le calcule : $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

Le sens du moment donne le sens naturel de rotation du dipôle (règle du tire-bouchon). Le dipôle (ou plutôt son moment dipolaire) tend spontanément à s'orienter dans le sens du champ extérieur.

IV – 2 Energie du dipôle dans le champ extérieur

L'énergie potentielle électrostatique E_p est égale au travail fourni par l'opérateur pour amener le dipôle de l'infini jusqu'à sa position finale (chapitres 3 et 4).

Soient V_A et V_B les valeurs du potentiel du champ aux points A et B.

Sachant que l'on ne rapproche pas les charges l'une de l'autre, mais que l'on amène le dipôle depuis une position éloignée où le champ extérieur est nul jusqu'à sa position finale, l'expression de l'énergie potentielle électrostatique du dipôle est :

$$E_p = (-q)V_A + qV_B = q(V_B - V_A)$$

Or, la circulation du champ extérieur \vec{E} entre A et B vaut :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{\ell} = \vec{E} \cdot \vec{AB}$$

$$\text{Et aussi, } \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B -dV = V_A - V_B$$

On en tire :

$$V_A - V_B = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ et } E_p = q(V_B - V_A) = -q(\vec{E} \cdot \overrightarrow{AB}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrostatique uniforme \vec{E} possède l'énergie potentielle électrostatique : $E_p = q(V_B - V_A) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

IV – 3 Cas d'un champ extérieur non uniforme

Même si le champ extérieur \vec{E} n'est pas uniforme, la notion de dipôle impose que sur l'étendue du dipôle, le champ extérieur varie très faiblement. On admet alors que :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \approx \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB}, \text{ le terme correctif étant négligeable.}$$

L'énergie potentielle électrostatique E_p du dipôle plongé dans un champ extérieur non uniforme garde la même expression : $E_p = q(V_B - V_A) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Si on ne tient pas compte des variations du champ extérieur \vec{E} , alors la force est nulle. Cela revient ici à négliger un terme qui contient les petites variations de \vec{E} devant la force totale, c'est à dire zéro !

Il faut donc tenir compte du caractère non uniforme de \vec{E} pour déterminer la force que subit le dipôle.

La force de Coulomb étant conservative, on a pu définir l'énergie potentielle électrostatique, qui n'est autre que l'énergie potentielle associée à cette force.

Lorsqu'une force \vec{F} est conservative, elle est reliée à son énergie potentielle associée par la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$

La force \vec{F} que le dipôle subit de la part du champ extérieur non uniforme a pour expression :
 $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E})$

Le travail W de cette force depuis la position 1 vers une position 2 est :

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 -\overrightarrow{\text{grad}}E_p \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 -dE_p = E_{p_1} - E_{p_2}$$

Le déplacement est spontané si le travail est moteur, c'est à dire positif, soit lorsque l'énergie potentielle décroît.

Lorsque le champ extérieur \vec{E} est uniforme, l'énergie potentielle est minimale lorsque \vec{p} et \vec{E} sont colinéaires et de même sens : le moment dipolaire s'oriente spontanément dans la direction et le sens du champ extérieur \vec{E} .

Le moment dipolaire \vec{p} s'oriente spontanément dans le sens du champ extérieur \vec{E} .

Lorsque le champ extérieur \vec{E} n'est pas uniforme, le moment dipolaire s'oriente spontanément dans la direction et le sens du champ extérieur \vec{E} , et le dipôle se déplace de telle manière que le module $E = \|\vec{E}\|$ du champ augmente, ce qui fait décroître l'énergie potentielle électrostatique.

Le dipôle tend à se déplacer spontanément vers les zones de champ extérieur plus intenses.

V. Intérêt de la notion de dipôle

V – 1 Action d'un système de charges à grande distance

Une distribution de charges étudiée "à grande distance", c'est à dire à une distance r très supérieure à son étendue a , est équivalente à un dipôle.

Soit un ensemble de N charge q_i placées respectivement en des points O_i et soit O un point du voisinage de cet ensemble de charges. On étudie le champ et le potentiel électrostatiques de cet ensemble de charges en un point M éloigné : la distance $r = OM$ doit être très supérieure à chacune des distances $OO_i = a_i$.

On exprime le potentiel V au point M grâce au principe de superposition :

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + \text{cte}, \text{ où } r_i = O_iM.$$

Avec $\vec{a}_i = \vec{OO}_i$, on a :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{O}_i\vec{O} + \vec{OM})^2}} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{\vec{a}_i \cdot \vec{r}}{r^2} + \frac{a_i^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

On effectue un développement limité du premier ordre (approximation dipolaire) en :

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{a}_i \cdot \vec{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r} + \frac{\vec{a}_i \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{a}_i \cdot \vec{u}}{r^2}, \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

L'expression du potentiel devient alors :

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{u} \cdot \sum_i q_i \vec{a}_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \dots$$

On n'a pas écrit les termes correspondant à l'ordre 2, mais ils restent petits. Le premier terme, s'il n'est pas nul, est évidemment très grand devant le second et ainsi de suite.

On peut distinguer plusieurs cas :

Cas n°1 :

$\sum q_i = Q \neq 0$, la charge totale de la distribution n'est pas nulle et tout se passe comme si on pouvait, depuis le point M éloigné, considérer la distribution comme une charge ponctuelle Q placée en O :

En effet :
$$V \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Cas n°2 :

$\sum q_i = 0$, la charge totale de la distribution est nulle donc le premier terme du potentiel aussi.

Si $\sum q_i \vec{a}_i \neq 0$, on pose $\vec{p} = \sum q_i \vec{a}_i$ et le potentiel s'écrit alors :

$$V \approx \frac{\vec{u} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On reconnaît l'expression du potentiel électrostatique créé à la distance r par un dipôle de moment dipolaire \vec{p} .

On dit que la distribution de charges est dipolaire, car on peut identifier le potentiel V et le champ qu'elle crée à ceux d'un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = \sum q_i \vec{a}_i$.

Cas n°3 :

$\sum q_i = 0$ et $\vec{p} = \sum q_i \vec{a}_i = \vec{0}$, les deux premiers termes du potentiel sont nuls et on parle de distribution multipolaire (cas non étudié).

V – 2 Détermination de la structure de molécules

On peut avoir de l'information sur les structures moléculaires par la connaissance de la valeur $p = \|\vec{p}\|$ du moment dipolaire. Les molécules de dioxygène ou de dichlore ne sont pas polaires, mais la molécule d'eau l'est : la connaissance de p permet de remonter à l'angle entre les liaisons O–H si on en connaît la longueur.

Si on prend par exemple la molécule de dinitro-benzène qui est un explosif plus ou moins puissant selon sa structure moléculaire.

