Pourquoi vous enseigne-t-on les mathématiques :

1) pour vous sélectionner

2) pour la construction de votre esprit

- acquérir la logique mathématique
- acquérir la démarche scientifique
- l'intelligence d'un individu se mesure à la largesse de ses connaissances et non à son niveau de spécialisation

3) pour décrire des phénomènes et prédire leurs évolutions

- physique, biologie, informatique, chimie, climatologie,...
- finance, économie, médecine,...
- sociologie, psychologie

Problème :

Vous connaissez parfaitement les fonctions (programme d'Analyse préING 1)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Mais on décrit peu de chose avec des fonctions scalaires d'une variable

Exemples :

- En thermodynamique : l'énergie interne U

$$U(T,P) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

- En électromagnétisme :

$$\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Généralisation aux fonctions de la forme

$$f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Or, comme vous l'avez vu en 1ère année, il faut également étudier la structure des ensembles sur lesquels ces fonctions sont définies

Topologie (ouvert, fermé,...)

Chapitre 2 : Espace Vectoriel Normé

Eléments de topologie dans $\mathbb{R}^n$

(a) de norme et de distance

(b) de boule ouverte et de boule fermée

(c) d'ouvert, de fermé et de compact

(d) et enfin, d'intérieur et d'adhérent

Suites d'éléments d'un EVN

(a) de convergence

(b) de suites extraites et de valeurs d'adhérence

(c) de suite de Cauchy

(d) et enfin, d'espace complet et de Banach

Chapitre 3 : Limite et Applications Continues

(a) de limite

(b) de continuité et de continuité uniforme

Chapitre 4 :

Calcul différentiel du 1er ordre

(a) de dérivées partielles d'ordre 1

(b) de différentiabilité

(c) de classe $\mathcal{C}^1$

(d) équations aux dérivées partielles d'ordre 1

Chapitre 5 : Calcul différentiel d'ordre supérieur

(a) dérivées partielles d'ordre supérieur à 1

(b) classe $\mathcal{C}^k$

(c) équations aux dérivées partielles d'ordre 2

Objectif du cours :

Etudier les fonctions de plusieurs variables

$\Rightarrow$ Généralisation des notions de :

- limites
- continuité
- dérivée
- dérivabilité
- ...

$\Rightarrow$ ouvert, fermé, ….?

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-l| < \epsilon$$

Comment généralise-t-on les notions de norme, de distance, d'ouvert, de fermée,… dans le cas d'un espace vectoriel quelconque ?

Définition 1 : (norme)
Soit E un espace vectoriel. Soit $\|\cdot\|$ une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$. $\|\cdot\|$ est une norme sur E, si, et seulement si, l'application vérifie les 3 propriétés suivantes

1. $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ (séparation)
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (absolue homogénéité)
3. $\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

On dira alors que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (EVN).

Remarque 1 : $1. + 2.$

$$\|0_E\| = \|0 \times 0_E\| = 0 \times \|0_E\| = 0$$

$$x = 0_E \Longrightarrow \|x\| = 0$$

Remarque 2 :

Vous connaissez un exemple de norme dans $\mathbb{R}^3$:

soit $\vec{X} = (x, y, z)$ alors $\left\|\vec{X}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Donnons des exemples de norme sur $E = \mathbb{R}^n$:

Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors, les trois applications suivantes sont des normes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{2.2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} (|x_i|)$$

Remarques :

1) Si $E = \mathbb{R}$, alors $\forall x \in E,\ \|x\|_1 = \|x\|_2 = \|x\|_\infty = |x|$

2) Si $E = \mathbb{R}^3$, alors pour $\vec{X} = (x, y, z)$, $\left\|\vec{X}\right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

→ c'est donc la norme que vous connaissez

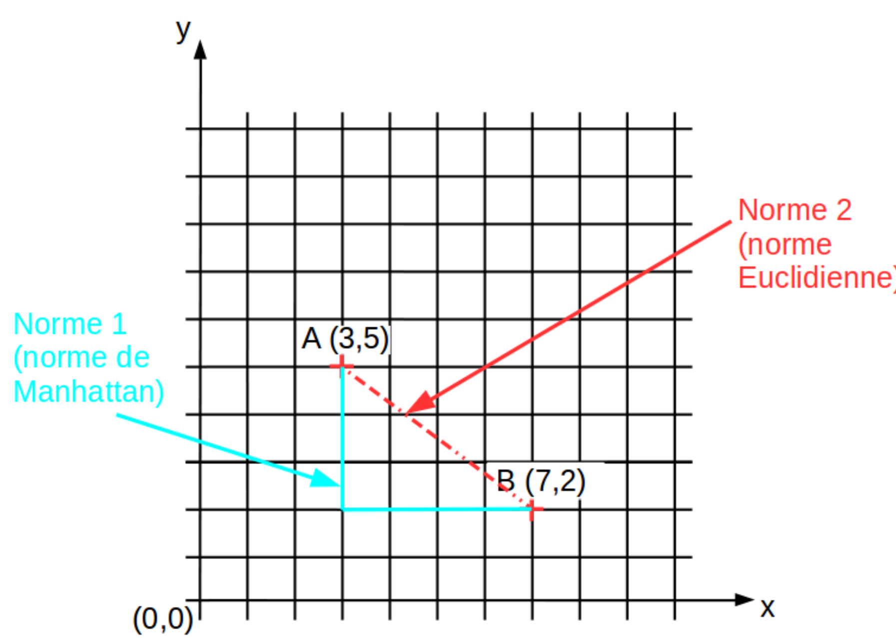
→ on l'appelle norme euclidienne

Donnons des exemples de norme sur $E = \mathbb{R}^n$:
Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors, les trois applications suivantes sont des normes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{2.2}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} (|x_i|)$$

Remarques :

3)



Vérifions par exemple que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Vérification de la 1ère propriété :

$$\|x\|_1 = 0 \Longrightarrow \forall i,\ x_i = 0$$

On voit donc que $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow x = 0_E$

Vérification de la 2ème propriétés :

Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.
Alors

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\, \|x\|_1$$

Vérification de la 3ème propriétés :

Soient $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Alors $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

L'application suivante est-elle une norme ?

$$\begin{array}{rccl} N & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & N(x,y) = |4x+7y| \end{array}$$

NON

si $N(x,y) = 0$ alors $|4x+7y| = 0$

or $|4x+7y| = 0 \implies x = -\frac{7}{4}y$

La 1ère propriété n'est pas vérifiée, donc N n'est pas une norme.

Si $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$: (espace des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$)

Soit f une fonction appartenant à E. Alors les trois normes les plus souvent utilisées sont

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}$$

$$\|f\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1}(|f(x)|)$$

Propriété 1 : (Positivité)

La norme est définie positive : $\forall x,\ \|x\| \geq 0$.

démonstration :
$\forall x \in E,\ 0 = \|0_E\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\,\|x\|$. Donc $\|x\| \geq 0$.

Propriété 2 :

Pour la norme euclidienne : $\forall x, y \in E,\ \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Admis car cela fera l'objet d'une démonstration dans le cours d'algèbre bilinéaire.

ceci n'est en général pas vrai (voir polycopié p.13)

Propriété 3 : (2nd inégalité triangulaire)

$$\forall x, y \in (E, \|\cdot\|),\ \|x-y\| \geq |\, \|x\| - \|y\| \,|$$

démonstration :

$\forall x, y$

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$

$$\Longrightarrow \|x-y\| \geq \|y\| - \|x\|$$

$$\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\|$$

$$\Longrightarrow \|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

On voit donc que

$$\|x-y\| \geq \max(\|y\| - \|x\|\,, \|x\| - \|y\|) = |\, \|x\| - \|y\| \,|$$

Définition 2 : (normes équivalentes)

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$. Alors, on dit que $\|\cdot\|_a$ est équivalent à $\|\cdot\|_b$ si, et seulement si, il existe $\alpha,\ \beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a$$

Cette relation est bien une relation d'équivalence :

1. Réflexivité :

$$\forall x \in E,\ \|x\|_a \leq \|x\|_a \leq \|x\|_a$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|_a$ est équivalent à $\|\cdot\|_a$

2. <u>Symétrie :</u> Si $\|\cdot\|_a$ est équivalent à $\|\cdot\|_b$ alors $\|\cdot\|_b$ est équivalent à $\|\cdot\|_a$.

démonstration :

Considérons que $\|\cdot\|_a$ est équivalent à $\|\cdot\|_b$

$$\Rightarrow \exists \alpha, \beta > 0 \ / \ \forall x \in E,\ \alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a$$

$\alpha > 0$ $\qquad$ $\beta > 0$

$$\|x\|_a \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|_b \qquad \frac{1}{\beta}\|x\|_b \leq \|x\|_a$$

$$\Rightarrow \forall x \in E,\ \frac{1}{\beta}\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|_b$$

donc $\|\cdot\|_b$ est équivalent à $\|\cdot\|_a$

3. Transitif :

$$\text{Montrons que :} \quad \begin{cases} \text{Si } \|\cdot\|_a \text{ équivalent à } \|\cdot\|_b & (1) \\ \text{Si } \|\cdot\|_b \text{ équivalent à } \|\cdot\|_c & (2) \\ \text{Alors } \|\cdot\|_a \text{ équivalent à } \|\cdot\|_c & (3) \end{cases}$$

Démonstration :

$$(1) \Rightarrow \exists \alpha, \beta > 0 \ / \ \forall x \in E, \ \alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a$$

$$(2) \Rightarrow \exists \eta, \gamma > 0 \ / \ \forall x \in E, \ \eta \|x\|_b \leq \|x\|_c \leq \gamma \|x\|_b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|x\|_c \geq \eta \|x\|_b \geq \eta\alpha \|x\|_a \\ \|x\|_c \leq \gamma \|x\|_b \leq \gamma\beta \|x\|_a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \eta\alpha \|x\|_a \leq \|x\|_c \leq \gamma\beta \|x\|_a$$

Réflexif + Transitif + Symétrique = Relation d'équivalence

<u>Théorème 1</u> : (Equivalence des normes)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration : admis.

Ce théorème va être fondamental dans la suite du cours

<u>Définition 3</u> : (Distance)

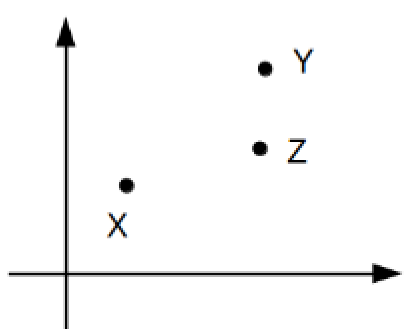
Soit X un ensemble quelconque. L'application d, de $X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, est une distance sur X, si et seulement si, elle vérifie :

1. $\forall (X,Y) \in X^2,\ d(X,Y) = 0 \Longleftrightarrow X = Y$
2. $\forall (X,Y) \in X^2,\ d(X,Y) = d(Y,X)$
3. $\forall (X,Y,Z) \in X^3,\ d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$

1. La seule façon pour que la distance entre deux points soit nulle est que les deux points soient confondus.

2. La distance est symétrique. La distance entre X et Y est la même que la distance entre Y et X.

3.



si je passe par un autre point Z pour aller de X à Y, au mieux je ne réduis pas la distance au pire je fais un détour.

Propriété 4 : (positivité de la distance)

La distance est une application définie positive : $\forall (X,Y) \in X^2,\ d(X,Y) \geq 0.$

Démonstration :

$$\forall (X,Y) \in X^2,\ d(X,X) \leq d(X,Y) + d(Y,X) \Longrightarrow 0 \leq 2d(X,Y)$$

Propriété 5 : (Distance associée à une norme)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Alors, on appelle distance associée à la norme $\|\cdot\|$, l'application d définie par

$$\begin{array}{rcccl} d & : & E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & X, Y & \mapsto & d(X,Y) = \|X - Y\| \end{array}$$

Démonstration qu'il s'agit bien d'une distance : p.17

Propriété 6 :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un EVN et d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$. Alors, d vérifie

$$\forall X, Y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad d(\lambda X, \lambda Y) = |\lambda| d(X, Y)$$

Démonstration :

$$d(\lambda X, \lambda Y) = \|\lambda X - \lambda Y\| = |\lambda|\, \|X - Y\| = |\lambda| d(X, Y)$$

Exemples de distance :

$$\begin{array}{rccl} d\ : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ & (X, Y) & \mapsto & d(X, Y) = \|X - Y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{array}$$

avec $\begin{cases} X = (x_1, x_2) \\ Y = (y_1, y_2) \end{cases}$ distance associée à la norme $\|\cdot\|_2$

Soit E un espace vectoriel quelconque. Soit

$$\begin{array}{rccl} d_0 & : & E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & (X,Y) & \mapsto & d_0(X,Y) = \begin{cases} 0 & \text{si } X = Y \\ 1 & \text{si } X \neq Y \end{cases} \end{array}$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une distance

a) Si $X = Y$ alors $d_0(X,Y) = 0$ par construction.
Si $d_0(X,Y) = 0$ alors $X = Y$

b) d_0 est trivialement symétrique.

c) vérifions si $\forall X, Y, Z,\ d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Y,Z)$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } X = Y = Z, & \text{alors } 0 \leq 0 + 0 \text{ donc OK} \\ \text{Si } X = Y \neq Z, & \text{alors } 0 \leq 1 + 1 \text{ donc OK} \\ \text{Si } X = Z \neq Y, & \text{alors } 1 \leq 0 + 1 \text{ donc OK} \\ \text{Si } X \neq Y = Z, & \text{alors } 1 \leq 1 + 0 \text{ donc OK} \\ \text{Si tous différents,} & \text{alors } 1 \leq 1 + 1 \text{ donc OK} \end{array}$$

cette distance n'est pas associée à une norme: prenons $X \neq Y$ et $\lambda = 3$

$d_0(3X, 3Y) = 1$ puisque $3X \neq 3Y$ $\Rightarrow$ $d_0(3X,3Y) \neq 3d_0(X,Y)$

<u>Définition 4</u> : (Boule ouverte, Boule fermée et Sphère)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. $\forall a \in E$, $\forall r > 0$, on définit :

1. la boule ouverte de centre a et de rayon r, comme l'ensemble des points vérifiants
$$B(a,r) = \{x \in E \ / \ \|x-a\| < r\}$$
2. la boule fermée de centre a et de rayon r, comme l'ensemble des points vérifiants
$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E \ / \ \|x-a\| \leq r\}$$
3. la sphère de centre a et de rayon r, comme l'ensemble des points vérifiants
$$S(a,r) = \{x \in E \ / \ \|x-a\| = r\}$$

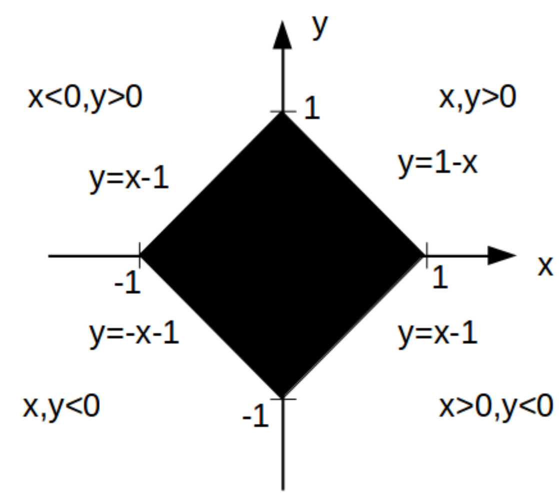
On remarque alors que $\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$

La forme des boules dépend de la norme choisie.

Considérons les boules fermées unitaire de centre $(0,0)$ de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

1. <u>Cas $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$</u> : On cherche les points $X = (x,y)$ tels que $\|X - (0,0)\|_1 \leq 1$

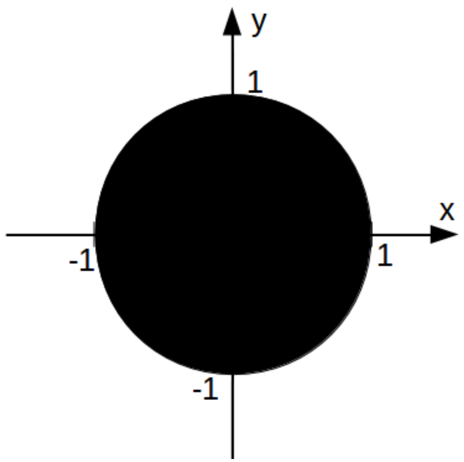
$$\text{Si } x > 0, y > 0, \text{ alors } \|X\|_1 = 1 \iff x + y = 1 \iff y = 1 - x.$$
$$\text{Si } x > 0, y < 0, \text{ alors } \|X\|_1 = 1 \iff x - y = 1 \iff y = x - 1.$$
$$\text{Si } x < 0, y > 0, \text{ alors } \|X\|_1 = 1 \iff -x + y = 1 \iff y = 1 + x.$$
$$\text{Si } x < 0, y < 0, \text{ alors } \|X\|_1 = 1 \iff -x - y = 1 \iff y = -1 - x.$$



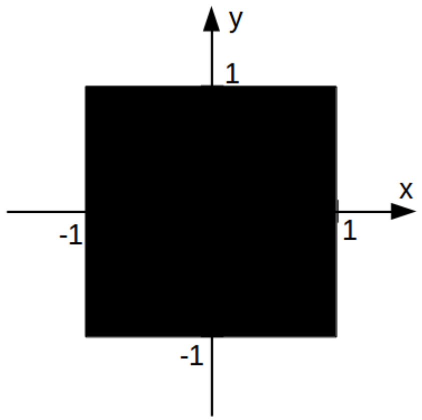
Rappel
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
dans notre cas
$$\|X\|_1 = |x| + |y|$$

2. Cas $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$: On cherche les points $X = (x, y)$ tels que $\|X - (0,0)\|_2 \leq 1$

$$\Rightarrow \quad \|X - (0,0)\|_2 = \|X\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \text{cercle}$$



3. Cas $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$: En exercice



Propriété 7 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Alors, $\forall r, r' > 0$ et $\forall a \in E$:

$$r < r' \iff B(a,r) \subset B(a,r')$$
$$r < r' \iff \overline{B}(a,r) \subset \overline{B}(a,r')$$

Démonstration : On étudie ici seulement la boule ouverte.

$\Longrightarrow$: On a

$$\begin{cases} r < r' \\ x_0 \in B(a,r) \end{cases} \Longrightarrow \|x_0 - a\| < r < r'$$

Finalement $x_0 \in B(a,r')$.