Pour l'ortho dinitro-benzène, on mesure $p = 5,8 \text{ D}$

Pour le méta dinitro-benzène, on mesure $p = 3,5 \text{ D}$

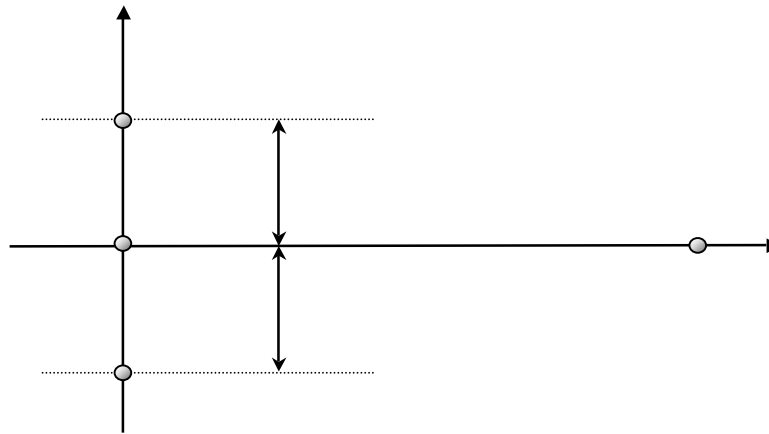
Pour le para dinitro-benzène, on mesure $p = 0$

Application

Soit les points A , B et O tels que : $AO = OB = a$.

Soit une distribution de charges telle que les points A et B portent chacun la charge $+q$ et que le point O porte la charge $-2q$.

Un point éloigné M situé sur l'axe (Oz) voit-il cette distribution comme un dipôle ? Si oui, donner le moment dipolaire p .



1. La charge totale est nulle : l'équivalence avec un dipôle est possible.
2. Le potentiel est nul à l'infini et on le calcule au point M en superposant les potentiels créés par chacune des charges ponctuelles placées en A , O et B :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 OM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$

or, $OM = |z|$ et $AM = BM = \sqrt{a^2 + z^2}$, de sorte que : $V(M) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{|z|} \right)$

3. Lorsque le point M est "éloigné" du dipôle, on peut écrire : $|z| \gg a$, soit $\frac{a}{|z|} \ll 1$. En factorisant par

$\frac{1}{|z|}$, le terme $\frac{a}{|z|}$ apparaît dans l'expression du potentiel et un développement limité est alors possible :

$$V(M) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 |z|} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{z^2}}} - 1 \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 |z|} \left(\left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} - 1 \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 |z|} \left(1 - \frac{a^2}{2z^2} - 1 \right)$$

$$V(M) = - \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0 |z|^2}$$

4. Ce potentiel $V(M)$ est proportionnel à $\frac{1}{z^3}$, c'est à dire à $\frac{1}{r^3}$, où $r = OM$. Or, le potentiel créé par un dipôle est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$, donc cette distribution n'est pas équivalente à un dipôle

5. A titre de vérification, on calcule :

$$\sum q_i \cdot \vec{a}_i = q\vec{OA} - 2q\vec{OO} + q\vec{OB} = q(\vec{OA} + \vec{OB}) = \vec{0}$$

Nous nous trouvons dans le cas où l'équivalence à un dipôle n'est pas possible.

Nous sommes en présence d'une distribution multipolaire.





CHAPITRE 6 : Champ Magnétique & Mouvement de Particules Chargées (Introduction)

I. Introduction

La force de Lorentz met en évidence l'existence du champ magnétique. On va étudier les champs magnétiques créés par les courants électriques indépendants du temps : on parle aussi de magnétostatique (comme pour l'électrostatique, pas de variation du champ électrostatique dans le temps).

On peut calculer l'expression du champ magnétique par la loi de Biot et Savart. Comme pour le champ électrostatique, il existe des propriétés de symétrie et d'invariance et un théorème (Ampère) pour calculer d'une autre manière le champ magnétique.

En étudiant le mouvement des particules, on arrive à établir, dans un conducteur, la fameuse loi d'Ohm et donc on peut calculer une résistance.

r
 P
 I

II. Mise en évidence du champ magnétique $d\vec{\ell}$

Soit une charge q , immobile en un point M_1 et ne subissant aucune force autre que son poids. Si elle passe au point M avec la vitesse \vec{v} et y subit une force \vec{f} , alors on peut dire qu'il existe au point M le champ magnétique \vec{B} qui satisfait la relation :

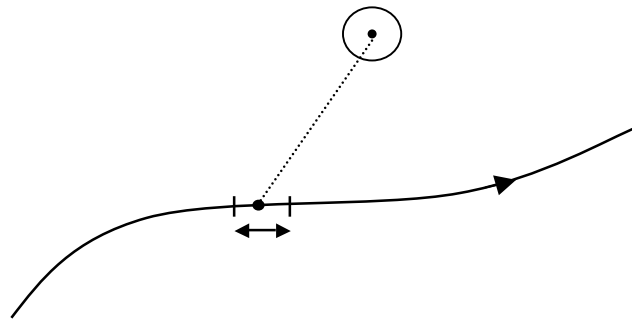
$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

avec

\vec{f}	force de Lorentz en Newton [N]
q	charge en Coulomb [C]
\vec{B}	champ magnétique en Tesla [T]
\vec{v}	vitesse [m.s ⁻¹]

Pour calculer le champ magnétique de manière directe, il existe la loi de **Biot & Savart** (pour une distribution linéique).

On calcule le champ magnétique sur un élément de longueur $d\vec{\ell}$ et on intègre sur l'ensemble de la distribution :



$$\vec{B} = \int \vec{dB} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM} \quad \text{et} \quad r = PM$$

$$\mu_0 = \text{perméabilité du vide} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$$

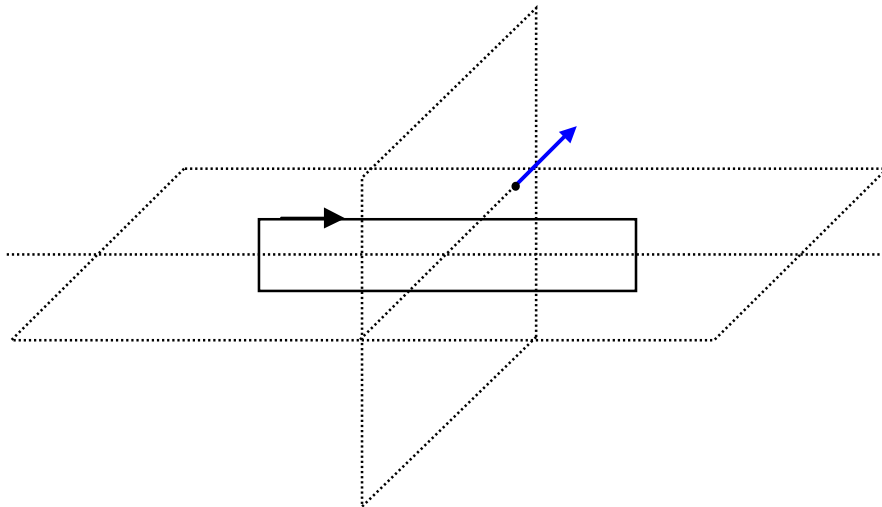
Le champ magnétique n'est donc pas défini (donc ni continu) aux points où se trouve un courant filiforme.