$\Longleftarrow$:

$$B(a,r) \subset B(a,r') \Longrightarrow \text{ il existe } y \begin{cases} \in B(a,r') \\ \notin B(a,r) \end{cases} \quad \text{tel que } r \leq \|y-a\| < r'$$

Définition 5 : (Voisinage)

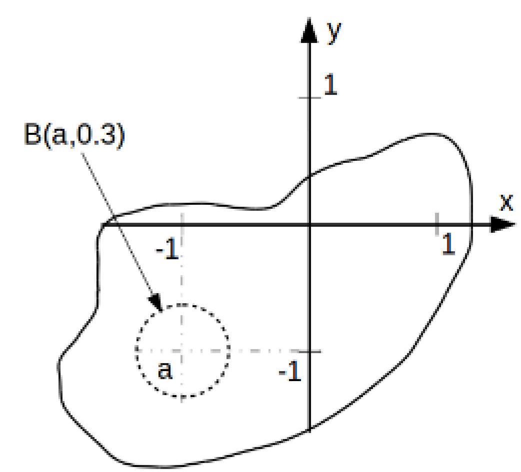
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $a \in E$ et V une partie de E. On dit que V est un voisinage de a, si, et seulement si, V contient au moins une boule ouverte centrée en a et de rayon $r > 0$.

Formulation mathématique :

$$V \text{ voisinage de } a \iff \exists r > 0 \ / B(a, r) \subset V$$

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Représentation dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$



Propriété 8 :

Soit E un EVN de dimension finie munie de plusieurs normes. Soient $a \in E$ et V une partie de E. Alors le fait que V soit voisinage ou non de a ne dépend pas de la norme choisie.

Démonstration :
La démonstration de cette propriété sera discutée en TD.

Propriété 9 :

a est toujours un élément de ses voisinages $(\forall V \in \mathcal{V}(a),\ a \in V)$

Démonstration :

$\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $\exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V$

Or $a \in B(a,r)$ puisque $\|a-a\| = \|0_E\| < r$

Donc $a \in V$ puisque $a \in B(a,r)$ et $B(a,r) \subset V$

Propriété 10 :

Toute réunion de voisinages de a est un voisinage de a.

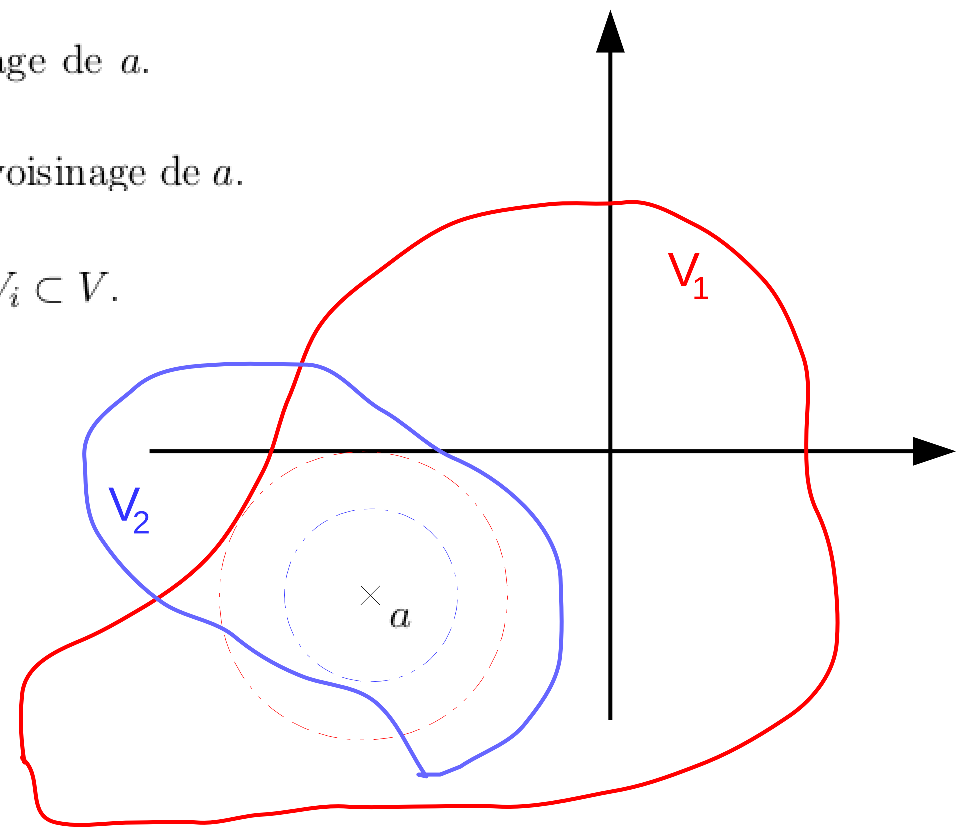
Démonstration :

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille de voisinage de a.

On pose $V = \cup_{i\in I} V_i$ l'union de voisinage de a.

$\forall i \in I, \exists r_i > 0$ tel que $B(a, r) \subset V_i \subset V$.

Donc V est un voisinage de a.



Propriété 11 :

Toute intersection finie de voisinage de a est un voisinage de a.

Démonstration : Rappel : $r < r' \iff B(a,r) \subset B(a,r')$

Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille finie de voisinage de a.

On pose $V = \cap_{i \in I} V_i$ une intersection finie de voisinages de a.

Posons $r = \min\limits_{i \in I}(r_i)$ où r_i est le rayon de la boule ouverte contenue dans V_i.

Comme pour tout i, $r_i > 0$, $r > 0$.

Donc $\forall i$, $B(a,r) \subset B(a,r_i)$, $B(a,r) \subset V$

→ V est bien un voisinage de a puisqu'il contient une boule ouverte.

$V_i =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ une famille de voisinages de 0

→ $V = \cap_{i=1}^{\infty} V_i = \{0\}$ Or $V = \{0\}$ n'est pas un voisinage de 0

<u>Propriété 12</u> :

Toute boule fermée ou ouverte de rayon r et de centre a est un voisinage de a.

Démonstration : Trivial.

<u>Définition 6</u> : (Espace séparé)

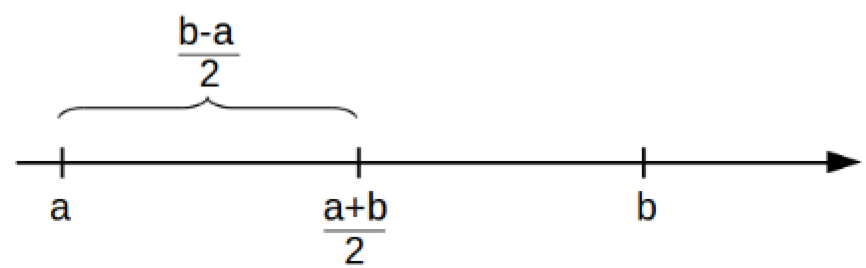
Soit E un ensemble quelconque. On dit que E est séparé si, et seulement si, $\forall a, b \in E$, si $a \neq b$, alors

$$\exists V_a \in \mathcal{V}(a),\ \exists V_b \in \mathcal{V}(b) \text{ tels que } V_a \cap V_b = \emptyset$$

<u>Propriété 13</u> : (EVN séparé)

Tout EVN est un espace séparé.

Démonstration :



Soit $a, b \in E$ tels que $a \neq b$. Introduisons les deux voisinages suivants

$$V_a = B\left(a, \frac{\|b-a\|}{2}\right) \qquad V_b = B\left(b, \frac{\|b-a\|}{2}\right)$$

Soit $x \in V_a \cap V_b$ puisque x appartient aux deux boules

$$\|x-a\| < \frac{\|b-a\|}{2} \qquad \text{et} \qquad \|x-b\| < \frac{\|b-a\|}{2}$$

On peut alors utiliser l'inégalité triangulaire

$$\|a-b\| = \|a-x+x-b\| \leq \|a-x\| + \|x-b\| < \|a-b\|$$

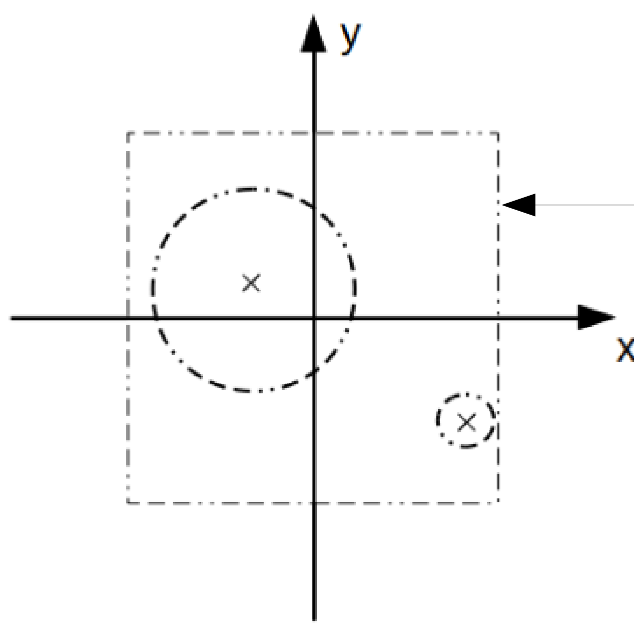
absurde donc $V_a \cap V_b = \emptyset$

<u>Définition 7</u> : (Ouvert)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN et U une partie de E. Alors U est un ouvert, si, et seulement si, il existe pour chaque point de U un voisinage contenu dans U.

Formulation mathématique :

$$U \text{ ouvert } \iff \forall x \in U,\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset U$$



dans la suite, on représentera les contours d'un ouvert avec des pointillés

Propriété 14 :

Soit E un EVN de dimension finie muni de plusieurs normes. Soit U une partie de E. Alors le fait que U soit un ouvert ou non ne dépend pas du choix de la norme.

Démonstration :
La démonstration de cette propriété sera discutée en TD.

Propriété 15 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Alors $\emptyset$ et E sont des ouverts.

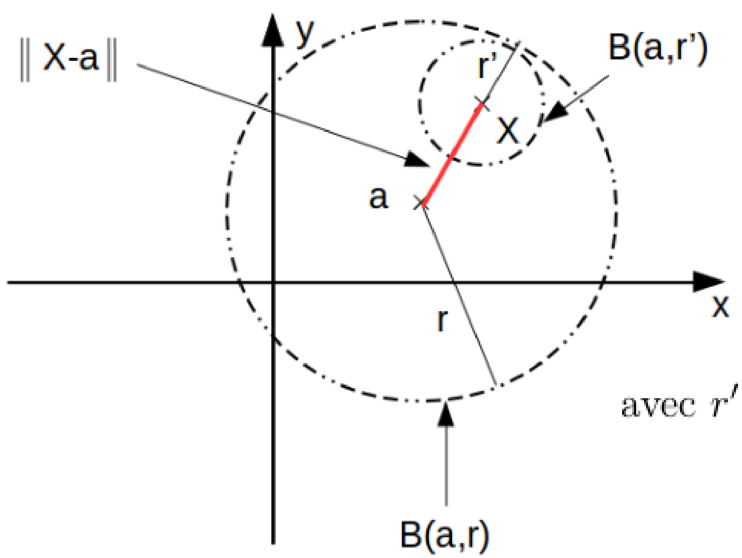
Démonstration :
À ce stade, le fait que $\emptyset$ soit un ouvert est conventionnel. E ouvert : trivial.

Propriété 16 :

Une boule ouverte est un ouvert.

Démonstration :

représentation dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$



Soit la boule ouverte $B(a, r)$.

On introduit au point $X \in B(a, r)$ la boule ouverte $B(X, r' = r - \|X - a\|)$

Alors

$$\forall X \in B(a, r),\ B(X, r') \subset B(a, r)$$

avec $r' > 0$ puisque $r' = r - \|X - a\|$ et $\|X - a\| < r$

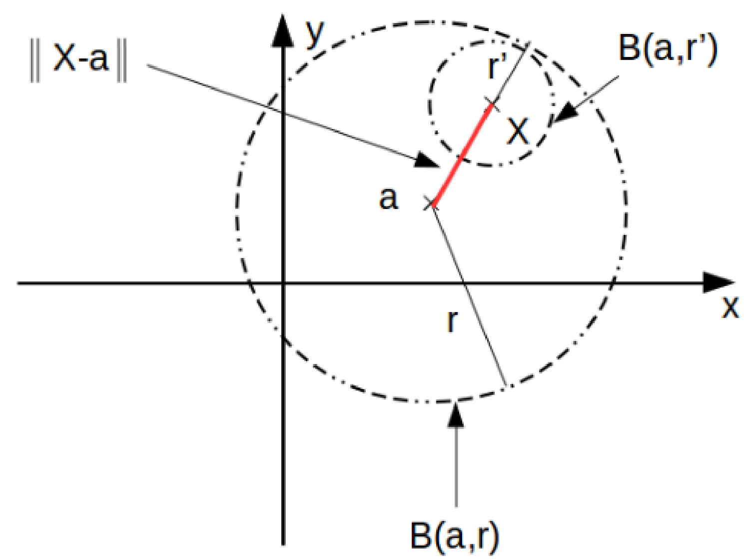
Montrons que cela est vrai pour tout EVN (et pas seulement pour $\mathbb{R}^2$)

Etape 0 : Vérifions que $B(X,r') \subset B(a,r)$ pour $(E, \|\cdot\|)$.

Soit $Y \in B(X,r')$. On peut alors écrire

$$\|Y - X + X - a\| \leq \|Y - X\| + \|X - a\|$$
$$\|Y - a\| < r - \|X - a\| + \|X - a\|$$
$$\|Y - a\| \leq r$$

Donc $B(X,r') \subset B(a,r)$



Etape 1 : Vérifions que $B(X,r') \subset B(a,r)$ pour tout X.

Or pour $\forall X \in B(X,r')$, $r' > 0$ puisque $r' = r - \|X - a\|$ et $\|X - a\| < r$.
Donc $\forall X \in B(a,r)$, $B(X,r') \subset B(a,r)$.

Propriété 17 :

Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :

Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts.

On note $U = \cup_{i\in I} U_i$ l'union.

Soit $x \in U$. Alors $\exists i$ tel que $x \in U_i$.

Or U_i est un ouvert donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i \subset U$.

Or ce raisonnement peut-être fait pour tout x

$\Rightarrow$ donc U est un ouvert.

Propriété 18 :

Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Démonstration :

Soit $(U_i)_{1<i<n}$ une famille finie d'ouverts.

On note $U = \cap_i U_i$ l'intersection de ces ouverts.

$$\text{Soit } x \in U \iff \begin{cases} x \in U_1 & \text{comme } U_1 \text{ est un ouvert, } U_1 \text{ est un voisinage de } x \\ x \in U_2 & \text{comme } U_2 \text{ est un ouvert, } U_2 \text{ est un voisinage de } x \\ \dots & \\ x \in U_n & \text{comme } U_n \text{ est un ouvert, } U_n \text{ est un voisinage de } x \end{cases}$$

Donc x appartient à une intersection finie de voisinage de x qui est donc un voisinage de x. Donc pour tout $x \in U$, U est un voisinage de x donc U est un ouvert.

Corollaire des propriétés précédentes :

Soient $E = \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Alors, les intervalles suivants sont des ouverts

$$]-\infty, b[\qquad]a, b[\qquad]a, +\infty[$$

Démonstration :

$]a, b[= B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$. Or une boule ouverte est un ouvert donc $]a, b[$ est un ouvert.

$]a, \infty[= \cup_{\alpha > a}]a, \alpha[$ union infinie d'ouverts donc ouvert.

$]-\infty, b[= \cup_{\alpha < b}]\alpha, b[$ union infinie d'ouverts donc ouvert.

<u>Définition 8</u> : (Fermé)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN et F une partie de E. Alors F est un fermé si, et seulement si, $C_E F$ (complémentaire de F dans E) est un ouvert.

<u>Propriété 19</u> :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN, alors $\emptyset$ et E sont des fermés.

Donc E et $\emptyset$ sont à la fois des ouverts et des fermés (voir prop. 15).

Démonstration :

Pour $\emptyset$: $C_E\emptyset = E$ qui est un ouvert donc $\emptyset$ est un fermé.

Pour E :

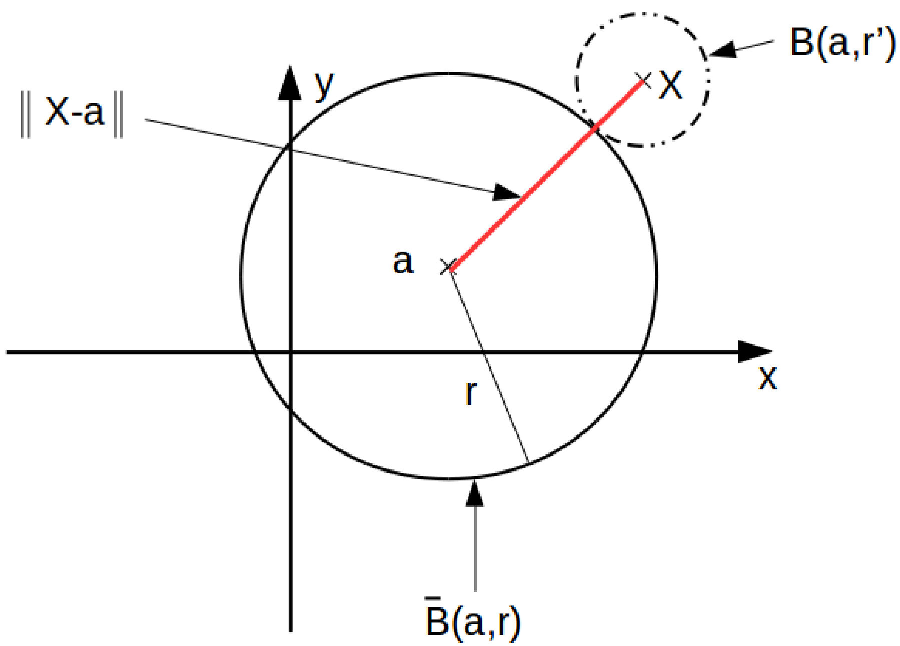
$C_E E = \emptyset$ qui est un ouvert (d'après la propriété 15)

$\Rightarrow$ E est un fermé.

Propriété 20 :

Une boule fermée est un fermé.

Démonstration : Voir le poly



Propriété 21 :

Toute intersection de fermés est un fermé.

Démonstration :

$\boxed{\text{Rappel : } C_E(\cup_i U_i) = \cap_i (C_E U_i)}$

On sait que si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts alors :

1. $U = \cup_i U_i$ est un ouvert (propriété 17).
2. $(C_E U_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés (puisque le complémentaire de $C_E U_i$ est U_i qui est un ouvert).

Puisque U est un ouvert $\Rightarrow$ $C_E U$ est un fermé

et puisque, pour tout i, U_i est un ouvert $\Rightarrow$ $C_E U_i$ est un fermé

Or

$$C_E U = C_E(\cup_i U_i) = \cap_i (C_E U_i)$$

$\Rightarrow$ intersection de fermés est fermé

Propriété 22 :

Toute union finie de fermés est un fermé.

Démonstration :
Même chose que précédemment. En passant au complémentaire c'est immédiat.