\vec{B}
 I
 M

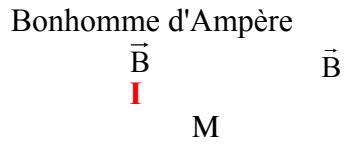
En pratique, la loi de Biot & Savart est très difficile à appliquer. Pour essayer de calculer de manière indirecte le champ magnétique, on utilise l'analogie avec le champ électrostatique \vec{E} qui consiste à considérer les propriétés de symétrie et d'invariance que l'on va énumérer.

 Π''

1. La direction du champ magnétique en M est celle de la droite orthogonale à un plan Π de symétrie pour la distribution de courants et passant par M .
2. Le vecteur champ magnétique en M est inclus dans tout plan d'antisymétrie Π' pour la distribution de courants et passant par M .
3. La direction du champ magnétique en un point M est celle de la droite intersection d'au moins deux plans d'antisymétrie (Π' et Π'') pour la distribution de courants et passant par M .



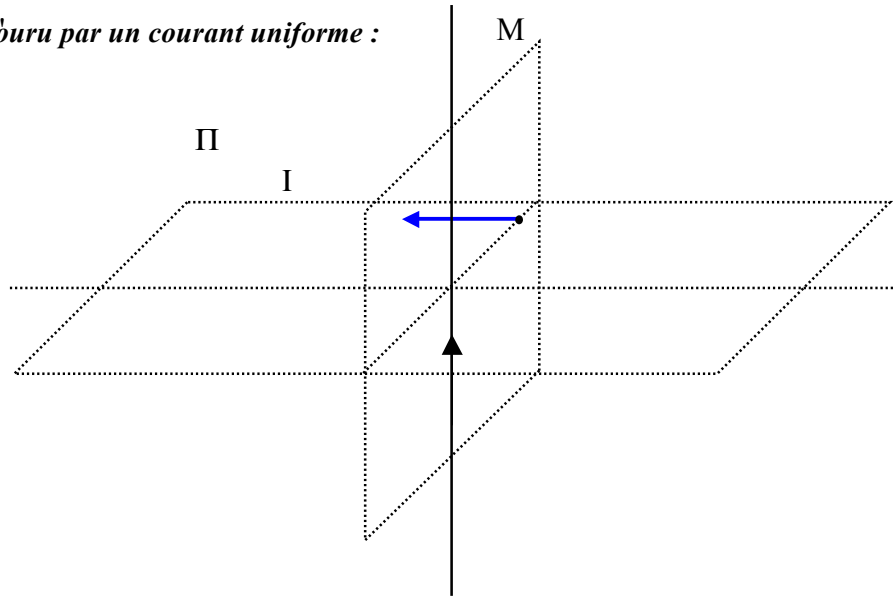
4. Si une distribution de courant reste invariante par une translation ou par une rotation, alors la valeur B du champ magnétique en tout point M ne dépend pas de la coordonnée correspondante à cette translation ou rotation.



Electromagnétisme

Exer.

à parcourir par un courant uniforme :

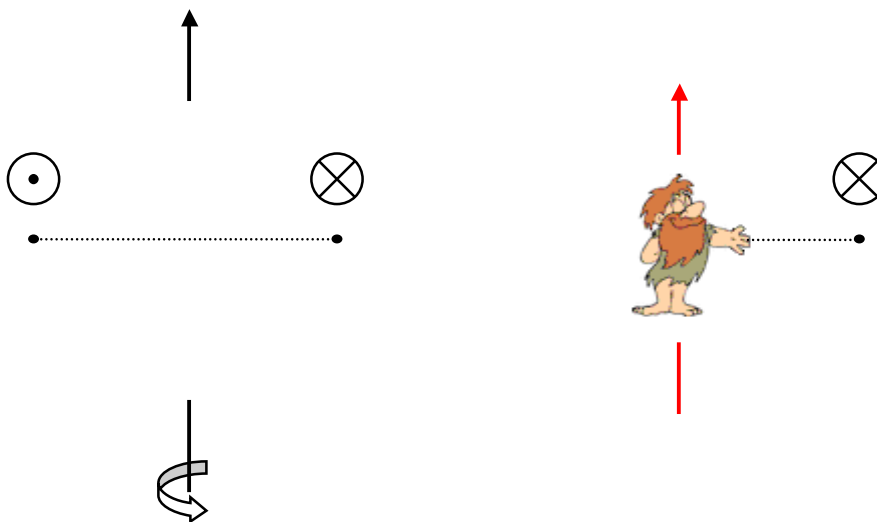


En coordonnées cylindriques :

- Π est un plan de symétrie {le champ est orthogonal à ce plan en M}
- Π' est un plan d'antisymétrie {le champ appartient à ce plan en M}
- Invariance selon (Oz) { $B(r,\theta,z) = B(r,\theta)$ }
- Invariance selon θ { $B(r,\theta) = B(r)$ }

$$r = HM$$

Pour définir le sens du champ magnétique on utilise la règle du tire bouchon ou la règle du bonhomme d'ampère

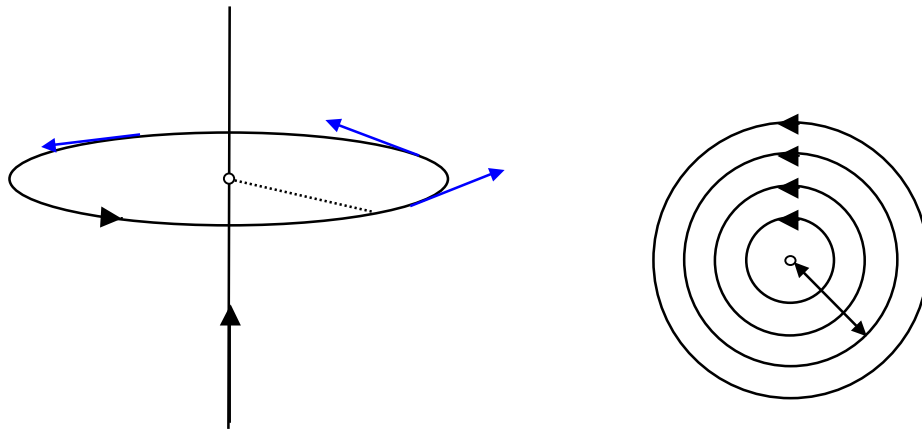


III. Lignes de champ

r_3

Les lignes de champ sont telles qu'en chacun de leurs points M , le champ magnétique \vec{B} leur est tangent.