Corollaire :

Soient $E = \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. Alors, les intervalles suivants sont des fermés

$$]-\infty, b] \qquad [a, b] \qquad [a, +\infty[$$

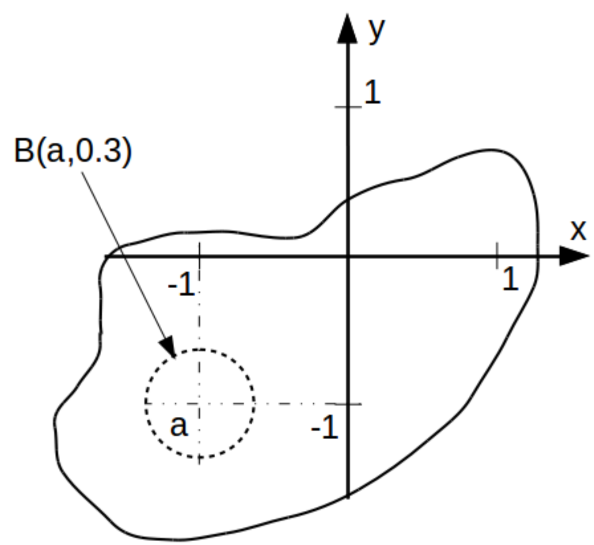
Trivial

Définition 9 : (Intérieur)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est intérieur à A si, et seulement si, A est un voisinage de a. On appelle Intérieur de A, que l'on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.

Formulation mathématique

$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A$$
$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists U \subset A \ / \ U \text{ ouvert et } x \in U$$



Propriété 23 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $\mathring{A}$ l'intérieur de A. Alors $\mathring{A} \subset A$.

Démonstration :

$$x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A \text{ donc } x \in A \text{ donc } \mathring{A} \subset A.$$

Propriété 24 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $\mathring{A}$ l'intérieur de A. Alors $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Démonstration :

voir polycopié p. 32

Propriété 25 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient A et B deux parties de E. Alors

1. A ouvert $\Longleftrightarrow \mathring{A} = A$
2. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$
3. Si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

Démonstration :

1. (a) Si A est un ouvert alors le plus grand ouvert contenu dans A est A lui-même. Donc $\mathring{A} = A$.
   (b) Si $\mathring{A} = A$ alors A est un ouvert puisque $\mathring{A}$ est un ouvert.
2. $\mathring{A}$ est un ouvert. Donc le plus grand ouvert contenu dans $\mathring{A}$ est $\mathring{A}$. Finalement $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
3. Soit $x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset A \subset B$ donc $x \in \mathring{B}$. Finalement $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Quelques exemples :

Dans $\mathbb{R}$:

$$\mathring{\overline{]a,b[}} = \mathring{\overline{[a,b[}} = \mathring{\overline{]a,b]}} = \mathring{\overline{[a,b]}} =]a,b[$$

Dans $\mathbb{R}^n$:

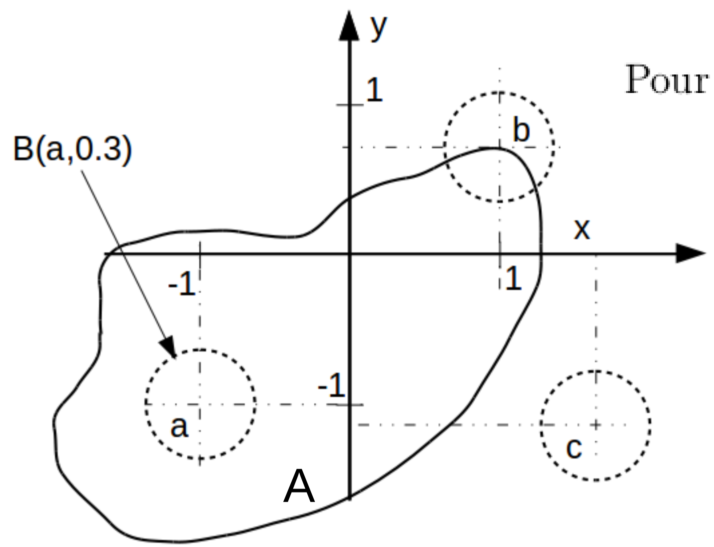
$$\mathring{B}(a,r) = B(a,r) \qquad \mathring{\overline{B}}(a,r) = B(a,r)$$

Définition 10 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est adhérent à A si, et seulement si, tout voisinage de a rencontre A. On appelle l'adhérent de A, noté $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérents à A.

Formulation mathématique :

$$x \in \overline{A} \iff \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$



Pour a : $\begin{cases} a \in \mathring{A} \\ a \in \overline{A} \end{cases}$

Pour b : $\begin{cases} b \notin \mathring{A} \\ b \in \overline{A} \end{cases}$

Pour c : $\begin{cases} c \notin \mathring{A} \\ c \notin \overline{A} \end{cases}$

Ph.D. Elian Masnada

Propriété 26 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit A une partie de E. Alors $A \subset \overline{A}$

Démonstration :

Soit $x \in A$. Alors $\forall r > 0$ $\Rightarrow$ $x \in B(x,r)$ $\Rightarrow$ $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

Donc $x \in \overline{A}$ et finalement $A \subset \overline{A}$.

Propriété 27 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit A une partie de E. Alors $\overline{A}$ est un fermé

Démonstration : Pour cela étudions $C_E\overline{A}$: si c'est un ouvert alors $\overline{A}$ est un fermé.

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall r > 0 \ / \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

Donc pour $\forall x \in C_E\overline{A}$, $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \emptyset$

Donc, $\exists r > 0 \ / B(x,r) \subset C_E\overline{A}$ $\Rightarrow$ $C_E\overline{A}$ est un ouvert.

Propriété 28 :

Admis

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Propriété 29 :

1. A est un fermé si, et seulement si, $\overline{A} = A$
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
3. Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$

1. (a) Si $\overline{A} = A$ alors comme $\overline{A}$ est un fermé alors A est un fermé.
   (b) Si A est un fermé alors le plus petit fermé qui contient A est A. Donc $\overline{A} = A$
2. Soit $\overline{A}$ l'adhérent de A. Donc $\overline{A}$ est un fermé. Donc le plus petit fermé contenant $\overline{A}$ est $\overline{A}$. Finalement $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
3. Soit $a \in \overline{A}$ et V un voisinage de a. On a donc que $A \cap V \neq \emptyset$. Or comme $A \subset B$, on a $A \cap V \subset B \cap V$, il vient que $B \cap V \neq \emptyset$. Finalement $a \in \overline{B}$.

Définition 11 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit A une partie E. On appelle frontière de A, noté $Fr(a)$ ou ∂A, l'ensemble :

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$$

exemple :

$$\begin{cases} \overline{\overline{B}}(a,r) = \overline{B}(a,r) \\ \mathring{\overline{B}}(a,r) = B(a,r) \end{cases} \Rightarrow \partial \overline{B}(a,r) = \overline{B}(a,r) \backslash B(a,r) = S(a,r)$$

Propriété 30 :

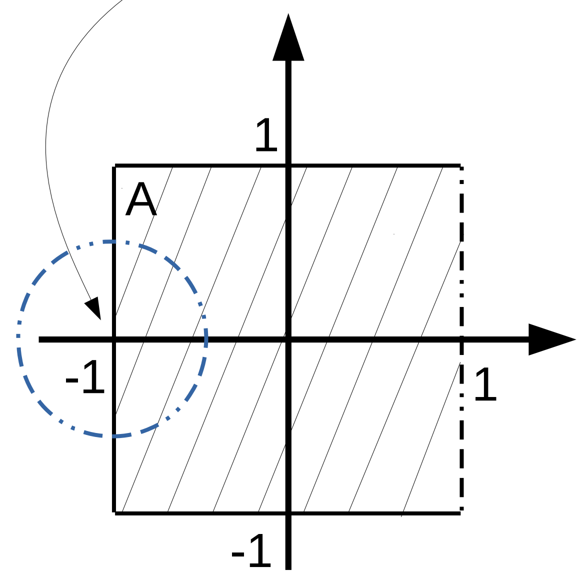
1. $\overline{A} = A \cup \partial A$
2. $\mathring{A} = A \backslash \partial A$

Point méthodologie :

Montrer qu'un ensemble A n'est pas ouvert :

trouver au moins un point (sur la frontière de l'ensemble) tel que quelque soit la taille de la boule ouverte centrée en ce point, une partie de la boule soit en dehors de A

(-1;0)

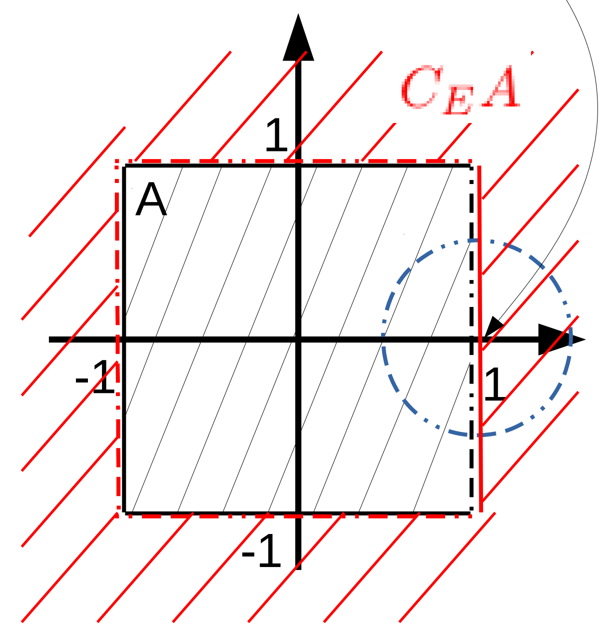


$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x < 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$$

Point méthodologie :

Montrer qu'un ensemble A n'est pas fermé :

trouver au moins un point de $C_E A$ (sur la frontière de l'ensemble) tel que quelque soit la taille de la boule ouverte centrée en ce point, une partie de la boule soit en dehors de $C_E A$



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x < 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$$

Trouver l'intérieur de A : (démonstration dans le TD3)

Etape 0 : Proposer un candidat B

Sachant que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A

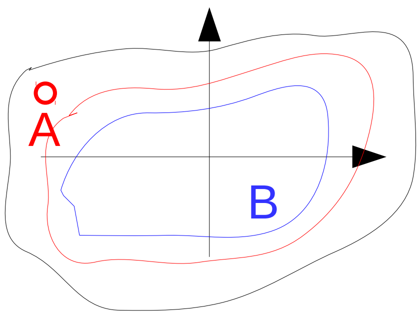
Etape 1 : Vérifier que B est un ouvert

Etape 2 : Vérifier que $B \subset A$

$\forall x \in B, \ \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$

$\iff B \subset \mathring{A}$

Mais B peut être trop petit



Etape 3 : Vérifions que $\mathring{A} \subset B$

On doit vérifier que pour $\forall x \in A \backslash B$

$$\forall r > 0, \ B(x,r) \not\subset A$$

$$\mathring{A} = B$$

Trouver l'adhérent de A : (démonstration dans le TD3)

Etape 0 : Proposer un candidat B

sachant que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A

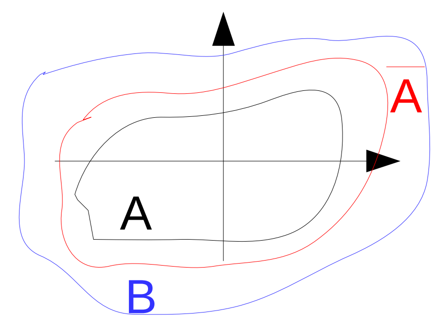
Etape 1 : Vérifier que B est un fermé.
Etape 2 : Vérifier que $A \subset B$.

$\forall x \in C_E B$, on a $\exists r > 0$ / $B(x,r) \cap A = \emptyset$

$\iff \forall x \in B,\ x \in \overline{A}$

$\iff \overline{A} \subset B$

Mais B peut être trop grand



Etape 3 : Vérifions que $B \subset \overline{A}$

On doit vérifier que pour $\forall x \in B \backslash A$:

$\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$\overline{A} = B$

Rappel 1 : (Suite d'éléments de $\mathbb{R}$)

Une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Si x est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ de terme général x_n, on notera la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

exemples :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n = \frac{1}{n} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n = 2.3n \end{array}$$

Rappel 2 : (Suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui converge)

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, elle vérifie le critère suivant :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ |x_n - l| < \epsilon$$

On note alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ cette limite.

<u>Définition 12</u> : (Suite d'éléments d'un EVN)

Soit E un espace vectoriel normé. Une suite d'éléments de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E. Si x est une suite de E de terme général x_n, on notera la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Quelques exemples :

— si $E = \mathbb{R}$, on retombe sur le cas étudié en première année :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n = 2.3n \end{array}$$

— si $E = \mathbb{R}^3$ (cas étudié en analyse dans $\mathbb{R}^n$) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^3 \\ n & \mapsto & \left(\frac{1}{n}; 2n+3; (\frac{3}{2})^n\right) \end{array}$$

<u>Définition 13</u> :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est dite bornée si, et seulement si, la suite numérique réelle $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire si, et seulement si

$$\exists M > 0 \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \|x_n\| \leq M$$

exemple :

Soit $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$:
Considérons la suite

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^3 \\ n & \mapsto & x_n = (2n, -3n, 1/n) \end{array}$$

Alors

$$\|x_n\|_2 = \sqrt{4n^2 + 9n^2 + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc x_n n'est pas borné.

Définition 14 : (Suite convergente)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $l \in E$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E convergence vers l si, et seulement si, elle vérifie l'une des 3 propriétés équivalentes suivantes

1. $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon.$
2. $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ x_n \in B(l, \epsilon).$
3. $\forall V \in \mathcal{V}(l),\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ x_n \in V.$

Les trois formulations sont bien équivalentes : voir polycopié p. 40

Propriété 31 : (Unicité de la limite)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Si une suite d'éléments de E, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge alors elle admet une limite unique l. On note alors cette limite

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

Démonstration :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$.

Par hypothèse, posons $l_1, l_2 \in E$ tels que $l_1 \neq l_2$

d'après la définition de la convergence :

$$\forall V_{l_1} \in \mathcal{V}_{l_1},\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N_1,\ x_n \in V_{l_1}$$
$$\forall V_{l_2} \in \mathcal{V}_{l_1},\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N_2,\ x_n \in V_{l_2}$$

Or un EVN est séparé donc comme $l_1 \neq l_2$, $\exists V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ et $\exists V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

en posant $N = max(N_1, N_2)$: $\forall n \geq N, \begin{cases} x_n \in V_1 \\ x_n \in V_2 \end{cases}$, or $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ donc absurde

Propriété 32 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E, convergentes vers l, $l' \in E$ respectivement. On a alors

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|l\|$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0_E \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + \lambda y_n) = l + \lambda l'$

Remarque : Quelle est la signification de

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|l\|$$

La suite $\|x_n\|$ est une suite d'éléments de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$

Rappel :

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|l\| \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, |\|x_n\| - \|l\|| < \epsilon$$

Propriété 32 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E, convergentes vers l, $l' \in E$ respectivement. On a alors

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|l\|$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0_E \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + \lambda y_n) = l + \lambda l'$

1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon$$

or d'après la 2nd inégalité triangulaire, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$|\,\|x_n\| - \|l\|\,| \leq \|x_n - l\|$, on a donc

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq N,\ |\,\|x_n\| - \|l\|\,| \leq \|x_n - l\| < \epsilon$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|l\|$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0_E \iff \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$

C'est immédiat. En effet,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0_E \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ \|x_n\| < \epsilon$$
$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0_E \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ \|x_n\| < \epsilon$$

C'est donc totalement équivalent.

3. Voir polycopié p.42

Propriété 33 :

Soit $E = (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$. On note

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}\ ,\ \dots\ ,\ (x_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ où les $\left(x_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites d'éléments de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (l_1, l_2, ..., l_p) \text{ avec } l_i = \lim_{n\to\infty} x_n^{(i)}$$

Exemple :
Soit la suite

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^2 \\ n & \mapsto & x_n = (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \end{array}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right) = (1, 0)$$

Définition : (Suite extraite, Rappel)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Soit ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On appelle alors suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou sous-suite extraite) la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$y_n = x_{\phi(n)}$$

exemple :

Soit la suite
$$\begin{array}{rcccl} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & n & \mapsto & x_n = \left(e^{n^2}, n+4\right) \end{array}$$

soit ϕ la fonction
$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & n & \mapsto & \phi(n) = 2n+1 \end{array}$$

Alors la suite extraite $y_n = x_{\phi(n)}$ est la suite donnée par

$$\begin{array}{rcccl} (y_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & n & \mapsto & x_n = \left(e^{(2n+1)^2}, 2n+5\right) \end{array}$$

<u>Propriété 35</u> : (convergence des suites extraites d'une suite convergente)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E convergent vers $l \in E$. Alors toute suite extraite converge également vers l.

Démonstration :

Etape 1 : comme ϕ est une fonction strictement croissante

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(n) \geq n.$$

<u>Rang 0 :</u> $\phi(0) \geq 0$ donc OK

<u>Rang n :</u> vérifions que si la propriété est vraie au rang n alors elle est vrae au rang $n+1$.
Vérifions donc que l'on a bien $\phi(n+1) \geq n+1$.

$$\overbrace{\phi(n+1) > \phi(n)}^{\text{strictement croissante}} \underbrace{\geq n}_{\text{prop. rang n}} \quad \Rightarrow \quad \phi(n+1) \geq n+1$$

Propriété 35 : (convergence des suites extraites d'une suite convergente)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E convergent vers $l \in E$. Alors toute suite extraite converge également vers l.

Démonstration :

Etape 2

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV vers } l \iff \forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon$$

or $\forall n,\ \phi(n) \geq n$ donc

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall\phi(n) \geq n \geq N,\ \left\|x_{\phi(n)} - l\right\| < \epsilon$$

$$\text{donc finalement } \lim_{n\to\infty} x_{\phi(n)} = l$$

<u>Définition 14</u> : (Valeur d'adhérence d'une suite)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $l \in E$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Soit $a \in E$. Alors, on dit que a est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si, et seulement si, l'une des propriétés (équivalentes) suivantes est vérifiés

1. Il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
2. $\forall \epsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ \|x_n - a\| < \epsilon\}$ est infini.
3. $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ x_n \in V\}$ est infini.

Exemple : Soit la suite

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \begin{cases} x_{2n} = 1 \\ x_{2n+1} = -1 \end{cases} \end{array}$$

- Alors, il existe une suite extraite, la suite des n paires, qui converge vers 1. Donc 1 est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Il existe une autre suite extraite, la suite des n impaires, qui converge vers -1.

Propriété 36 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in E$, alors l est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration :

- l est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car il suffit de prendre comme suite extraite, la suite elle-même ($\phi : n \longrightarrow n$).
- Or d'après la propriété 35, toute suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera également vers l.

la réciproque est fausse. Une suite peut n'avoir qu'une valeur d'adhérence est être non convergente.

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{2n} = 2n \\ x_{2n+1} = 1 \end{cases}$

Propriété 37 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. Alors, les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. a est adhérent à A.
2. il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A dont a est une valeur d'adhérence.
3. il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a.