Exemple du fil infini parcouru par un courant uniforme :



$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$$

Comme pour le champ électrostatique, on calcule un flux et une circulation du champ magnétique.

IV. Flux et circulation du champ magnétique.

IV – 1 Flux magnétique

Le flux du champ magnétique \vec{B} à travers une surface S s'écrit :

$$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

où \vec{n} est le vecteur normal à l'élément de surface dS .

Quelques caractéristiques :

- Le flux magnétique à travers toute surface fermée est nul, $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
- Le flux magnétique à travers une surface ouverte S ne dépend que de la ligne fermée Γ sur laquelle la surface s'appuie.

IV – 2 Circulation du champ magnétique

Supposons que les considérations de symétrie et d'invariance ont permis de connaître la topographie du champ magnétique \vec{B} .

En tout point M quelconque de l'espace où l'on cherche le champ magnétique, il passe une ligne de champ connue.

On exprime la circulation C du champ magnétique \vec{B} sur une ligne fermée Γ définie par :

- une ligne de champ si les lignes de champ sont fermées,
- par une portion de ligne de champ complétée par une ligne orthogonale à \vec{B} en chacun de ces points (si les lignes de champ ne sont pas fermées).

Sur une ligne de champ, en notant L la longueur de la ligne de champ considérée et $d\vec{\ell}$ étant un élément de longueur de la ligne (dont le sens dépend du choix de l'orientation de Γ), on obtient :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

$$C = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma} B \cdot d\ell = B \cdot L \quad \text{où la ligne de champ est orientée dans le sens du champ}$$

magnétique \vec{B} (si B est constant sur la ligne de champ).

Si la ligne de champ n'est pas fermée, alors la portion Γ n'appartenant pas à la ligne de champ doit être telle que sa contribution soit nulle à la circulation (par choix préalables \vec{B} et $d\vec{\ell}$ sont orthogonaux)

(voir applications 1 et 2)

V. Théorème d'Ampère.

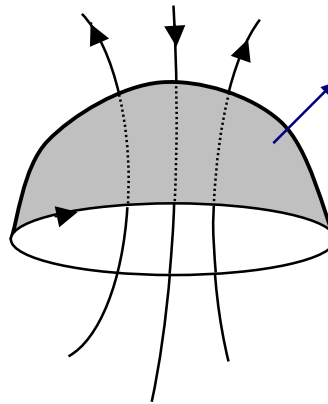
Grâce au calcul de la circulation **le long d'une courbe Γ fermée**, il est possible de déterminer le champ magnétique. Le Théorème d'Ampère relie la circulation C du champ \vec{B} le long du contour Γ et l'intensité I_{alg} (comptée positivement si elle traverse S dans le sens de sa normale) du courant qui traverse toute surface ouverte S s'appuyant sur Γ .

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum (I_{\text{alg}})$$

Exemple

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3)$$

avec I_1, I_2, I_3 positifs



Remarques :

1. Forte analogie avec le Théorème de Gauss et \vec{E} .
2. On peut calculer la direction de \vec{B} par les symétries et les invariances. Pour définir le sens de \vec{B} , on utilise la règle dite du tire bouchon ou du bonhomme d'Ampère.

\vec{n}
 r
 $\vec{B}(r)$
 I

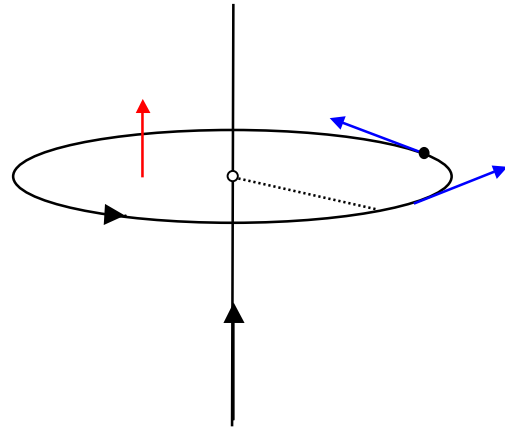
Application 1: Utilisation du théorème d'Ampère

Calculer le champ magnétique créé en un point M quelconque de l'espace par un fil rectiligne infiniment long et défini par l'axe (Oz) en utilisant le théorème d'Ampère.

L'étude déjà effectuée auparavant, a permis de choisir le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) confondu avec le fil. Il a alors été trouvé :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$$

Le champ magnétique étant orthoradial, les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil, et le long d'une ligne de champ, $\|\vec{B}\|$ reste inchangé car r est constant.



Comme la ligne de champ est fermée et que le disque qu'elle délimite est traversée par le fil, on cherche à utiliser le théorème d'Ampère.

On prend la ligne de champ comme contour Γ , vu qu'elle est fermée. On l'oriente positivement de telle manière que \vec{B} et $d\vec{\ell}$ soient dans le même sens. La surface la plus simple s'appuyant sur ce cercle est un disque, pour lequel on a tracé la normale \vec{n} , conforme à l'orientation choisie pour Γ .

La circulation du champ magnétique s'écrit alors :

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma} B \vec{u}_\theta \cdot d\ell \vec{u}_\theta = \int_{\Gamma} B d\ell = B \int_{\Gamma} d\ell = 2\pi r B$$

D'autre part, l'intensité I traverse le disque dans le sens de la normale \vec{n} , donc doit être comptée positivement.

Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B = \mu_0 \cdot (I), \text{ soit } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ et finalement, } \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Application 2: Solénoïde infini r_1

R

Z

On montre, (voir exercice n°5 Série n°6) en utilisant la loi de Biot & Savart, que le champ magnétique créé par un solénoïde infini cylindrique (de section circulaire) en tout point M de son axe de révolution (Oz) vaut :

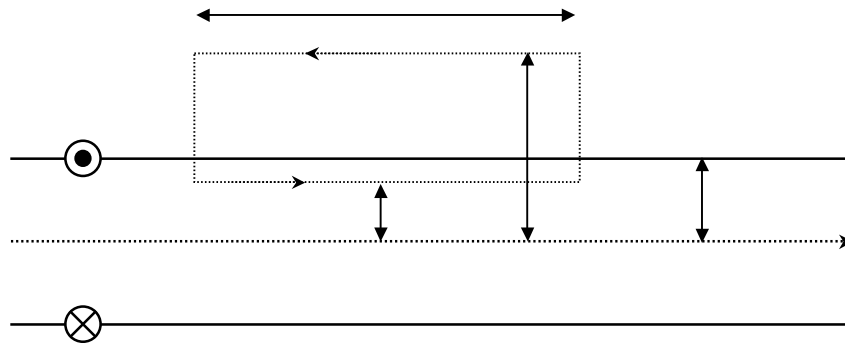
$$B = \mu_0 n I \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \mu_0 n I \cdot \vec{u}_z$$

Avec n : le nombre de spires par mètre.