Démonstration : $1 \Longrightarrow 3$:

soit a un point adhérent à A.

$$\text{Alors, } \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$$

Soit $x_n \in A \cap B(a, 1/n)$. Alors puisque $x_n \in B(a, 1/n)$

$$\|x_n - a\| < \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Propriété 37 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. Alors, les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. a est adhérent à A.
2. il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A dont a est une valeur d'adhérence.
3. il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a.

Démonstration : $3 \Longrightarrow 1$:

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers a.

Soit V un voisinage de a.

Alors, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $x_n \in V$.

Or $x_n \in A$ puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A.

$\Longrightarrow$ $x_n \in A \cap V$ $\Longrightarrow$ $A \cap V \neq \emptyset$.

vrai pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ $\Longrightarrow$ $a \in \overline{A}$

Propriété 37 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. Alors, les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. a est adhérent à A.
2. il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A dont a est une valeur d'adhérence.
3. il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a.

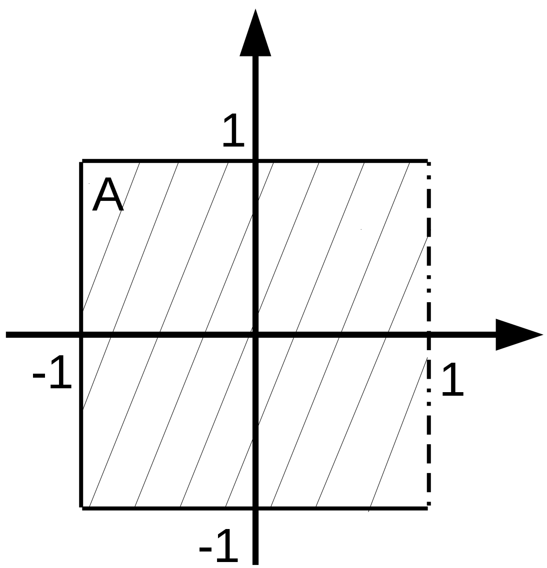
Démonstration :

$2 \Longrightarrow 3$: On choisit comme suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite qui converge vers a.

$3 \Longrightarrow 2$: Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A converge vers a alors a est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Finalement $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$

exemple



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leq x < 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$$

Considérons le point $a = (0,1)$:

1. Clairement $a \in \overline{A}$

2. Prenons la suite d'éléments de A

$$\begin{array}{rccl} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & n & \mapsto & x_n = \left(0 \ ; \ 1 - \frac{1}{n}\right) \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (0,1)$$

Propriété 38 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soient $A \subset E$ et $a \in E$. Alors

1. $\overline{A}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites d'éléments de A, ou dit autrement, l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes d'éléments de A.
2. A est fermé si, et seulement si, toute suite convergence d'éléments de A admet une limite dans A.

Démonstration :

1. $a \in \overline{A} \iff$ il existe une suite d'éléments de A qui converge vers A

$\Rightarrow$ $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites de A

2. $\Longrightarrow$: Si A fermé alors $\overline{A} = A$.

Or $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites des éléments de A.

Donc si A fermé, l'ensemble des suites convergentes de A converge dans A.

$\Longleftarrow$: la réciproque est tout aussi évidente.

Définition 15 : (Suite de Cauchy)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ (\forall n \geq N, \forall p \geq N), \|x_p - x_n\| < \epsilon$$

Rappel du critère de convergence

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon$$

Propriété 39 :

1. Toute suite convergente est de Cauchy
2. Toute suite de Cauchy est bornée

Démonstration : voir polycopié p.48

Propriété 40 :

Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors elle converge vers sa valeur d'adhérence.

Démonstration : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E.

Soit a une valeur d'adhérence de la suite.

Alors :

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_c \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_c$, et $p \geq N_c$,

$$\|x_n - x_p\| < \epsilon/2$$

Soit $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite qui converge vers a.

Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$\left\|x_{\phi(n)} - a\right\| < \epsilon/2$$

On note $N = max(N_c, N_1)$ Pour tout $n \geq N$, on a $\phi(n) \geq n \geq N \geq N_c$.

D'où

$$\|x_n - a\| \leq \left\|x_n - x_{\phi(n)}\right\| + \left\|x_{\phi(n)} - a\right\| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} / \ \forall n \geq N, \ \|x_n - a\| < \epsilon$$

Remarque :

Intuitivement : une suite de Cauchy converge

MAIS elle peut converger en dehors de l'EVN sur lequel elle est définie.

Pour le comprendre, étudions la suite suivante (suite de Héron)

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \text{ avec } x_0 = 2$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

les x_n sont des rationnels

et $x_n > 0$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \text{ avec } x_0 = 2$$

Déterminons le pont de convergence de cette suite :

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{x_n^2 + 2}{2x_n}\right)^2 - 2 = \frac{x_n^4 + 2^2 + 2 \times 2x_n^2}{4x_n^2} - 2 = \left(\frac{x_n^2 - 2}{2x_n}\right)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ $x_n \geq \sqrt{2}$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n}$$

or puisque $x_n \geq \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $2 - x_n^2 \leq 0$ $\Rightarrow$ $x_{n+1} \leq x_n$

la suite est décroissante et positive ce qui implique qu'elle converge

Donc puisque la limite existe, notons la l.

On a donc

$$l = \frac{l + \frac{2}{l}}{2} \Longrightarrow l = \sqrt{2}$$

La suite est définie sur $\mathbb{Q}$

MAIS

elle converge vers un irrationnel

<u>Définition 16</u> : (Espace complet, Espace de Banach)

1. Un espace métrique (c'est-à-dire un espace muni d'une distance) est dit complet si, et seulement si, toute suite de Cauchy définie sur cet espace y converge.
2. Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach

<u>Théorème 1</u> : (de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée d'un espace vectoriel de dimension finie possède une suite extraite convergente.

Démonstration : Admis.

<u>Définition 17</u> : (Compacité)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. Soit $A \subset E$. On dit que A est compact dans E si et seulement si toute suite de A admet une suite extraite convergente dans A.

Exemple :

considérons la suite $\quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \; : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n = n \end{array}$

cette suite ne converge pas et aucune suite extraite d'elle ne converge.

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ est un ensemble non compact.

Propriété 41 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN de dimension finie. Alors

1. compact $\iff$ fermé et borné
2. l'ensemble vide est compact.
3. toute partie fermée d'un compact de E est compacte

Démonstration :

1. (a) Montrons tout d'abord que : compact $\Longrightarrow$ fermé et borné.

compact $\Longrightarrow$ fermé :

A compact donc de toute suite x_n, on peut extraire une suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers $l \in A$.

Or, si la suite x_n converge, elle converge nécessairement vers l.

Donc toute suite convergente d'éléments de A converge dans A

$\Rightarrow$ fermé

<u>Propriété 41</u> :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN de dimension finie. Alors

1. compact $\Longleftrightarrow$ fermé et borné
2. l'ensemble vide est compact.
3. toute partie fermée d'un compact de E est compacte

Démonstration :

1. (a) Montrons tout d'abord que : compact $\Longrightarrow$ fermé et borné.

<u>compact $\Longrightarrow$ borné :</u> Pour cela prenons la contraposé

non borné $\Longrightarrow$ non compact

Si l'ensemble A n'est pas borné, alors on peut prendre une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \geq n.$$

On en déduit donc que toute suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donc A n'est pas compact.

Propriété 41 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN de dimension finie. Alors

1. compact $\Longleftrightarrow$ fermé et borné
2. l'ensemble vide est compact.
3. toute partie fermée d'un compact de E est compacte

Démonstration :

(b) Montrons maintenant que borné, fermé $\Longrightarrow$ compact :

Soit A un ensemble borné d'un EVN de dimension finie
Alors toute suite de A est bornée.

Bolzano-Weiestrass $\Rightarrow$ toute suite de A admet donc une suite extraite qui converge

Or A est fermé donc $\overline{A} = A$

$\Rightarrow$ toute suite de A admet donc une suite extraite qui converge dans A

Propriété 41 :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN de dimension finie. Alors

1. compact $\iff$ fermé et borné
2. l'ensemble vide est compact.
3. toute partie fermée d'un compact de E est compacte

Démonstration :

2. l'ensemble vide est fermé et borné donc c'est un compact.

3. A compact $\Longrightarrow$ A fermé et borné. Soit $B \subset A$ un fermé. Alors B est également borné (puisque A borné). Donc B est un compact.

Propriété 42 :

Tout compact d'un espace vectoriel normé est complet.

Démonstration :

Rappel pour la démonstration :

1. complet : toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A.
2. toute suite convergente est de Cauchy
3. toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge

A est un compact donc toute suite x_n d'éléments de A admet une suite extraite $x_{\phi(n)}$ qui converge dans A.

Or si x_n est une suite de Cauchy,

elle admet une valeur d'adhérence dans A et converge donc vers cette valeur

$\Rightarrow$ toute suite de Cauchy de A converge dans A

Propriété 43 :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ deux compacts. Alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$.

Démonstration technique

but de ce chapitre

généraliser les notions $\begin{cases} \text{de limite de fonctions } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{de continuité de fonctions } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

aux fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Rappels de préING 1 :

Limite :

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Alors la limite l de f quand x tend vers a est

$$\forall \epsilon,\ \exists \alpha > 0,\ (\forall x \in D,\ |x-a| < \alpha) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

ce que l'on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Si a appartient au domaine de définition de la fonction alors

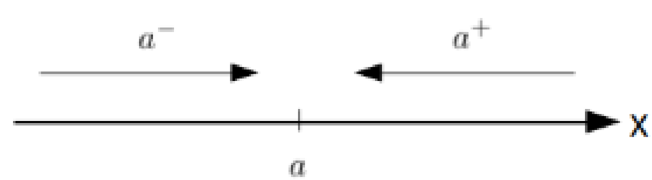
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Rappels de préING 1 :

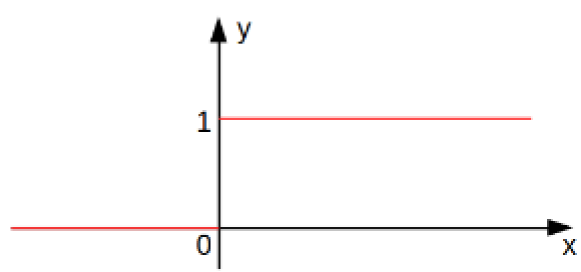
Continuité :

Pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit continue en a, il faut et il suffit que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$



Exemple : **fonction de Heaviside**



$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2-1}{x} \; ; \; \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \end{array}$$

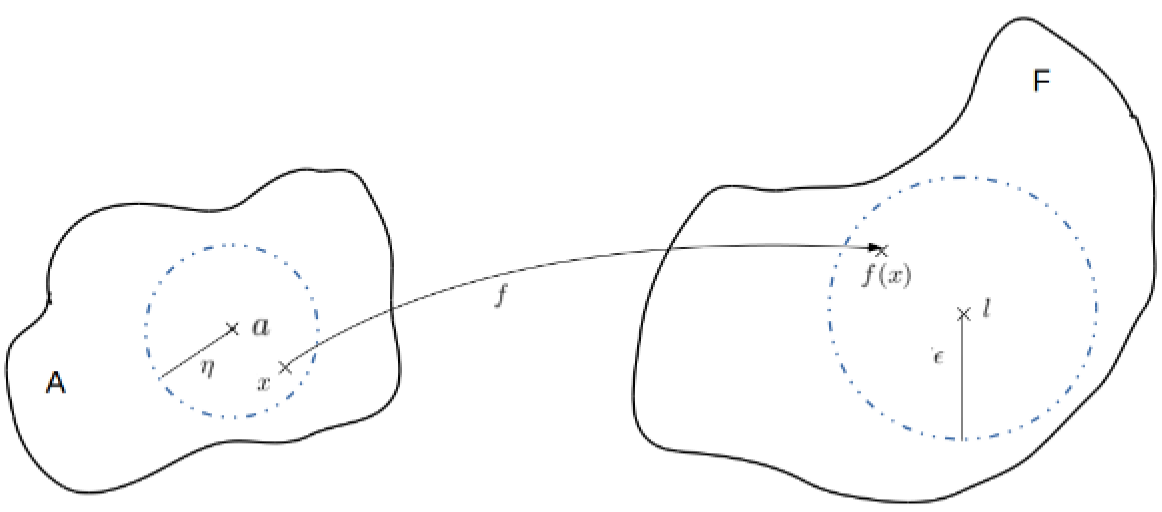
Limite ? Continuité ?

Définition 1 : (limite d'une fonction en un point)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soit $A \subset E$. Soit f une application de A dans F. Soient $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. On dit que f admet une limite l lorsque x tend vers a, si et seulement si, l'une des propriétés (équivalentes) suivantes est vérifiée

1. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A, \|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\|_F < \epsilon$

2. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A, x \in B_E(a, \eta) \Longrightarrow f(x) \in B_F(l, \epsilon)$



Si f est définie en a, alors la limite est $f(a)$.

Exemple :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

en $a = (1,1)$ ⟹ $f(a) = f(1,1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = f(1,1) = \frac{1}{2}$$

en $a = (0,0)$ ⟹ forme indeterminée $0/0$

techniques ???

Propriété 1 : (unicité de la limite)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soit $A \subset E$. Soit f une application de A dans F. Soit $a \in \overline{A}$. Si f admet une limite $l \in F$ en a alors elle est unique.

On note alors cette limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Supposons que f possède deux limites l et l' telles que $l \neq l'$.

Posons alors

$$\epsilon = \frac{1}{3} \|l - l'\|_F > 0.$$

Alors, il existe $\eta, \eta' > 0$ tels que

$$\begin{cases} \forall x \in A, \ \|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\|_F < \epsilon \\ \forall x \in A, \ \|x - a\|_E < \eta' \Longrightarrow \|f(x) - l'\|_F < \epsilon' \end{cases}$$

Prenons $\|x - a\|_E < \min(\eta, \eta')$.

$\Rightarrow$ $\|f(x) - l\| < \epsilon$ et $\|f(x) - l'\| < \epsilon'$

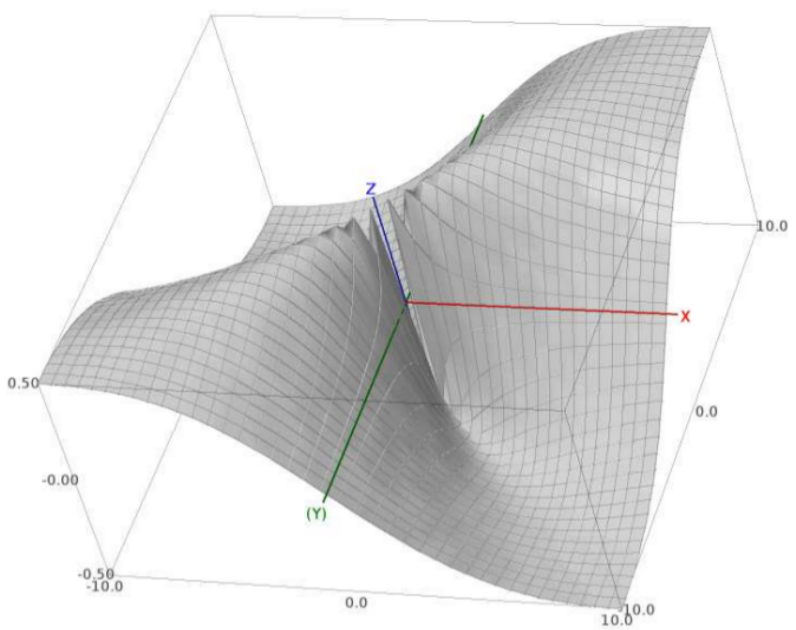
$$3\epsilon = \|l - l'\|_F = \|l - f(x) + f(x) - l'\|_F \leq \|l - f(x)\|_F + \|f(x) - l'\|_F < 2\epsilon$$

Donc $l = l'$.

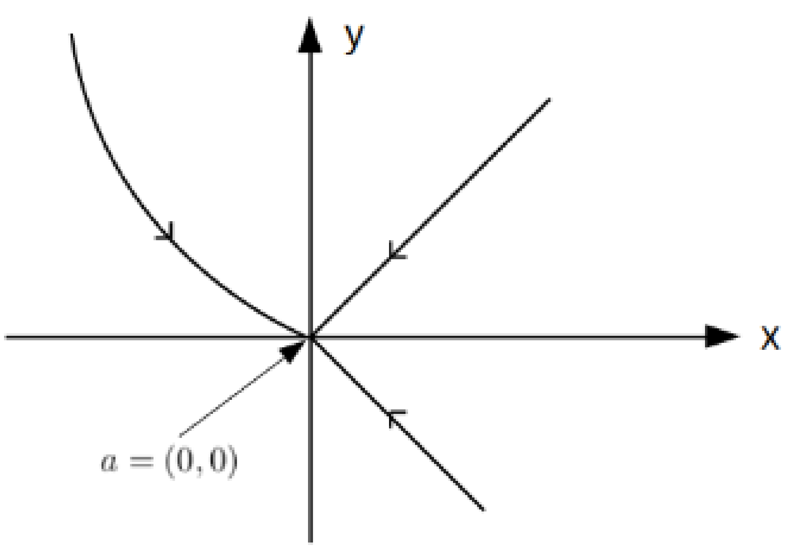
Exemple :

Reprenons l'exemple de fonction précédent

$$\begin{array}{rccl} f \; : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$



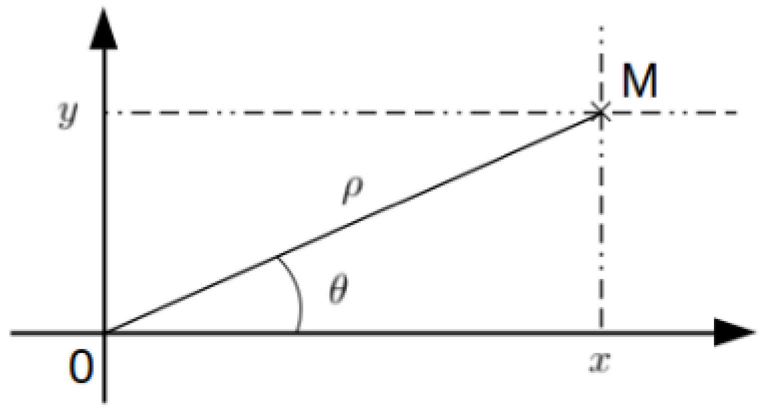
exemples de chemins si $E = \mathbb{R}^2$



On montre aisément, à partir des définitions géométriques des fonctions cosinus et sinus, que