Le champ est alors indépendant du rayon du solénoïde.

Pour tout point M de l'espace, le système est invariant par translation le long de l'axe (Oz) et par rotation autour de ce même axe (Oz). De plus le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) et passant par le point M est un plan de symétrie : le champ magnétique au point M est donc perpendiculaire à ce plan. $\vec{B}(r, \theta, z) = B(r) \vec{u}_z$

Le lignes de champ sont donc des cylindres centrés sur l'axe (Oz) ($r = \text{constante}$).



Appliquons le théorème d'Ampère :

Soit un contour C fermé contenu dans un plan contenant l'axe (Oz) et constitué de deux parallèles à (Oz) distantes respectivement de r_1 et r_2 de l'axe, et de deux perpendiculaires à (Oz).

Les contributions des deux perpendiculaires à (Oz) à la circulation du champ magnétique le long de ce contour sont nulles : le champ est perpendiculaire aux déplacements élémentaires.

En notant ℓ , la longueur des parallèles à (Oz), on obtient :

$$\oint_{\text{MCC}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = B(r_1) \ell - B(r_2) \ell = \mu_0 I_{\text{alg}}$$

On distingue les trois cas suivants :

Si $r_1 < r_2 < R$, $I_{\text{alg}} = 0$ et on en déduit que $B(r_1) = B(r_2)$

Le champ créé à l'intérieur d'un solénoïde infini ne dépend pas de r : il est donc uniforme. On le note B_{int} .

Si $R < r_1 < r_2$, $I_{\text{alg}} = 0$ et on en déduit que $B(r_1) = B(r_2)$

Le champ créé à l'extérieur d'un solénoïde infini ne dépend pas de r : il est donc uniforme. On le note B_{ext} .

Si $r_1 < R < r_2$, $I_{\text{alg}} = n.I.\ell$ compté positivement vu le sens de parcours choisi (qui détermine la normale à la surface). Le champ magnétique est orienté dans le sens de \vec{u}_z .

$$B(r_1)\ell - B(r_2)\ell = (B_{\text{int}} - B_{\text{ext}}).\ell = \mu_0.n.I.\ell \quad B_{\text{int}} - B_{\text{ext}} = \mu_0.n.I$$

Dans le cas d'un solénoïde de section circulaire, on a calculé la valeur du champ sur l'axe et on peut écrire :

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n I$$

On en déduit donc

$$B_{\text{ext}} = 0$$

Le champ magnétique est donc nul à l'extérieur d'un solénoïde infini.

Par analogie avec l'exercice 3 de la Série 5, on peut également considérer que le solénoïde est une bobine torique de rayon infini.

VI. Force de Lorentz.

La force de Lorentz généralisée, c'est la force qu'exerce un champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}) sur une charge q (électrique). Il existe des effets dus à \vec{E} et à \vec{B} .

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

avec

\vec{f}	force de Lorentz en Newton [N]
q	charge en Coulomb [C]
\vec{B}	champ magnétique en Tesla [T]
\vec{E}	champ électrostatique ($V.m^{-1}$ ou $N.C^{-1}$)
\vec{v}	vitesse [$m.s^{-1}$]

Dans les études, on négligera l'action du poids dont le module reste très faible devant celui de toute force électromagnétique (électrique ou magnétique).

Une particule plongée dans un champ électrostatique uniforme décrit une trajectoire parabolique si la vitesse initiale et le champ électrostatique ne sont pas colinéaires, une droite décrite de manière uniformément accélérée dans le cas contraire.

(Utilisation du principe fondamental de la dynamique – TD mécanique)

La vitesse v de la particule chargée varie au cours de son déplacement, car celui-ci s'effectue dans le champ d'énergie potentielle $E_p = qV$.

Le mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire s'effectue à vitesse v constante.

Le champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}) exerce sur une particule de charge q et possédant une vitesse \vec{v} la force de Lorentz. Si la particule a une vitesse, alors, il existe une densité de courant, \vec{j} , décrite par :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \textit{loi d'Ohm locale}$$

avec

\vec{E} champ électrostatique ($V.m^{-1}$ ou $N.C^{-1}$)

\vec{j} densité de courant [SI]

γ coefficient de conductivité du conducteur (dépend du milieu et de la T°)
l'unité est le Siemens

$\frac{1}{\gamma}$ résistivité en Ohm.mètre ($\Omega.m$)

Le vecteur densité de courant \vec{j} est défini par $\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m\vec{v}$, où $nq = \rho_m$ est la densité volumique de charges des porteurs mobiles de vitesse \vec{v} .

Si S est une section du conducteur traversée par I , la densité de courant \vec{j} est liée à l'intensité I du courant par la relation :

$$I = \int_S di = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

L'intensité I du courant s'exprime en ampère (A)

La loi d'Ohm globale définit, en régime stationnaire, la résistance R d'un conducteur de section S entre les points A et B par la relation :

$$R = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}}$$

Remarque :

Pour un barreau cylindrique de longueur ℓ , de conductivité γ et de section S :

$$R = \frac{\rho \ell}{S} \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{\gamma} \quad (\text{résistivité du barreau})$$

VII. Force de Laplace.

Soit un circuit filiforme parcouru par une intensité I .

Si il existe un champ magnétique \vec{B} , la force de Laplace \vec{F}_l est la force subie par un conducteur parcouru par un courant électrique sous l'action du champ magnétique \vec{B} dans lequel il est plongé :

$$d\vec{F}_l = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

On introduit alors la densité volumique de la force de Laplace :

$$\frac{d\vec{F}_l}{dt} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

VIII. Définition Légale de l'Ampère.

Elle est basée sur l'interaction entre deux fils conducteurs infinis et parallèles. D'après le calcul effectué plus haut, le fil 1 crée un champ magnétique

$$\vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

en notant r la distance du point M au fil rectiligne et en utilisant les coordonnées cylindriques.

Une longueur ℓ du fil 2 subit donc une force magnétique :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = I_2 \ell \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \vec{u}_\theta = - \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{\ell}{d} \vec{u}_r$$

La connaissance du module de la force et des distance ℓ et d permet de définir l'unité d'intensité, l'ampère, en faisant circuler le même courant dans les deux fils. On obtient :

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, infinis et parallèles, de section circulaire négligeable et distants de 1 m, produit une force d'interaction entre ces deux conducteurs égale à 2.10^{-7} N par mètre de conducteurs.

On fixe en même temps la constante μ_0 ou valeur de la perméabilité du vide à $4\pi.10^{-7}$ H.m⁻¹.



CHAPITRE 7 : Mouvements de particules chargées

I. Introduction

C'est dans les grands accélérateurs de particules que des découvertes fondamentales sur la structure de la matière ont été faites : les chocs des particules ont permis de mettre en évidence les quarks dans les années 70. Le but de ce chapitre n'est pas de reprendre une étude des chocs entre particules dans les accélérateurs, mais de comprendre comment les particules chargées se meuvent lorsqu'elles sont plongées dans un champ électromagnétique.

La force de Lorentz, très supérieure au poids, met les particules chargées en mouvement ou modifie leurs mouvements.

A partir d'hypothèses simplificatrices (champs uniformes et stationnaires), ce chapitre permet de comprendre les causes du mouvement des particules chargées.

II. La force de Lorentz

C'est la force qu'exerce un champ électromagnétique sur une charge électrique q . Son expression générale comprend les effets du champ électrique \vec{E} et ceux du champ magnétique \vec{B} .

Le champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}) exerce sur une particule de charge q et possédant une vitesse \vec{v} la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

\vec{f} : force en newton (N)
q : charge en coulomb (C)
\vec{E} : champ électrostatique (V.m^{-1})
\vec{v} : vitesse (m.s^{-1})
\vec{B} : champ magnétique (T)

Pour étudier le comportement des particules chargées sous l'action de cette force, on se place dans le cadre de la mécanique newtonienne, ou classique. Le module de la vitesse des particules reste très petit devant la vitesse de la lumière dans le vide. On appliquera le principe fondamental de la dynamique (PFD) à la particule dans un référentiel galiléen, et en excluant tout changement de référentiel.

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour ce qui est de l'étude du mouvement de particules chargées. En effet, la durée de cette étude n'excède jamais quelques secondes, durée négligeable devant celle caractéristique de rotation de la Terre.

Dans les études suivantes, on négligera ***l'action du poids*** dont le module reste négligeable devant celui de toute force électromagnétique (électrique ou/et magnétique).

III. Champ électrostatique uniforme

La particule chargée est plongée dans un champ électrostatique \vec{E} uniforme et on néglige la pesanteur. Ce mouvement est étudié dans le vide.

III – 1 Equations horaires et trajectoire

On écrit le principe fondamental de la dynamique (PFD) pour la particule chargée de masse m et de charge q :

$$m\vec{a} = \vec{f} = q\vec{E}$$

Soit :

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}.$$

Le mouvement de la particule est uniformément accéléré.

Pour déterminer le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ de la particule, on intègre deux fois l'expression précédente, puisque $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ et $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$:

- $\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0$, où $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ est la vitesse initiale ;
- $\vec{r} = \frac{q\vec{E}}{2m}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$, où $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$ est la position initiale.

Comme la force $\vec{f} = q\vec{E}$ est uniforme, la trajectoire de la particule reste dans le plan $(M_0 ; \vec{f} ; \vec{v}_0)$, où M_0 est le point définissant la position de la particule à l'instant initial.

Pour tracer cette trajectoire plane, on peut changer d'origine du repère et choisir M_0 comme nouvelle origine, puis prendre comme axe (Ox) la direction de \vec{E} : $\vec{E} = E\vec{u}_x$, et enfin faire en sorte que l'axe(Oz) soit orthogonal aux vecteurs $\vec{E} = E\vec{u}_x$ et \vec{v}_0 .

On peut alors projeter la relation vectorielle précédente, avec $\vec{r}_0 = \vec{0}$, $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{u}_x + v_{0y} \vec{u}_y$, et

$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y$, pour obtenir les équations horaires :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{qE}{2m} t^2 + v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t \end{cases}$$

On trouve l'équation de la trajectoire par élimination du temps $\frac{y(t)}{v_{0y}} = t$:

$$x(t) = \frac{qE}{2m v_{0y}^2} y(t)^2 + \frac{v_{0x}}{v_{0y}} y(t)$$

Si $v_{0y} \neq 0$, alors il s'agit d'une parabole : si $v_{0y} = 0$, alors c'est une droite : l'axe (Ox).

Une particule chargée plongée dans un champ électrostatique décrit une trajectoire parabolique si la vitesse initiale et le champ électrostatique ne sont pas colinéaires, une droite décrite de manière uniformément accélérée dans le cas contraire.

III – 2 Etude énergétique

La puissance P de la force de Coulomb vaut : $P = q \vec{E} \cdot \vec{v}$. Elle est non nulle : l'énergie cinétique de la particule chargée change lors de son parcours.

On rappelle que la variation d'énergie cinétique entre deux points M_1 et M_2 du parcours est obtenue en intégrant la puissance précédente :

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

$$\text{Or } P = \vec{f} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right), \text{ soit :}$$

$$\int_1^2 P dt = \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) dt = \int_1^2 d \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\int_1^2 P dt = \int_1^2 \vec{f} \cdot \vec{v} dt = \int_1^2 \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f})$$

$$\int_1^2 P dt = \int_1^2 q \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 q (-\overrightarrow{\text{grad}} V) \cdot d\vec{r} = -q \int_1^2 \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{r} = -q \int_1^2 dV = q(V_1 - V_2)$$

Finalement

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = q(V_1 - V_2)$$

Si la particule se déplace vers les potentiels décroissants ($V_1 > V_2$), sa charge étant positive ($q > 0$), alors la vitesse de la particule augmente, le travail de \vec{f} est positif et le déplacement de la particule est spontané.

On peut aussi écrire :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + qV_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = E_c + E_p = E_m$$

On retrouve le fait que l'énergie mécanique est conservée, vu que la seule force qui travaille est la force de Coulomb, conservatrice et associée à l'énergie potentielle électrostatique :

$E_p = qV$, provenant de

La vitesse v de la particule chargée varie au cours de son déplacement, car celui-ci s'effectue dans le champ d'énergie potentielle $E_p = qV$.

IV. Champ magnétique uniforme

La particule chargée est plongée dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et stationnaire ; on néglige la pesanteur. Il n'y a pas de champ électrostatique. Ce mouvement est étudié dans le vide.

IV – 1 Equations horaires et trajectoire

On choisit le repère de telle façon que le champ magnétique \vec{B} uniforme soit porté par l'axe (Oz) : $\vec{B} = B\vec{u}_z$, avec $B > 0$. La particule se trouvant au point O à l'origine des dates $t = 0$. On choisit la position des axes (Ox) et (Oy) de telle manière que la vitesse initiale $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ soit un vecteur du plan (Oyz).