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

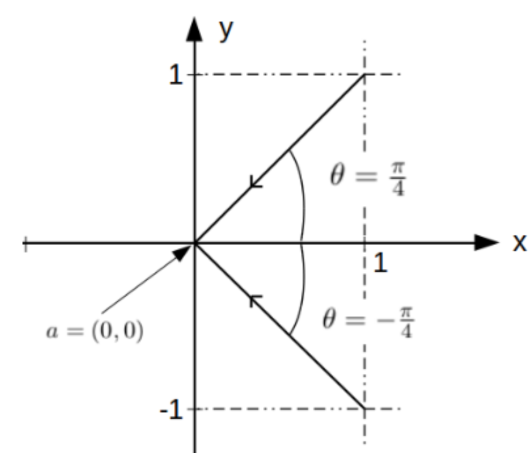
où $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\rho \in \mathbb{R}^*$.



alors, grâce au changement polaire de variables

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \longrightarrow \tilde{f}(\rho,\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(\rho,\theta)\to(0,\frac{\pi}{4})} \tilde{f}(\rho,\theta) = \lim\limits_{(\rho,\theta)\to(0,\frac{\pi}{4})} \cos(\theta)\sin(\theta) = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(\rho,\theta)\to(0,-\frac{\pi}{4})} \tilde{f}(\rho,\theta) = \lim\limits_{(\rho,\theta)\to(0,-\frac{\pi}{4})} \cos(\theta)\sin(\theta) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



Propriété 3 :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN et $A \subset E$. Soient f et g deux applications de A dand F, $a \in \overline{A}$ et $l \in F$. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = l_2$$

Alors

$$\lim_{x \to a} f(x) + \lambda g(x) = l_1 + \lambda l_2 \qquad \text{pour } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Démonstration : Par hypothèse, on a

$$\begin{cases} \lim_{x \to a} f(x) = l_1 \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in E, \|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - l_1\|_F < \epsilon \\ \\ \lim_{x \to a} g(x) = l_2 \iff \forall \epsilon' > 0,\ \exists \eta' > 0, \forall x \in E, \|x - a\|_E < \eta' \Longrightarrow \|f(x) - l_2\|_F < \epsilon' \end{cases}$$

Calculons maintenant $\|f(x) + \lambda g(x) - (l_1 + \lambda l_2)\|_F$

$$\|f(x) + \lambda g(x) - (l_1 + \lambda l_2)\|_F \leq \|f(x) - l_1\|_F + |\lambda|\, \|g(x) - l_2\|_F$$

Finalement, en posant $\epsilon'' = \epsilon + |\lambda|\epsilon'$ et $\eta'' = \min(\eta, \eta')$

$$\forall \epsilon'' > 0, \exists \eta'' > 0,\ \|x - a\|_E < \eta'' \Longrightarrow \|f(x) + \lambda g(x) - (l_1 + \lambda l_2)\|_F < \epsilon''$$

Propriété 4 :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN. Soit $F \subset \mathbb{R}$ et $A \subset E$. Soient f et g deux applications de $A \longrightarrow F$. Soit $a \in \overline{A}$. f et g sont telles que

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x \to a} g(x) = l_2$$

avec $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Alors

1. $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = l_1 l_2$
2. Si $l_2 \neq 0$, $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = l_1/l_2$

Démonstration : laissée en exercice

Propriété 5 :

Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$. Alors une application f de $E \longrightarrow F$ admet $l = (l_1, l_2, ..., l_p)$ comme limite lorsque x tend vers $a \in E$ si, et seulement si, pour tout entier $[\![1; p]\!]$, la ième "application composante" $f_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de f admet l_i pour limite quand x tend vers a.

Démonstration : laissée en exercice

Exemple :

Soit l'application $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \left(\frac{xy^2}{x^2+y^2} \; ; \; \frac{xy}{x^2+y^2}\right) \end{array}$

limite en $a = (0,0)$?

il suffit d'étudier la limite de chacune des applications composantes

$$f_1 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f_1(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

$$f_1(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \longrightarrow \tilde{f}_1(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$\forall \theta, \quad \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}_1(\rho,\theta) = 0$$

Continue

$$f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \longrightarrow \tilde{f}_2(\rho,\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)$$

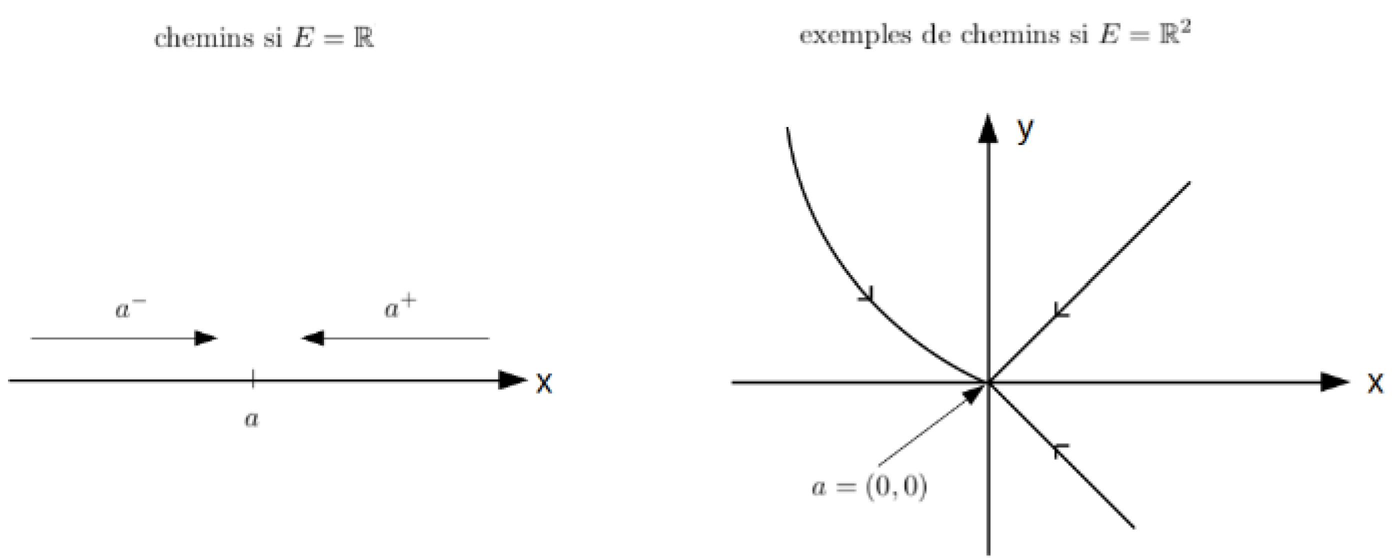
$$\lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}_2(\rho,\theta) = \text{ dépend de } \theta$$

Pas Continue

f pas continue

Définition 2 : (Application continue)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soient $A \subset E$, f une application de $A \longrightarrow F$ et $a \in A$. On dit que f est continue en a si, et seulement si, f admet une limite en a. La fonction f est dite discontinue en a si, et seulement si, f n'est pas continue en a. La fonction est dite continue sur l'ensemble A si, et seulement si, elle est continue en tout point de A. On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues de A dans F.



Théorème 1 : (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soient $A \subset E$, f une application de $A \longrightarrow F$ et $a \in \overline{A}$. Alors f admet une limite $l \in F$ quand x tend vers a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\Big(f(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Démonstration : Admis

Corollaire : (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soient $A \subset E$, f une application de $A \longrightarrow F$ et $a \in \overline{A}$. Alors f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\Big(f(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Exemple :

Soit la fonction
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Prenons par exemple $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = (0,0)$$

Or $f(u_n) = n^2/(2n^2) = 1/2$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(u_n) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

$\Rightarrow$ pas continue en $(0,0)$

Méthodologie

Comment calculer $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ avec $a=(x_0,y_0)$

Etape 1 :

On calcule $f(x_0,y_0)$ et si on n'obtient pas une forme indeterminée

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Sinon Etape 2 : (on lève l'indétermination)

l'objectif est de montrer :

(i) soit que tous les chemins qui tendent vers a aboutissent à la même valeur

(ii) soit il existe au moins deux chemins qui tendent vers a mais qui n'aboutissent pas à la même valeur de f

Méthodologie

1. On peut passer en coordonnées polaires (si le dénominateur de la fonction à la bonne forme)

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos(\theta) \\ y = y_0 + \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}(\rho,\theta) = f(x,y)$$

On a alors

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}(\rho,\theta)$$

Si le résultat ne dépend pas de θ alors la fonction f admet une limite

Si le résultat dépend de θ alors la fonction n'admet pas de limite en (x_0, y_0)

Méthodologie

2. Si la fonction n'a pas la bonne forme pour passer en coordonnées polaires, on calcule explicitement la valeur de f pour différents chemins d'approche du point $a = (x_0, y_0)$. Pour cela, on a deux méthodes

   (a) Caractérisation séquentielle :
   Nous savons que si u_n est une suite d'éléments de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que
   $$\lim_{n\to\infty} u_n = (x_0, y_0)$$
   alors si f est continue, on a
   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f(u_n)$$
   On calcule alors cette limite pour différents chemins, c'est-à-dire pour différentes suites u_n.

   (b) Caractérisation cartésienne :
   On exprime les différents chemins par leur expression cartésienne qui sont de la forme $(x, \alpha(x))$ par exemple (où α est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Si deux chemins donnent des valeurs différentes, quelle que soit la méthode, alors la fonction f n'a pas de limite en a.
Si, par contre, tous les chemins donnent la même valeur, alors cette valeur, notée l_c, est un bon candidat pour être la limite de la fonction. On passe alors à l'étape 3.

Méthodologie

3. Il ne reste plus qu'à calculer $|f(x,y)-l_c|$. Si cette quantité tend vers 0 pour (x,y) tend vers (x_0,y_0) alors :

   — Si $|f(x,y)-l_c| \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l_c$

   — Sinon, la fonction n'admet aucune limite en (x_0,y_0)

Nous allons illustrer la méthodologie sur deux exemples : un qui admet une limite en (0,0) et l'autre pas.

coordonnées polaires

On pose $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

d'où l'on déduit que

$$\tilde{f}_1(\rho,\theta) = \cos(\theta)\sin(\theta)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}_1(\rho,\theta)$$
$$= \cos(\theta)\sin(\theta)$$

Finalement, on voit que

Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \frac{1}{2}$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$

Caractérisation Séquentielle

Soit $\begin{cases} u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ v_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$

On a bien

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = (0,0)$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} f_1(u_n) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_1(v_n) = 0$$

Caractérisation Cartésienne

Chemin 1: (x,x)

$$f_1(x,x) = \frac{1}{2}$$

Chemin 2 : $(0,y)$

$$f_1(0,y) = 0$$

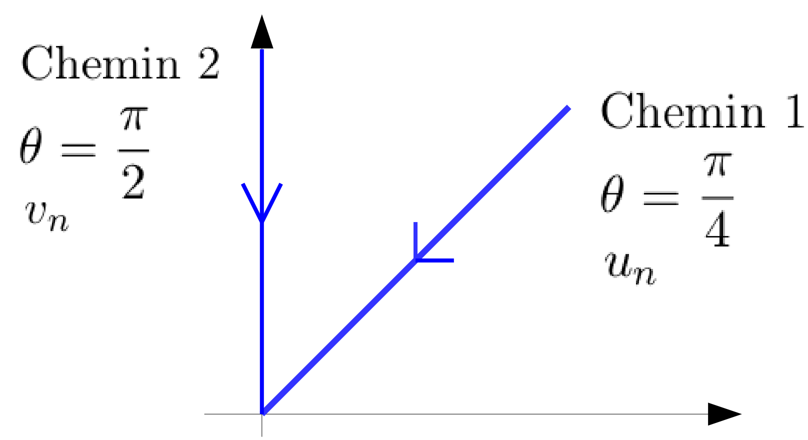
d'où l'on déduit que

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f_1(x,y) = 1/2$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f_1(0,y) = 0$$

$$f_1(x,y) = xy/(x^2+y^2)$$

en $(0,0)$???



PAS DE LIMITE

coordonnées polaires

On pose $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

d'où l'on déduit que

$$\tilde{f}_2(\rho,\theta) = \rho\cos^3(\theta) + 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}_2(\rho,\theta) = 1$$

Finalement, on voit que la fonction est continue

Caractérisation Séquentielle

Soit $\begin{cases} u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ v_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \end{cases}$

On a bien

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = (0,0)$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} f_2(u_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(v_n) = 1$$

Mais on ne peut pas conclure

Caractérisation Cartésienne

Chemin 1: (x,x)

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f_2(x,x) = 1$$

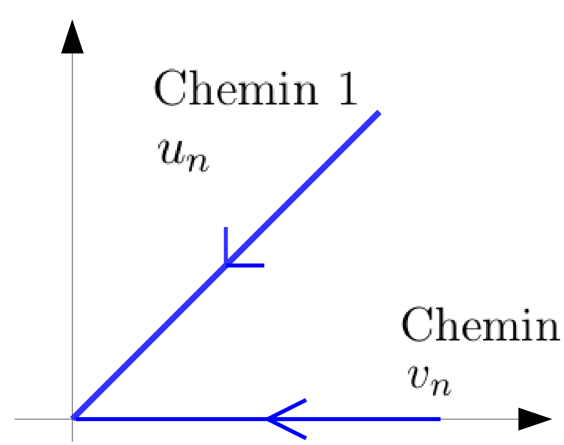
Chemin 2 : $(x,0)$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f_2(x,0) = 1$$

Mais on ne peut pas conclure

$f_2(x,y) = 1 + x^3/(x^2+y^2)$

en $(0,0)$???



coordonnées polaires

On pose $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

d'où l'on déduit que

$$\tilde{f}_2(\rho,\theta) = \rho\cos^3(\theta) + 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\theta)} \tilde{f}_2(\rho,\theta)$$
$$= 1$$

Finalement, on voit que la fonction est continue

Caractérisation Séquentielle

Soit $\begin{cases} u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ v_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \end{cases}$

On a bien

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = (0,0)$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} f_2(u_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(v_n) = 1$$

Mais on ne peut pas conclure

Caractérisation Cartésienne

Chemin 1: (x,x)

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f_2(x,x) = 1$$

Chemin 2 : $(x,0)$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f_2(x,0) = 1$$

Mais on ne peut pas conclure

$f_2(x,y) = 1 + x^3/(x^2+y^2)$

en $(0,0)$???

$$|f(x,y) - l_c| = |f(x,y) - 1| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|x| \le |x| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 1$$

Définition 2 : (Continuité uniforme)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Soient $A \subset E$, f une application de $A \longrightarrow F$ et $a \in A$. On dit que f est uniformément continue sur A si, et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall a \in A,\ \forall x \in A,\ \left(\|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon \right)$$

continuité classique

$$\forall a \in A,\ \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \left(\|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon \right)$$

différence

continuité uniforme $\Rightarrow$ η est indépendant de a

Propriété 6 :

Toute application uniformément continue est continue.

Démonstration :

C'est trivial.

Soit f une application de $A \subset E$ dans F.

Alors f est uniformément continue sur A si, et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall a \in A, \ \forall x \in A, \ \left(\|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon \right)$$

qui implique évidemment la continuité

$$\forall a \in A, \ \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall x \in A, \ \left(\|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon \right)$$

Définition 3 : (Application lipschitzienne)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, deux EVN. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite lipschitzienne si, et seulement si

$$\exists \kappa \geq 0,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq \kappa \|x - y\|_E$$

On dit alors que f est κ-lipschitzienne de E dans F.

Remarques :

en dimension finie

- caractère lipschitzien ne dépend pas des normes utilisées
- κ en dépend

$$\kappa = 0 \iff f \text{ est constante}$$

Propriété 7 :

Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux EVN

f une application κ-lipschitzienne de E dans F

1. Si $\kappa = 0$ alors f est une fonction constante.

   Donc pour tout $a \in E$ et $\forall x \in E$, $\|f(x) - f(a)\|_F = 0 < \epsilon$.

   $\Rightarrow$ f est uniformément continue.

2. Si $\kappa \neq 0$, alors posons $\eta = \epsilon/\kappa > 0$.

   Soit $a \in E$ et $x \in E$ tels que

$$\|x - a\|_E < \eta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\|_F \leq \kappa \|x - a\|_E < \kappa\eta = \epsilon$$

On vient donc de montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall a \in E,\ \forall x \in E,\ \Big(\ \|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \epsilon\Big)$$

$\Rightarrow$ f est uniformément continue.

Propriété 8 :

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN. Alors l'application $\|\cdot\|_E$ est 1-lipschitzienne de E dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Démonstration :

f est donc ici l'application $\|\cdot\|_E$.

Il suffit donc de montrer que

$$\exists \kappa \geq 0,\ \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ |\, \|x\|_E - \|y\|_E \,| \leq \kappa \|x - y\|_E$$

avec $\kappa = 1$.

Or d'après la 2nd inégalité triangulaire

$$\forall x, y \in E,\ |\, \|x\|_E - \|y\|_E \,| \leq \|x - y\|_E$$

CQFD.

Théorème 2 : (théorème de Heine)

Toute application continue sur un compact y est uniformément continue

Démonstration :

voir le polycopié p.72

Théorème 3 : (Images réciproques d'ouverts, de fermés)

1. L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.
2. L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Démonstration : par hypothèse : Soit f une application continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

f est continue en a et de plus $f(a) = l$

$\forall V_F \in \mathcal{V}(l),\ \exists V_E \in \mathcal{V}_E(a),\ \forall x \in A,\ (x \in V_E \Longrightarrow f(x) \in V_F)$

1. Soit V_F un ouvert de F.

   Soit $x \in f^{-1}(V_F)$ ⟺ $f(x) \in V_F$.