IV – 1.1 Lois horaires du mouvement

On écrit le principe fondamental pour la particule chargée de masse m et de charge q :

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Exprimons les vecteurs dans la base cartésienne :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} ; \vec{a} \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} ; \vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} ; \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bv_y \\ -Bv_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et donc, en les projetant sur les axes :

- Sur (Ox), $m\frac{dv_x}{dt} = qBv_y$ (1)

- Sur (Oy), $m\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x$ (2)

- Sur (Oz), $m\frac{dv_z}{dt} = 0$ (3)

En dérivant l'équation (1) par rapport au temps et en combinant avec l'équation (2), on obtient l'équation différentielle vérifiée par v_x :

$$m \frac{d^2 v_x}{dt^2} = qB \frac{dv_y}{dt} = - \frac{q^2 B^2}{m} v_x$$

Soit :

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \frac{q^2 B^2}{m^2} v_x = 0$$

De même, en dérivant (2) et en utilisant (1) :

$$m \frac{d^2 v_y}{dt^2} = - qB \frac{dv_x}{dt} = - \frac{q^2 B^2}{m} v_y$$

Soit :

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \frac{q^2 B^2}{m^2} v_y = 0$$

Les deux composantes v_x et v_y , de la vitesse satisfont la même équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre.

En posant $\omega = \frac{qB}{m}$, grandeur homogène à une pulsation et appelée pulsation cyclotron,

les solutions de ces équations s'écrivent :

$$v_x(t) = A \cos(\omega t) + H \sin(\omega t), \quad v_y(t) = D \cos(\omega t) + F \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad v_z(t) = G$$

où A, H, D, F et G sont cinq constantes déterminées à partir des conditions initiales :

$$v_x(t=0) = 0, \quad v_y(t=0) = v_0 \cos(\theta) \quad \text{et} \quad v_z(t=0) = v_0 \sin(\theta)$$

Des équations du mouvement (1) et (2), il vient les deux équations :

$$\frac{dv_x}{dt}(t=0) = \omega v_y(t=0) = \omega v_0 \cos(\theta)$$

$$\frac{dv_y}{dt}(t=0) = - \omega v_x(t=0) = 0$$

En utilisant les lois horaires solutions et les conditions initiales, il vient :

$$A = 0, \quad H = D = v_0 \cos(\theta), \quad F = 0 \quad \text{et} \quad G = v_0 \sin(\theta)$$

Les lois horaires des composantes de la vitesse s'écrivent enfin :

$$v_x(t) = v_0 \cos(\theta) \sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = v_0 \cos(\theta) \cos(\omega t)$$

$$v_z(t) = v_0 \sin(\theta)$$

Il reste à intégrer ces composantes pour obtenir les coordonnées x , y et z de la particule en fonction du temps (lois horaires du mouvement) :

$$\bullet \quad v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos(\theta) \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\theta) \cos(\omega t) + X$$

$$\bullet \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \cos(\theta) \cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\theta) \sin(\omega t) + Y$$

$$\bullet \quad v_z = \frac{dz}{dt} = v_0 \sin(\theta) \quad \rightarrow \quad z(t) = v_0 \sin(\theta) t + Z$$

Où X , Y et Z sont trois nouvelles constantes d'intégration à calculer. Or, à l'instant initial, la particule se trouve à l'origine O du repère, donc :

$$\bullet \quad x(t=0) = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\theta) + X = 0 \quad \rightarrow \quad X = \frac{v_0}{\omega} \cos(\theta)$$

$$\bullet \quad y(t=0) = Y = 0$$

$$\bullet \quad z(t=0) = Z = 0$$

Les lois horaires du mouvement prennent donc la forme suivante :

$$\bullet \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\theta) (1 - \cos(\omega t))$$

$$\bullet \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\theta) \sin(\omega t)$$

$$\bullet \quad z(t) = v_0 \sin(\theta) t$$

IV – 1.2 Trajectoire

Dans la direction de l'axe (Oz), le mouvement est uniforme.

Dans le plan (Oxy), le temps doit être éliminé. Pour ce faire, on utilise les lois horaires et la relation fondamentale de la trigonométrie.

$$\cos(\omega t) = 1 - \frac{\omega x(t)}{v_0 \cos(\theta)}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{\omega y(t)}{v_0 \cos(\theta)}$$

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

$$\left(1 - \frac{\omega x(t)}{v_0 \cos(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\omega y(t)}{v_0 \cos(\theta)}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\omega}{v_0 \cos(\theta)}\right)^2 \left(\frac{v_0 \cos(\theta)}{\omega} - x(t)\right)^2 + \left(\frac{\omega}{v_0 \cos(\theta)}\right)^2 y^2(t) = 1$$

$$\left(x(t) - \frac{v_0 \cos(\theta)}{\omega}\right)^2 + y^2(t) = \left(\frac{v_0 \cos(\theta)}{\omega}\right)^2$$

En projection dans le plan (Oxy), la trajectoire est un cercle de centre C parcouru de manière uniforme avec :

$$x_C = \frac{v_0 \cos(\theta)}{\omega} = \frac{mv_0 \cos(\theta)}{qB} \quad \text{et} \quad y_C = 0$$

En reprenant l'ensemble des résultats, on peut écrire le mouvement de la particule chargée dans l'espace.

Lorsque $\sin(\theta) \neq 0$, la particule chargée décrit une hélice circulaire de pas constant p avec une vitesse angulaire constante $\omega = \frac{qB}{m}$.

Lorsque $\sin(\theta) = 0$, la particule chargée décrit un cercle de manière uniforme dans un plan orthogonal au champ magnétique.

$$\text{Le rayon } R \text{ du cercle est } R = \frac{v_0 \cos(\theta)}{\omega} = \frac{mv_0 \cos(\theta)}{qB}$$

Lorsque $\cos(\theta) = 0$, \vec{B} et \vec{v} sont colinéaires et la force est nulle : la trajectoire est rectiligne uniforme suivant l'axe (Oy).

Compte tenu des équations horaires et du cercle décrit dans le plan (Oxy), on voit que ωt représente physiquement l'angle (\vec{CO}, \vec{OM}) , où M est le point auquel se trouve la particule chargée à l'instant $t > 0$.

Le pas de l'hélice est la distance parcourue le long de l'axe (Oz) lorsque le point M a fait un tour :

$$\text{Pour } \omega t = 2\pi \rightarrow z = p = v_0 \sin(\theta) \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m v_0}{qB} \sin(\theta)$$

Lorsque $\sin(\theta) = 0$, \vec{B} et \vec{v} sont orthogonaux, le pas est nul et on retrouve le fait que la trajectoire soit alors circulaire.