   Or par hypothèse :

   V_F est un ouvert ⟹ voisinage de $f(x)$

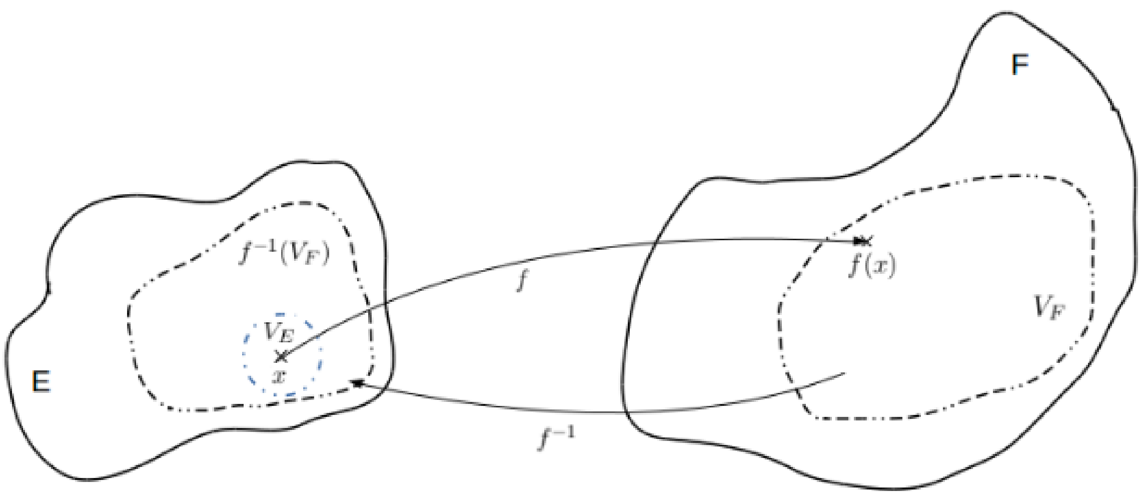
   Par continuité de f :

   $$\exists V_E \in \mathcal{V}_E(x) \ / \ \forall x \in V_E,\ f(x) \in V_F$$

   Donc $V_E \subset f^{-1}(V_F)$

   Comme V_E est un voisinage de x ⟹ $f^{-1}(V_F)$ est un voisinage de x

   démonstration vraie pour tout $f(x) \in V_F$. ⟹ $f^{-1}(V_F)$ est bien un ouvert



Théorème 3 : (Images réciproques d'ouverts, de fermés)

1. L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.
2. L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Démonstration : par hypothèse : Soit f une application continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.
f est continue en a et de plus $f(a) = l$
$\forall V_F \in \mathcal{V}(l),\ \exists V_E \in \mathcal{V}_E(a),\ \forall x \in A,\ (x \in V_E \Longrightarrow f(x) \in V_F)$

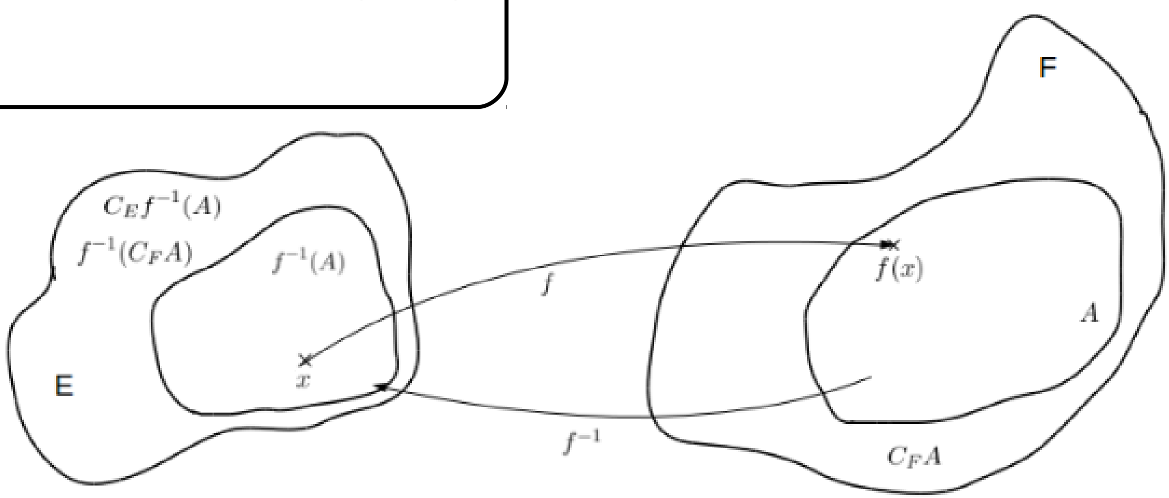
2. Soit A un fermé de F. Alors

$x \in C_E f^{-1}(A) \Longleftrightarrow f(x) \notin A \Longleftrightarrow f(x) \in C_F A \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(C_F A)$

$\Rightarrow$ $C_E f^{-1}(A) = f^{-1}(C_F A)$

Comme A est un fermé de F

$\Rightarrow$ $C_F A$ est un ouvert de F



Donc compte-tenu de 1.

$\Rightarrow$ $f^{-1}(C_F A)$ est un ouvert de E.

$C_E f^{-1}(A) = f^{-1}(C_F A)$ $\Rightarrow$ $C_E f^{-1}(A)$ est un ouvert

Finalement $C_E C_E f^{-1}(A) = f^{-1}(A)$ est un fermé.

Théorème 4 : (Image directe d'un compact)

Soient $(E, \|\cdot\|)_E)$ et $(F, \|\cdot\|)_F)$ deux EVN. Soit f une application continue de E dans F, alors l'image direct d'un compact de E par f est un compact de F.

Démonstration :

Soit A un compact de E et f une application continue sur A.

Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $f(A)$ alors pour $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\exists a_n \in A \text{ telle que } \; b_n = f(a_n).$$

A étant compact, il existe une suite extraite $a_{\phi(n)}$ convergente vers $a \in A$.

Or f est continue donc $(b_{\phi(n)}) = (f(a_{\phi(n)}))$ converge vers $f(a) \in f(A)$

$\Rightarrow$ $f(A)$ est un compact

objectif de ce chapitre

- généraliser des notions que vous avez étudié dans le cas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- introduire rigoureusement des concepts que vous avez déjà utilisé en physique

1. dérivée première $\longrightarrow$ dérivée partiel du premier ordre :

exemple

$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \left(x+y, x^2-y^2, x^2y\right) \end{array}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = (1, 2x, 2xy)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = (1, -2y, x^2)$$

On introduira également la notion de gradient objectif de ce chapitre

→ généraliser des notions que vous avez étudié dans le cas des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

→ introduire rigoureusement des concepts que vous avez déjà utilisé en physique

2. différentiabilité, différentielle, classe $\mathcal{C}^1$

exemple

$$dU(T_0, V_0) = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{T_0,V_0} dT + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{T_0,V_0} dV$$

3. Nous généraliserons la notion d'équation différentielle d'ordre 1 en introduisons les équations aux dérivées partielles du 1er ordre

exemple

$$\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Définition 1 : (Dérivée partielle)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soient $a \in \mathbb{R}^p$ et f une application de U dans F (où F est un EVN). Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On dit dit que f admet une dérivée partielle première en a par rapport à la jème variable si, et seulement si, l'application

$$\phi_j = \begin{cases} D_j \to F \\ t \mapsto f(a + te_j) \end{cases}$$

est dérivable en 0 avec $D_j = \{t \in \mathbb{R} \ / \ a + te_j \in U\}$. On a alors :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = \phi_j'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a$ $\Longleftrightarrow$ dérivée de f par rapport à la jème variable au point a (dit autrement on évalue cette dérivée au point a)

Autres notations : $\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}$ $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

Exemple :

Soit f l'application suivante

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = 3x^2 + xy - 2y^2 \end{array}$$

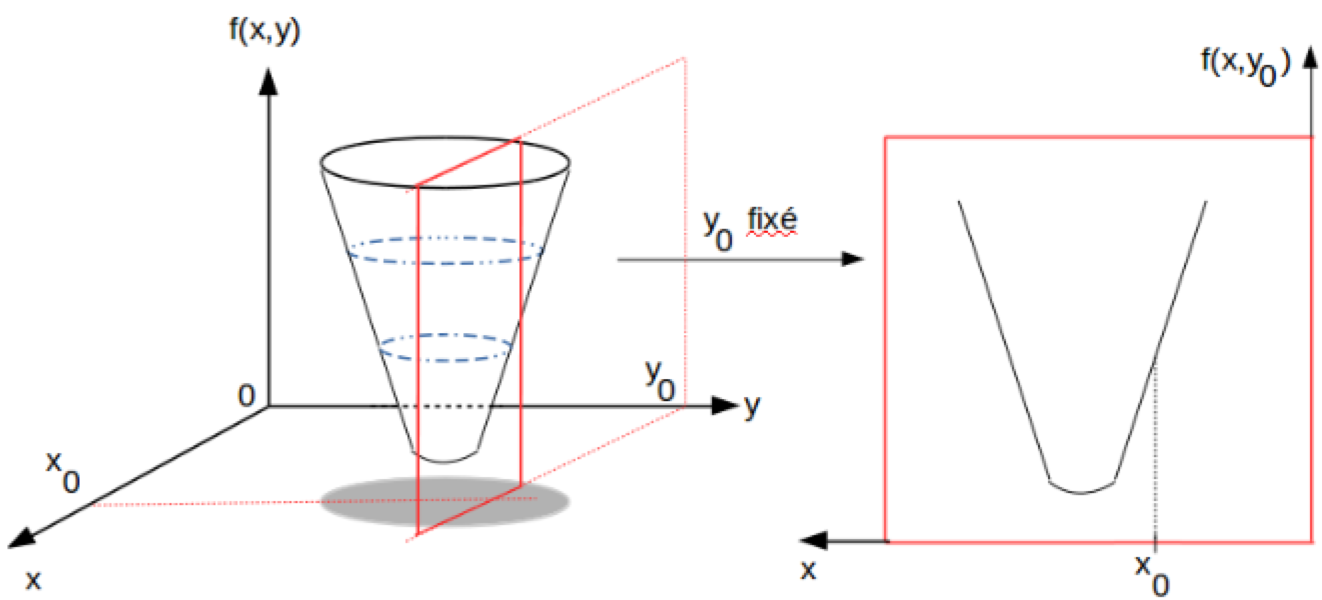
$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} &= \lim_{t\to 0} \frac{f\Big((x,y)+(t,0)\Big) - f(x,y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f\Big(x+t,y\Big) - f(x,y)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{3(x+t)^2 + (x+t)y - 2y^2 - 3x^2 - xy + 2y^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{3t^2 + 6xt + ty}{t} = \lim_{t\to 0} \Big(3t + 6x + y\Big) = 6x + y
\end{aligned}$$

Ce qui est bien équivalent à fixer y et à dériver par rapport à x :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)} = 6x + y$$

Signification graphique :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Longleftrightarrow$$ par rapport à x au point x_0 de la fonction $f(x, y_0)$.



intersection du plan parallèle à xOz situé en $y = y_0$ avec la courbe $f(x, y)$

$f(x, y_0)$

$$\longrightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$ dérivée en x_0 de cette fonction $f(x, y_0)$

Propriété 1 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit f une application de $U \to \mathbb{R}^n$. f admet une dérivée première par rapport à la jème variable ($j \in [\![1;p]\!]$) si, et seulement si, pour $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_a$ est définie. Dans ce cas, on a

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = \left(\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\right|_a ; \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_j}\right|_a ; \dots ; \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right|_a \right)$$

Démonstration : Soit f une application de $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Alors en toute généralité cette application peut s'écrire

$$\begin{array}{rccl} f : & U \subset \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & f(x_1, \dots, x_p) = \big(f_1(x_1, \dots, x_p) ; \dots ; f_n(x_1, \dots, x_p)\big) \end{array}$$

applications composantes de $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

dérivée par rapport à x_j :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{f_1(a + te_j) - f_1(a)}{t} ; \dots ; \frac{f_n(a + te_j) - f_n(a)}{t} \right) \\ &= \left(\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\right|_a ; \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_j}\right|_a ; \dots ; \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right|_a \right) \end{aligned}$$

Définition 2 : (Fonction différentiable)

Soit U un ouvert de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_p)$. Soit $a \in U$. Soit f une application de U dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Soit U_0 l'ensemble définie par

$$U_0 = \{h \in \mathbb{R}^p \ / \ a + h \in U\}$$

On dit que f est différentiable en a si, et seulement si, il existe une **application linéaire** l de $\mathbb{R}^p$ dans F et une application ϵ de U_0 dans F telles que :

1. $\lim\limits_{h \to 0_{\mathbb{R}^p}} \epsilon(h) = 0_F$
2. $\forall h \in U_0, \ f(a+h) = f(a) + l(h) + \|h\|_p \, \epsilon(h)$

Le second point est le développement limité à l'ordre 1 de f en a. On dit que f est différentiable sur U si, et seulement si, f est différentiable en tout point de U.

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^p}} \epsilon(h) = 0_F$$

$$\forall h \in U_0, \; f(a+h) = f(a) + l(h) + \|h\|_p \, \epsilon(h)$$

Théorème 1 : (différentielle)

Soit U un ouvert de $E = (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_E)$. Soit $a \in U$. Soit f une application de U dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Si f est différentiable en a alors l'application l est unique. Cette application est appelé différentielle de f en a et est notée $D_a f$.

Démonstration : voir polycopié p. 81

Propriété 2 :

Toute application linéaire ϕ de $\mathbb{R}^p$ dans un EVN quelconque F est différentiable et pour $\forall a \in \mathbb{R}^p$, $D_a\phi = \phi$

Démonstration :

ϕ est linéaire.

Donc, $\forall a, h \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\phi(a+h) = \phi(a) + \phi(h) + 0_F$$

on a donc juste à poser que $D_a\phi = \phi$ et $\epsilon(h) = 0_F$

Propriété 3 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$ et f une application de $U \to F$. Si f est différentiable en a, alors, ses dérivées partielles premières par rapport à toutes ses variables sont définies en a et sa différentielle en ce point est donnée par

$$\begin{array}{rccl} D_a f & : & \mathbb{R}^p & \to & F \\ & & h = (h_1, ..., h_p) & \mapsto & D_a f(h) = \sum_{i=1}^p h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a \end{array}$$

Démonstration : Etudions tout d'abord les dérivées

$$\forall j \in [\![1;p]\!] \ : \ \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t}$$

f est différentiable par hypothèse. Il existe donc une différentielle $D_a f$ telle que

$$f(a+te_j) = f(a) + D_a f(te_j) + \|te_j\|\,\epsilon(te_j)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = \lim_{t\to 0} \frac{D_a f(te_j) + \|te_j\|\,\epsilon(te_j)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(D_a f(e_j) + \|e_j\|\,\epsilon(te_j)\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = D_a f(e_j)$$

Propriété 3 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$ et f une application de $U \to F$. Si f est différentiable en a, alors, ses dérivées partielles premières par rapport à toutes ses variables sont définies en a et sa différentielle en ce point est donnée par

$$\begin{array}{rcl} D_a f : & \mathbb{R}^p & \to F \\ & h = (h_1, ..., h_p) & \mapsto D_a f(h) = \sum_{i=1}^p h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = D_a f(e_j)$$

Prenons donc $h = (h_1, h_2, ..., h_p) = \sum_{i=1}^{p} h_i e_i$

Alors par linéarité de $D_a f$ on a

$$D_a f(h) = D_a f(\sum_{i=1}^{p} h_i e_i) = \sum_{i=1}^{p} h_i D_a f(e_i)$$

$$D_a f(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a$$

Interprétation de la différentielle et Lien avec la physique (voir TD)

$D_a f(h)$ correspond à la variation de la fonction f au point a lorsque l'on se déplace du vecteur h à partir du point a (lorsque h tend vers 0)

$$\forall h \in U_0,\ f(a+h) = f(a) + D_a f(h) + \|h\|_E\, \epsilon(h)$$
$$\text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0_F$$

Soit U l'énergie interne d'un système.

U dépend de la température et du volume par exemple

$$\Longrightarrow U(T, V)$$

La différentielle de U au point (T_0, V_0) est

$$dU(T_0, V_0) = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{T_0, V_0} dT + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{T_0, V_0} dV$$

Interprétation de la différentielle et Lien avec la physique (voir TD)

$$D_a f(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & f \\ (T,V) & \longrightarrow & (x_1,x_2) \\ (T_0,V_0) & \longrightarrow & a \\ dU & \longrightarrow & D_a f \\ (dT,dV) & \longrightarrow & h=(h_1,h_2) \end{array}$$

$$dU(T_0,V_0) = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{T_0,V_0} dT + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{T_0,V_0} dV$$

$\Longleftrightarrow$ variation d'énergie interne U lorsque

$$\begin{cases} \text{la température passe de } T_0 \text{ à } T_0 + dT \\ \text{et le volume passe de } V_0 \text{ à } V_0 + dV \end{cases}$$

Propriété 4 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN. Soit f une application de $U \to F$. Alors si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Démonstration :

Rappel :

f différentiable en a

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall h = (h_1, ..., h_p) \in U_0 \text{ avec } U_0 = \{h \in \mathbb{R}^p \ / \ a + h \in U\} \\ f(a+h) = f(a) + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a + \|h\|_E \, \epsilon(h) \end{cases}$$

En prenant la norme de l'expression précédente

$$\|f(a+h) - f(a)\|_F = \left\| \sum_{j=1}^{p} h_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a + \|h\|_E \, \epsilon(h) \right\|_F \leq \left\| \sum_{j=1}^{p} h_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a \right\|_F + \left\| \|h\|_E \, \epsilon(h) \right\|_F$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p} |h_j| \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a \right| + \|h\|_E \, \|\epsilon(h)\|_F \longrightarrow 0_F$$

$$\Longrightarrow \lim_{h \to 0_E} f(a+h) = f(a)$$

Théorème 2 : (Différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in U$. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN. Et enfin, soit f une application de U dans F. Alors f est différentiable en (x, y), si, et seulement si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)-h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}-h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right) = 0_F \quad \longleftrightarrow \quad (1)$$

Où la norme utilisée n'a pas d'influence sur le résultat final.

Démonstration : Etape 1 : f différentiable $\Rightarrow$ (1) ?

f est différentiable au point (x, y)

$\Leftrightarrow$
$$f(x+h_1,y+h_2) = f(x,y)+h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}+h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}+\|(h_1,h_2)\|\,\epsilon(h_1,h_2)$$
avec $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1,h_2) = 0_F$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)-h_1\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y}-h_2\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right)$$
$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1,h_2) = 0_F$$

Théorème 2 : (Différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in U$. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN. Et enfin, soit f une application de U dans F. Alors f est différentiable en (x, y), si, et seulement si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - h_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} - h_2 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right) = 0_F \quad \longleftrightarrow \quad (1)$$

Où la norme utilisée n'a pas d'influence sur le résultat final.

Démonstration : Etape 2 : (1) $\Rightarrow$ f différentiable ?

Par hypothèse

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - h_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} - h_2 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right) = 0_F$$

posons

$$\epsilon(h_1,h_2) = \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - h_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} - h_2 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right)$$

il ne reste plus qu'à réarranger les termes

$$f(x+h_1, y+h_2) = f(x,y) + h_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} + h_2 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} + \|(h_1,h_2)\|\,\epsilon(h_1,h_2)$$

Dénition 3 : (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN. Soit f une application de U dans F. Alors f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, toutes les fonctions dérivées partielles premières de f sont définies et continues en tout point $a \in U$. On note $\mathcal{C}^1(U, F)$ l'ensemble des applications de U dans F de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Propriété 5 :

Toute application ϕ linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

Démonstration : Soit $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Alors, si $a \in \mathbb{R}^p$: $$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_a = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\phi(a+te_i)-\phi}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\phi\left(\frac{a+te_i-a}{t}\right) = \phi(e_i)$$

$\Rightarrow$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, les dérivées partielles sont définies.

De plus, la fonction $$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^p & \to & F \\ a & \mapsto & \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_a = \phi(e_i) \end{array}$$ continue

Théorème 3 :

Soit U un ouvert de $E = \mathbb{R}^p$. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un EVN. Soit f une application de U dans F. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors

1. f est différentiable sur U.
2. f est continue sur U.

Démonstration :

1. Admis
2. Si f est $\mathcal{C}^1$ alors f est différentiable sur U

f est différentiable sur U $\Rightarrow$ f est continue sur U (propriété 4)

$$f \in \mathscr{C}^1(U;F) \Longrightarrow f \text{ est différentiable en } a \in U \begin{cases} \Longrightarrow f \text{ est continue en } a \in U \\ \Longrightarrow f \text{ admet toutes ses dérivées partielles en } a \end{cases}$$

Illustration :

Soit la fonction

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Continuité en $(0,0)$?

$$|f(x,y)| = \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq |x^2+y^2| \underset{(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

f_1 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Illustration :
$$\begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Différentiabilité en $(0,0)$?

Une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable, en (x,y), si, et seulement si :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h_1,h_2)\|}\left(f(x+h_1,y+h_2) - f(x,y) - h_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} - h_2 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y}\right) = 0_F$$

calculons tout d'abord les dérivées partielles

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(t^2 \sin\frac{1}{|t|} - 0\right)$$
$$= \lim_{t\to 0} t \sin\frac{1}{|t|} = 0 = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

$$\Rightarrow \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left((h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right) \longrightarrow 0$$

Donc f est différentiable en $(0,0)$

Mais les dérivées ne sont pas continue en $(0,0)$:

Pour cela calculons la dérivée par rapport à x en (x,y) quelconque

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Donc la dérivée première par rapport à x est donnée

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Or, en prenant $u_n = (1/n, 0)$, alors

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{u_n} &= \frac{2}{n}\sin(n) - \frac{1}{n}(n^2)^{3/2}\cos(n) \\ &= \frac{\sin n}{n} - n^2\cos(n) \quad \text{qui ne converge pas vers } 0 \end{aligned}$$

la fonction n'est pas $\mathcal{C}^1$

$$\text{en } (0,0) \begin{cases} f \text{ est continue} \\ \text{dérivées partielles premières existent} \\ \text{dérivées partielles premières ne sont pas continues} \end{cases}$$

Théorème 4 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit F un EVN quelconque. L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, F)$ est un sous espace vectoriel des fonctions continues de U dans F, c'est-à-dire de $\mathcal{C}(U, F)$.

Démonstration :

1. La fonction nulle est le 0 de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(U, F)$. Or la fonction nulle a pour dérivées partielles la fonction nulle. Donc la fonction nulle a ses dérivées partielles continues. Finallement la fonction nulle apprtient à $\mathcal{C}^1(U, F)$.

2. De plus pour $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $f + \lambda g$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur U car la somme de fonctions continues et continues et de même pour la dérivée (laissé en exercice). Donc $f + \lambda g \in \mathcal{C}^1(U, F)$

Théorème 5 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit F un EVN quelconque. Alors, pour $\forall f, g \in \mathcal{C}^1(U, F)$, $f \times g \in \mathcal{C}^1(U, F)$.

Démonstration : exercice.

Théorème 6 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathcal{R}^q$. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et g une application de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}^n$. Si $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Démonstration : Admis.

Propriété 6 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. Soient $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n$, n fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telles que pour $\forall t \in I$, $\Big(u_1(t)\ ;\ u_2(t)\ ; \ldots;\ u_n(t)\Big) \in U$.

Alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} g & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & g(t) = f\Big(u_1(t)\ ;\ u_2(t)\ ; \ldots;\ u_n(t)\Big) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de plus, $\forall t \in I$

$$g'(t) = u_1'(t) \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{u_1(t),\ldots,u_n(t)} + \ldots + u_n'(t) \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{u_1(t),\ldots,u_n(t)}$$

Démonstration : voir polycopié p. 93

$$\begin{array}{rccl} g : & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & g(t) = f\Big(u_1(t)\ ;\ u_2(t)\ ;\ldots;\ u_n(t)\Big) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de plus, $\forall t \in I$

$$g'(t) = u_1'(t)\ \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{u_1(t),\ldots,u_n(t)} + \ldots + u_n'(t)\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{u_1(t),\ldots,u_n(t)}$$

Exemple :

Soit la fonction définie par : $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = xyz + y^2 + z \end{array}$

On introduit alors les fonctions $x = u_1(t) = 2t+3$, $y = u_2(t) = e^t$ et $z = t^2$.

On cherche alors la dérivée de la fonction

$$g(t) = f\Big(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\Big)$$

Deux méthodes :

1. On fait le calcul explicitement

$$g(t) = (2t+3)t^2e^t + e^{2t} + t^2$$

$$\Longrightarrow \quad g'(t) = (2t^3 + 9t^2 + 6t)e^t + 2t + 2e^{2t}$$

2. On utilise la relation de la propriété 6

$$g'(t) = u_1'(t)\ \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{u_1(t),u_2(t),u_3(t)} + u_2'(t)\ \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{u_1(t),u_2(t),u_3(t)} + u_3'(t)\ \frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{u_1(t),u_2(t),u_3(t)}$$

$$\Longrightarrow \quad g'(t) = (2t^3 + 9t^2 + 6t)e^t + 2t + 2e^{2t}$$

Propriété 7 :

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$. Soient g_1 et g_2 deux applications de V dans $\mathbb{R}$. f, g_1 et g_2 sont $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition respectif. Pour $\forall(u,v) \in V$, $\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) \in U$.

$$\text{Alors la fonction} \quad \begin{array}{rccl} h & : & V & \to \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \mapsto h(u,v) = f\big(g_1(u,v)\ ;\ g_2(u,v)\big) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et de plus, $\forall(u,v) \in V$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_1}{\partial u}\right|_{u,v} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_2}{\partial u}\right|_{u,v} \\ \left.\frac{\partial h}{\partial v}\right|_{u,v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_1}{\partial v}\right|_{u,v} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_2}{\partial v}\right|_{u,v} \end{cases}$$

Démonstration :

Nous n'allons montrer ici que la première égalité la seconde se démontrant strictement de la même façon.

on cherche à exprimer $\left.\dfrac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v}$ en fonction des dérivées de g_1 et g_2.

prendre la dérivée partielle de h par rapport à u revient à étudier la variation de h en fonction de u lorsque v est fixé.

Introduisons donc les fonctions

$$g_1^v(u) = g_1(u,v)$$
$$g_2^v(u) = g_2(u,v)$$
$$H(u) = h(u,v) = f(g_1^v(u)\ ;\ g_2^v(u))$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = H'(u)$$

Propriété 7 :

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$. Soient g_1 et g_2 deux applications de V dans $\mathbb{R}$. f, g_1 et g_2 sont $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de définition respectif. Pour $\forall(u,v) \in V$, $\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) \in U$.

Alors la fonction
$$\begin{array}{cccl} h & : & V & \to \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \mapsto h(u,v) = f\big(g_1(u,v)\ ;\ g_2(u,v)\big) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et de plus, $\forall(u,v) \in V$
$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial u}\right|_{u,v} + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\dfrac{\partial g_2}{\partial u}\right|_{u,v} \\ \left.\dfrac{\partial h}{\partial v}\right|_{u,v} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial v}\right|_{u,v} + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\dfrac{\partial g_2}{\partial v}\right|_{u,v} \end{cases}$$

Démonstration :

$$H(u) = h(u,v) = f(g_1^v(u)\ ;\ g_2^v(u))$$

d'après la propriété 6

$$H'(u) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1^v(u),g_2^v(u)} (g_1^v)'(u) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1^v(u),g_2^v(u)} (g_2^v)'(u)$$

or $\quad (g_1^v)'(u) = \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial u}\right|_{u,v} \qquad (g_2^v)'(u) = \left.\dfrac{\partial g_2}{\partial u}\right|_{u,v}$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_1}{\partial u}\right|_{u,v} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{g_1(u,v),g_2(u,v)} \left.\frac{\partial g_2}{\partial u}\right|_{u,v}$$

CQFD

Exemple :

Soit la fonction définie par : $\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = 2x^2y + y^2 + x \end{array}$

On introduit alors les fonctions $\begin{cases} x = g_1(u,v) = u+v \\ y = g_2(u,v) = u-v \end{cases}$

$$h(u,v) = f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) = f \circ g \quad \text{avec } g = (g_1, g_2)$$

On cherche à calculer les dérivées partielles premières de h

1. On fait le calcul explicitement

$$\begin{aligned} h(u,v) &= 2(u+v)^2(u-v) + (u-v)^2 + u + v \\ &= 2u^3 - 2v^3 + 2u^2v - 2v^2u + u^2 + v^2 - 2uv + u + v \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\dfrac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = 6u^2 - 2v^2 + 2u - 2v + 4uv + 1 \\ \left.\dfrac{\partial h}{\partial v}\right|_{u,v} = 2u^2 - 6v^2 + 1 - 2u + 2v - 4uv \end{cases}$$

Exemple :

Soit la fonction définie par : $\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & f(x,y) = 2x^2y + y^2 + x \end{array}$

On introduit alors les fonctions $\begin{cases} x = g_1(u,v) = u+v \\ y = g_2(u,v) = u-v \end{cases}$

et $h(u,v) = f\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big) = f \circ g$ avec $g = (g_1, g_2)$

On cherche à calculer les dérivées partielles premières de h

2. On utilise la relation de la propriété 7

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{u,v} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{u,v} \\ \left.\frac{\partial h}{\partial v}\right|_{u,v} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{u,v} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{u,v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = (4xy+1)\times 1 + (2x^2+2y)\times 1 \\ \left.\frac{\partial h}{\partial v}\right|_{u,v} = (4xy+1)\times 1 + (2x^2+2y)\times(-1) \end{cases}$$

or $x = u+v$ et $y = u-v$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{u,v} = 6u^2 - 2v^2 + 2u - 2v + 4uv + 1 \\ \left.\frac{\partial h}{\partial v}\right|_{u,v} = 2u^2 - 6v^2 + 1 - 2u + 2v - 4uv \end{cases}$$

Définition 4 : (Matrice de Jacobi)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et f une application, différentiable en a, de U dans $\mathbb{R}^n$. On définit la matrice de Jacobi (ou matrice jacobienne) de f en a, notée $J_f(a)$, la matrice à n lignes et p colonnes de $D_f(a)$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire la matrice

$$J_f(a) = \left(\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_a \right) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_p}\right|_a \\ . & . & . \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_p}\right|_a \end{pmatrix}$$

Si $n = p$, on appelle jacobien de f en a, le déterminant de la matrice $J_f(a)$ de f en a.

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = (xyz, ye^x, ze^z) \end{array}$

qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \quad J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ ye^x & e^x & 0 \\ 0 & 0 & (1+z)e^z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |J_f(x,y,z)| = yz(1+z)(1-x)e^{x+z}$$

Définition 5 : (Gradient)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et f une application, différentiable en a, de U dans $\mathbb{R}$. On définit alors le gradient de f en a, noté $\vec{grad}(f)(a)$ ou $\vec{\nabla}_a f$, par

$$\vec{\nabla}_a f = {}^tJ_f(a) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a \\ \cdot \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_p}\right|_a \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = xyz + ye^x + z^2 \end{array}$

qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz + ye^x \\ xz + e^x \\ xy + 2z \end{pmatrix}$$

Propriété 8 : (gradient et différentielle)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application, différentiable en $a \in U$, de U dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall (a,h) \in U^2,\ D_a f(h) = \vec{\nabla}_a f \cdot h$$

où $\vec{\nabla}_a f \cdot h$ est le produit scalaire entre les deux vecteurs.

Démonstration :

$$\vec{\nabla}_a f \cdot h = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_a ; \dots ; \left.\frac{\partial f}{\partial x_p}\right|_a \right) \cdot (h_1 ; \dots ; h_p) = \sum_{i=1}^{p} h_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a$$

Exemple :

Soit la fonction
$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = xyz + ye^x + z^2 \end{array}$$

$$\vec{\nabla}_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz + ye^x \\ xz + e^x \\ xy + 2z \end{pmatrix}$$

$$D_{(x,y,z)} f(h) = \vec{\nabla}_{(x,y,z)} f \cdot h = (yz + ye^x)h_1 + (xz + e^x)h_2 + (xy + 2z)h_3$$

Propriété 9 : (interprétation du gradient)

Le gradient d'une fonction f, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, est un vecteur perpendiculaire aux directions où f est constante et pointant dans la direction où la variation de f est maximale (de plus grande pente). La norme du gradient est d'autant plus grande qu'au point où il est calculé, la variation de f est grande.

Démonstration : Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit a un point de $\mathbb{R}^n$.

Considérons le point $p(t) = a + tv$ avec $\begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ v \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ telle que $p(t) \in U$

propriété 6 $\Rightarrow$ $\left.\frac{d}{dt} f(p(t))\right|_{t=0} = \vec{\nabla}_a f \cdot p'(t=0) = \vec{\nabla}_a f \cdot v$

$v \cdot \vec{\nabla}_a f = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left.\frac{d}{dt} f(p(t))\right|_{t=0} = 0$ $\Leftrightarrow$ f est constante.

$\|v\| = 1$ $\Leftrightarrow$ produit scalaire est maximum si colinéaire dans le même sens que $\vec{\nabla}_a f$

$v = \vec{\nabla}_a f$ $\Leftrightarrow$ $\left.\frac{d}{dt} f(p(t))\right|_{t=0} = \left\|\vec{\nabla}_a f\right\|^2 > 0$ $\Leftrightarrow$ $\vec{\nabla}_a f \nearrow$ variation de $f \nearrow$

Théorème 7 : (inégalité des accroissements finis)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Soit a et b deux points de U tels que $[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b / \lambda \in [0,1]\} \subset U$.
Si il existe un réel M tel que

$$\forall x \in [a,b], \ \left\|\vec{\nabla}_x f\right\|_1 = \sum_{j=1}^{p} \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x \right| \leq M$$

alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M \, \|b-a\|_1$$

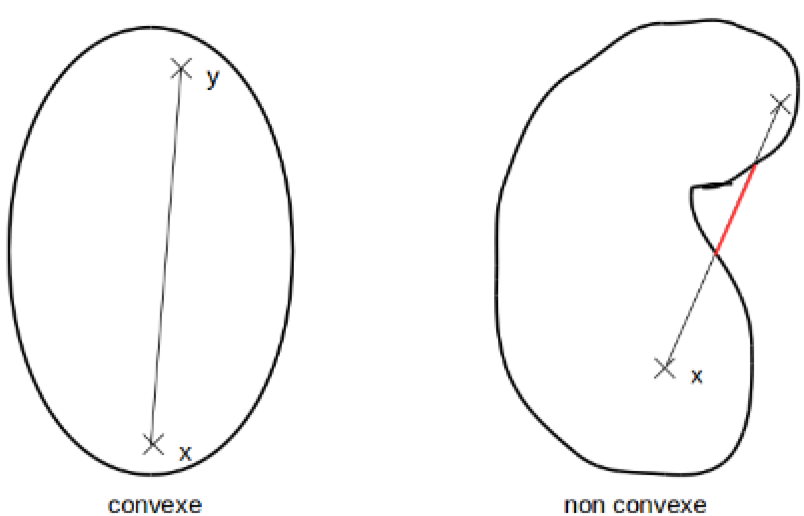
Démonstration : remise à plus tard.

Définition 6 : (Partie convexe)

Soit E un espace vectoriel quelconque. Une partie C de E est dite convexe si, et seulement si

$$\forall (x, y) \in C^2,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ (1-\lambda)x + \lambda y \in C$$

un ensemble C est convexe si, et seulement si, tout segment joignant toute paire de points de C est contenu dans C



Propriété 10 :

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Si il existe un réel M tel que pour tout point $a \in U$ on a

$$\left\|\vec{\nabla}_x f\right\|_1 = \sum_{j=1}^{p} \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x \right| \leq M$$

alors f est M-lipschitzienne sur U.

Démonstration :

Rappel : Si il existe un réel M tel que

$$\forall x \in [a,b],\ \left\|\vec{\nabla}_x f\right\|_1 = \sum_{j=1}^{p} \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_x \right| \leq M$$

alors $\quad |f(b) - f(a)| \leq M \|b-a\|_1$

appliquer le théorème des accroissements finis à toutes les paires de points de U

$$\Rightarrow \quad \forall (a,b) \in U,\ |f(b) - f(a)| \leq M \|b-a\|_1$$

ce qui est la définition d'une application M-lipschitzienne.

Propriété 11 : (fonction constante)

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Alors f est constante sur U si, et seulement si, $\vec{\nabla}_a f$ est nul pour tout $a \in U$, c'est-à-dire

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ \forall a \in U,\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a = 0$$

alors f est M-lipschitzienne sur U.

Démonstration :

$$f \text{ constante } \Longleftrightarrow f \text{ 0-lipschitzienne}$$

On considère dans cette partie, les équations aux dérivées partielles du 1er ordre

c'est-à-dire des équations fonctionnelles de la forme

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, f, x, y\right) = 0$$

où la fonction f inconnue est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

exemples :

$$2\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} + 3\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = x^2 e^y$$

$$2y\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} + 3x\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = xy$$

Théorème 8 :

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U de l'EDP

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = g(x,y) \tag{4.4}$$

sont de la forme

$$f(x,y) = K(y) + \int g(x,y)dx$$

où $\int g(x,y)dx$ est une primitive quelconque de g par rapport à la variable x. K est une fonction quelconque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}$ correspondant à la projection de U sur l'axe Oy.

Démonstration : trivial

- pas aussi simple que l'EDP précédente
- on cherchera des solutions à des EDP du 1er ordre un peu plus complexe.
  - pas de méthodes générales

  - résolution par changement de variables ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme)

$\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et changement de variables

Définition 7 : ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application ϕ de U dans V est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V, si, et seulement si, les propriétés suivantes sont vérifiées

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
2. ϕ réalise une bijection de U dans V.
3. ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Quel est l'intérêt d'introduire le concept de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ?

Considérons une EDP portant sur la fonction inconnue f

Soit ϕ un changement de variables. $(x, y) = \phi(u, v)$

Alors $h = f \circ \phi$

1. Si ϕ est $\mathcal{C}^1$ alors h est $\mathcal{C}^1$ par composition de fonctions $\mathcal{C}^1$
2. Si ϕ est une bijection

   nouvelles variables $\longleftrightarrow$ anciennes variables
3. Si ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ alors $f = h \circ \phi^{-1}$ et f est bien $\mathcal{C}^1$

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, f, x, y\right) = 0 \quad \underset{\phi}{\longleftrightarrow} \quad H\left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}, h, u, v\right) = 0$$

trop dur

$\mathcal{C}^1$-difféomorphe

plus facile

Propriété 12 :

Si ϕ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $p = n$ et ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Démonstration :

→ Une application linéaire est une bijection si et seulement si $n = p$

→ ϕ est linéaire ⇒ $\mathcal{C}^1$

→ ϕ^{-1} est linéaire ⇒ $\mathcal{C}^1$

⇒ Finalement l'application linéaire est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Propriété 13 : (caractérisation rapide d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si l'application ϕ de U dans V vérifie les 3 prorpiétés suivantes

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U
2. ϕ réalise une bijection de U dans V
3. pour tout point a de U, $D_a\phi$ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

alors $p = n$ et ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.