IV – 2 Etude énergétique

La puissance P de la force de Lorentz vaut :

$$P = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

En effet, le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonal à chacun des deux vecteurs qui le constitue, donc à \vec{v} , et le produit scalaire avec \vec{v} est nul.

Par conséquent, la force magnétique ne travaille pas et l'application du théorème de l'énergie cinétique entre deux points M_1 et M_2 de la trajectoire donne :

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{f}) = \int_1^2 P dt = 0 \rightarrow v_2 = v_1$$

Le mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire s'effectue à vitesse v constante.

V. Mise en œuvre

Comment déterminer le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique ?

Soit une particule de masse m et de charge q plongée dans un champ électromagnétique uniforme et stationnaire (\vec{E}, \vec{B}) . Compte tenu des conditions initiales données, déterminer la trajectoire décrite par cette particule.

- ❶ Faire un bilan des forces
- ❷ Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD). Le projeter sur les 3 axes et obtenir l'équation différentielle que satisfait chacune des composantes de la vitesse de la particule.
- ❸ Ecrire la solution générale de chacune des équations différentielles précédentes. Compter les constantes qui sont apparues.
- ❹ Exprimer les conditions initiales. Vérifier qu'il y en a autant que de constantes d'intégration, puis, déterminer les constantes et écrire les lois horaires de chacune des composantes de la vitesse.
- ❺ Intégrer ces composantes pour obtenir les lois horaires de la position de la particule. Les trois constantes sont calculées en utilisant la position initiale.
- ❻ Tracer la trajectoire.

Application

Déterminer la trajectoire décrite par une particule de masse m et de charge $q > 0$ plongée dans un champ électromagnétique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_x$ et $\vec{B} = B\vec{u}_z$, sachant qu'à $t = 0$, elle se trouve à l'origine du repère sans vitesse initiale.

Solution

Le poids est négligeable devant toute force électromagnétique. La seule force qui s'applique est la force de Lorentz généralisée :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Pour projeter cette équation vectorielle sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz), on projette chacun des vecteurs en les exprimant sous forme de "vecteurs colonne" :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}; \vec{a} \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix}; \vec{E} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}; \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bv_y \\ -Bv_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les projections sur les axes s'écrivent alors :

- Sur (Ox), $m\frac{dv_x}{dt} = qBv_y + qE$ (1)

- Sur (Oy), $m\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x$ (2)

- Sur (Oz), $m\frac{dv_z}{dt} = 0$ (3)

En dérivant l'équation (2) et en utilisant l'équation (1), on obtient l'équation différentielle vérifiée par v_y .

$$m\frac{d^2v_y}{dt^2} = -qB\frac{dv_x}{dt} = -qB\left(\frac{qBv_y + qE}{m}\right)$$

Soit :

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y = -\frac{q^2EB}{m^2}$$

De même, en dérivant l'équation (1) et en utilisant l'équation (2), on obtient l'équation différentielle vérifiée par v_x .

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0$$

L'équation (3) est l'équation différentielle satisfaite par v_z .

La solution générale de l'équation (3) est : $v_z = A$, où A est une constante.

L'équation différentielle satisfaite par v_x est du second ordre, linéaire, à coefficients constants, homogène et on en connaît la solution générale :

$$v_x = C\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C'\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \text{ ou } C \text{ et } C' \text{ sont des constantes.}$$

L'équation différentielle satisfaite par v_y est du second ordre, linéaire, à coefficients constants, avec un second membre. Sa solution générale v_y est la somme de la solution générale v_{y1} de l'équation homogène associée et d'une solution particulière v_{y2} .

La solution particulière est choisie de la même forme mathématique que le second membre, c'est-à-dire une constante. On trouve : $v_{y2} = -\frac{E}{B}$

Puis, par analogie avec v_x , on obtient $v_{y1} = D\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + D'\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$

La solution générale pour v_y s'écrit enfin : $v_y = D\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + D'\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{E}{B}$

On dénombre alors cinq constantes A , C , C' , D et D' .

Les conditions initiales portant sur la vitesse sont au nombre de trois :

$$v_x(t=0) = v_y(t=0) = v_z(t=0) = 0$$

Il manque donc deux équations pour pouvoir déterminer toutes les constantes. Comme on a dérivé les équations du mouvement pour obtenir les équations différentielles, les équations manquantes pourront être obtenues à partir des équations du mouvement. Les équations (1) et (2) à l'instant initial :

$$m \frac{dv_x}{dt}(t=0) = qBv_y(t=0) + qE \quad \rightarrow \quad \frac{dv_x}{dt}(t=0) = \frac{qE}{m}$$

$$m \frac{dv_y}{dt}(t=0) = -qBv_x(t=0) \quad \rightarrow \quad \frac{dv_y}{dt}(t=0) = 0$$

Elles fournissent les deux équations supplémentaires et on peut calculer les constantes :

$$v_x(t=0) = 0 \text{ donne } C = 0 \text{ et } \frac{dv_x}{dt}(t=0) = \frac{qE}{m} \text{ donne } C' = \frac{E}{B}$$

$$v_y(t=0) = 0 \text{ donne } D = \frac{E}{B} \text{ et } \frac{dv_y}{dt}(t=0) = 0 \text{ donne } D' = 0$$

$$v_z(t=0) = 0 \text{ donne } A = 0$$

On peut maintenant écrire les lois horaires des composantes de la vitesse :

$$v_x(t) = \frac{E}{B} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$v_y(t) = \frac{E}{B} \left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1 \right)$$

$$v_z(t) = 0$$

Il reste à intégrer les trois composantes de la vitesse

- $\frac{dx}{dt} = v_x(t) = \frac{E}{B} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$ s'intègre en $x(t) = -\frac{mE}{qB^2} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C''$
- $\frac{dy}{dt} = v_y(t) = \frac{E}{B} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{E}{B}$ donne $y(t) = \frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{E}{B}t + D''$
- La primitive de $\frac{dz}{dt} = 0$ est A''

où A'' , B'' et C'' sont trois constantes que l'on détermine en utilisant la position initiale.

A l'instant $t = 0$, le point est à l'origine O du repère, ce qui permet d'obtenir :

$$A'' = 0 \quad C'' = \frac{mE}{qB^2} \quad D'' = 0$$

Les lois horaires de position sont :

- $x(t) = \frac{mE}{qB^2} \left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \right)$
- $y(t) = \frac{mE}{qB^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{E}{B}t$
- $z(t) = 0$

Les équations horaires ne font pas apparaître une trajectoire classique (cercle, ellipse, ...).

On peut tout de même voir qu'elle est plane, car contenue dans le plan (Oxy).

On utilise un tableur pour la tracer et on reconnaît une cycloïde.