Démonstration : Admis.

Propriété 14 :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Soit ϕ une application de U dans $\mathbb{R}^n$. Si le jacobien associé à l'application ϕ, en a, est non nul alors $D_a\phi$ est une application linéaire bijective en a.

Démonstration : voir polycopié p. 105

Exemple : Soit U et V les deux ensembles définis par

$$U = \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$$
$$V = \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}\}$$

et l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \quad U & \to & V \\ (\rho, \theta, \phi) & \mapsto & f(\rho,\theta,\phi) = (\rho \sin\theta \sin\phi, \rho \sin\theta \sin\phi, \rho\cos\phi) \\ & & \qquad = (f_1, f_2, f_3) \end{array}$$

alors f est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. En effet

1. f est $\mathcal{C}^1$ sur U car toutes les applications composantes le sont.
2. f est une bijection de U dans V
3. montrons maintenant que $D_a f$ pour tout $a \in U$ est bijective. Pour cela déterminons le jacobien

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial \rho}\right|_a & \left.\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right|_a & \left.\frac{\partial f_1}{\partial \phi}\right|_a \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial \rho}\right|_a & \left.\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\right|_a & \left.\frac{\partial f_2}{\partial \phi}\right|_a \\ \left.\frac{\partial f_3}{\partial \rho}\right|_a & \left.\frac{\partial f_3}{\partial \theta}\right|_a & \left.\frac{\partial f_3}{\partial \phi}\right|_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}$$

et donc $|J_f(a)| = -\rho^2 \sin\phi \neq 0$ pour tout $a \in U$.

Résolution des EDPs par changement de variables

<table>
<tr><th>Direct</th><th>Indirect</th></tr>
<tr><td>$(x;y)=\varphi(u,v)$
$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ (u;v) & \longmapsto & (x(u,v);y(u,v)) \end{array}\right.$</td><td>$(u;v)=\varphi(x,y)$
$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ (x;y) & \longmapsto & (u(x,y);v(x,y)) \end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.</td></tr>
<tr><td>Posons $g=f\circ\varphi$ avec $f\in\mathscr{C}^1(U;\mathbb{R})$
Ainsi $g\in\mathscr{C}^1(V;\mathbb{R})$</td><td>Posons $g=f\circ\varphi^{-1}$, c'est-à-dire $f=g\circ\varphi$, avec $f\in\mathscr{C}^1(U;\mathbb{R})$
Ainsi $g\in\mathscr{C}^1(V;\mathbb{R})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Changement de variables</td></tr>
<tr><td>$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial u} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}\frac{\partial x}{\partial u}+\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}\frac{\partial x}{\partial v}+\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}}\frac{\partial y}{\partial v} \end{array}\right.$
Exprimer (E) à l'aide de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en reportant $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$
Si le changement de variable est simple, il vaut parfois mieux l'inverser pour passer dans le cas « Indirect ».</td><td>$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right.$
Injecter directement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ dans (E) en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Résoudre l'équation (E') : $F\left(\frac{\partial g}{\partial u};\frac{\partial g}{\partial v};g;u;v\right)=0$</td></tr>
<tr><td>Revenir, si le changement de variable est simple à inverser, aux variables initiales x et y en utilisant $(u;v)=\varphi^{-1}(x,y)$</td><td>Revenir aux variables initiales x et y en utilisant $(u;v)=\varphi(x,y)$.</td></tr>
</table>

Exemple :

$$2\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = x^2 y$$

en utilisant le changement de variables $(u, v) = (x, x + 2y)$

FAIT A LA MAIN EN CLASSE

$\longrightarrow$ définition des dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2

$\longrightarrow$ résolution des systèmes d'EDPs d'ordre 1

$\longrightarrow$ résolution des EDPs d'ordre 2

$\longrightarrow$ recherche des extremums des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1 : (Dérivées partielles d'ordre supérieur)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, f une application de U dans $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(i_1, i_2, .., i_k) \in [\![1, p]\!]^k$ un k-uplet d'entiers.

On dit que f admet une dérivée partielle $k$ème en a par rapport aux variables numéro $i_1, ..., i_k$ si, et seulement si

— f admet une dérivée $(k-1)$ème par rapport aux variables numéro $i_1, i_2, ..., i_{k-1}$ sur un voisinage de a.

— cette dérivée partielle $(k-1)$ème admet, elle-même, une dérivée partielle première en a par rapport à la variable $k$ème.

Dans ce cas, cette dernière dérivée est appelée la dérivée partielle $k$ème en a par rapport aux variables numéro $i_1, i_2, ..., i_k$. On note cette dérivée

$$\left.\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}\right|_a$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_a \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_a \qquad \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\right|_a$$

Exemple :

Soit $f(x,y,z) = xy^2z^3$

Alors

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\right|_{x,y,z} = \left.\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right|_{x,y,z} \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x,y,z} = \left.\frac{\partial^2(3xy^2z^2)}{\partial x \partial y}\right|_{x,y,z}$$
$$= \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x,y,z} \left.\frac{\partial(3xy^2z^2)}{\partial y}\right|_{x,y,z} = \left.\frac{\partial(6xyz^2)}{\partial x}\right|_{x,y,z} = 6yz^2$$

Définition 2 : (fonction de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. L'application f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, si, et seulement si, toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U. L'application f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, elle est $\mathcal{C}^k$.

Propriété 1 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. f est $\mathcal{C}^k$ sur U. Alors toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont définies et continues.

Démonstration : Admis.

structure algébrique de l'espace $\mathcal{C}^k(U,F)$
(espace des fonctions $\mathcal{C}^k$ sur $U \subset \mathbb{R}^p$)

$\longleftrightarrow$ structure algébrique de l'espace $\mathcal{C}^1(U,F)$

- espace vectoriel
- si $f,\ g \in \mathcal{C}^k(U,F)$ alors $f \times g \in \mathcal{C}^k(U,F)$
- **Théorème 1 : (stabilité de $\mathcal{C}^k$ par composition)**

  Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^q$. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et g une application de classe $\mathcal{C}^k$ de V dans $\mathbb{R}^n$. Si $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Démonstration : Admis.

Théorème 2 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^n$. On a équivalence entre

1. la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$.
2. les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathbb{R}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Démonstration : évident.

$$\begin{array}{rccl} f & : U \subset \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = \Big(f_1(x_1,\dots,x_p),\dots,f_n(x_1,\dots,x_p)\Big) \end{array}$$

où les f_i sont des applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Alors, si : $\forall i \in [\![1 \ , \ n]\!]$, $f_i \in \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{C}^k(U,\mathbb{R}^n)$

Théorème 3 : (théorème de Schwarz)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^q$. Soit $a \in U$ et $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont définies et continues en a alors

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right|_a = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_a$$

Démonstration : Admis.

Soit la fonction f de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

$$\text{Alors} \begin{cases} \text{si } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \\ \text{si } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ sont définies} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Théorème 3 : (théorème de Schwarz)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^q$. Soit $a \in U$ et $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont définies et continues en a alors

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right|_a = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_a$$

exemple 1 :

Soit la fonction $f(x,y) = x\sin(x)\sin(y)$

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$

produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ $\Rightarrow$ Cauchy-Scwarz rempli

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \big(\sin(x) + x\cos(x)\big)\sin(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x\sin(x)\cos(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \big(\sin(x) + x\cos(x)\big)\cos(y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \big(\sin(x) + x\cos(x)\big)\cos(y) \end{cases}$$

exemple 2 : cas où il n'y a pas égalité

Soit la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Calculons les dérivées partielles du 1er ordre en $(0,0)$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,0} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\right) = 0 \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{0,0} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\right) = 0 \end{cases}$$

en un point $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \frac{y(4x^2y^2+x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{0,0} = -\frac{x(4x^2y^2-x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

Les fonctions dérivées partielles premières sont donc

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \begin{cases} \frac{y(4x^2y^2+x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = \begin{cases} -\frac{x(4x^2y^2-x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

coordonnées polaires $\longrightarrow$ applications continues

Etudions maintenant les dérivées secondes croisées en $(0,0)$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{0,0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t,0} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{0,0} \right) = \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{t^5} = 1$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|_{0,0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,t} - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,0} \right) = \lim_{t\to 0} -\frac{t^5}{t^5} = -1$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{0,0} \neq \left.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right|_{0,0}$$

On cherche ici à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = g(x,y) \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = h(x,y) \end{cases} \qquad \text{où } f,\ g \text{ et } h \text{ sont } \mathcal{C}^1$$

Etape 1 : On vérifie que $\left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_{x,y} = \left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_{x,y}$

En effet

g et h sont $\mathcal{C}^1$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ sont continues

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial h}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ continues $\Rightarrow$ f est $\mathcal{C}^2$

Schwarz $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x}$

On cherche ici à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = g(x,y) \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = h(x,y) \end{cases} \qquad \text{où } f,\ g \text{ et } h \text{ sont } \mathcal{C}^1$$

Etape 2 :

On résoud l'une des deux équations aux dérivées partielles.

par exemple la première :

$$f(x,y) = G(x,y) + K_1(y)$$

où G est une primtive selon x de g et K_1 est une fonction quelconque $\mathcal{C}^2$

Etape 3 :

On dérive maintenant par l'autre variable la solution obtenue à l'étape 2.

Puis on injecte cette dérivée dans l'EDP pas encore été utilisée

$\Rightarrow$ équation sur K_1

On cherche ici à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = g(x,y) \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = h(x,y) \end{cases} \qquad \text{où } f,\ g \text{ et } h \text{ sont } \mathcal{C}^1$$

Etape 4 :

On résoud l'équation obtenue à l'étape 3.

Etape 5 :

On écrit alors la solution obtenue à l'étape 2 et l'étape 4

Exemple :

On cherche à résoudre, sur $\mathbb{R}^2$, le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x,y} = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) - \sin x = g(x,y) \\ \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{x,y} = (x+1)\cos(x+y) = h(x,y) \end{cases}$$

Fait à la main

Théorème 4 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ sont de la forme

$$f(x,y) = xG(y) + H(y)$$

où G et H sont des fonctions $\mathcal{C}^2$ sur la projection de U sur l'axe Oy.

Démonstration : il suffit d'intégrer deux fois en utilisant le théorème d'intégration des EDP du chapitre précédent.

Théorème 5 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ sont de la forme

$$f(x,y) = G(x) + H(y)$$

où G et H sont des fonctions $\mathcal{C}^2$ sur la projection de U sur l'axe Ox et $0y$ respectivement.

Démonstration : tout autant trivial.

Comme pour les EDPs du 1er ordre

on va utiliser des $\underbrace{\text{changements de variables}}_{\mathcal{C}^2\text{-difféomorphisme}}$ pour simplifier l'EDP

Définition 3 : ($\mathcal{C}^2$-difféomorphisme)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application ϕ de U dans V est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U dans V, si, et seulement si, les propriétés suivantes sont vérifiées

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
2. ϕ réalise une bijection de U dans V.
3. ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V.

Exemple de résolution d'une EDP du 2nd ordre :

Trouver les applications f de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solutions de

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x,t} - \frac{1}{c^2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right|_{x,t} = 0$$

en utilisant le changement de variable $(X,Y) = (x+ct, x-ct)$.

Fait à la main en cours

Définition 4 : (maximum local ou strict, minimum local ou strict)

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$, $a \in \mathring{A}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. Alors :

1. f admet un minimum local en a, si, et seulement si, il existe un voisinage $V \subset A$ de a tel que
$$\forall x \in V,\ f(x) \geq f(a)$$
2. f admet un minimum strict en a, si, et seulement si, il existe un voisinage $V \subset A$ de a tel que
$$\forall x \in V \backslash \{a\},\ f(x) > f(a)$$
3. f admet un maximum local en a, si, et seulement si, il existe un voisinage $V \subset A$ de a tel que
$$\forall x \in V,\ f(x) \leq f(a)$$
4. f admet un maximum strict en a, si, et seulement si, il existe un voisinage $V \subset A$ de a tel que
$$\forall x \in V \backslash \{a\},\ f(x) < f(a)$$

On appelle, de manière générique, les maximums et les minimums des extremums.

Définition 5 : (extremum global)

Soient A une partie de $\mathbb{R}^p$, $a \in \mathring{A}$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$. Alors :

1. f admet un minimum global en a, si, et seulement si

$$\forall x \in A,\ \ f(x) \geq f(a)$$

2. f admet un maximum global en a, si, et seulement si

$$\forall x \in A,\ \ f(x) \leq f(a)$$

Dans les définitions précédentes, il faut que $a \in \mathring{A}$

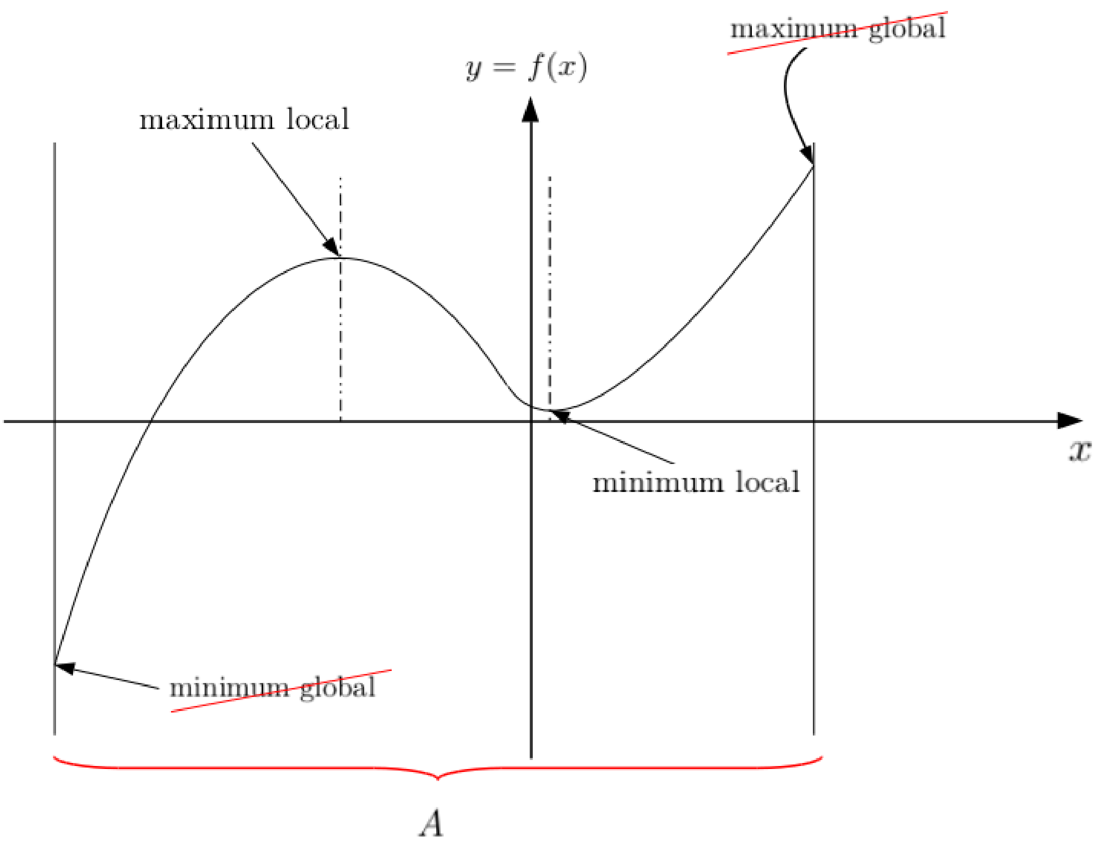
La définition d'extremums ne concerne pas les bords du domaines

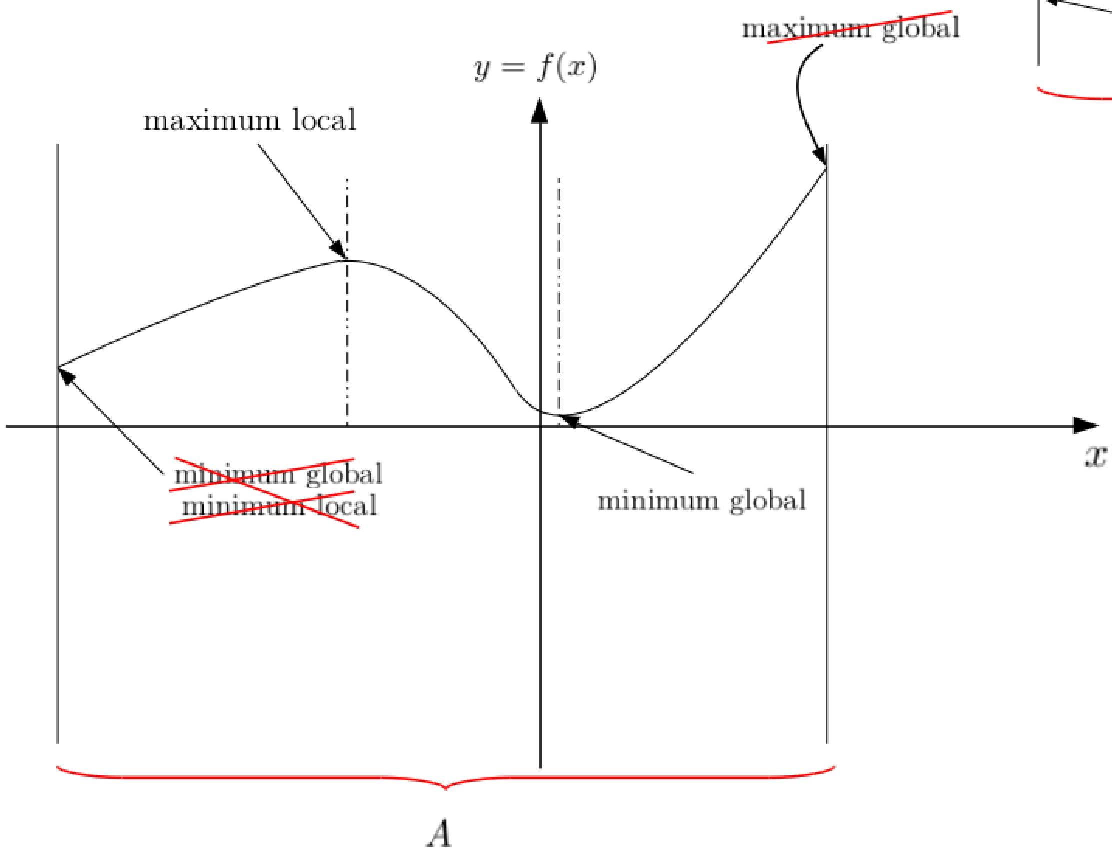
Définition 7 : (point critique)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. On dit que a est un point critique de f, si, et seulement si, toutes les dérivées partielles premières de f en a sont définies et égales à 0, c'est-à-dire, si, et seulement si, le gradient de f en a est défini et nul :

$$\vec{\nabla}_a f = 0_{\mathbb{R}^p}$$

Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$





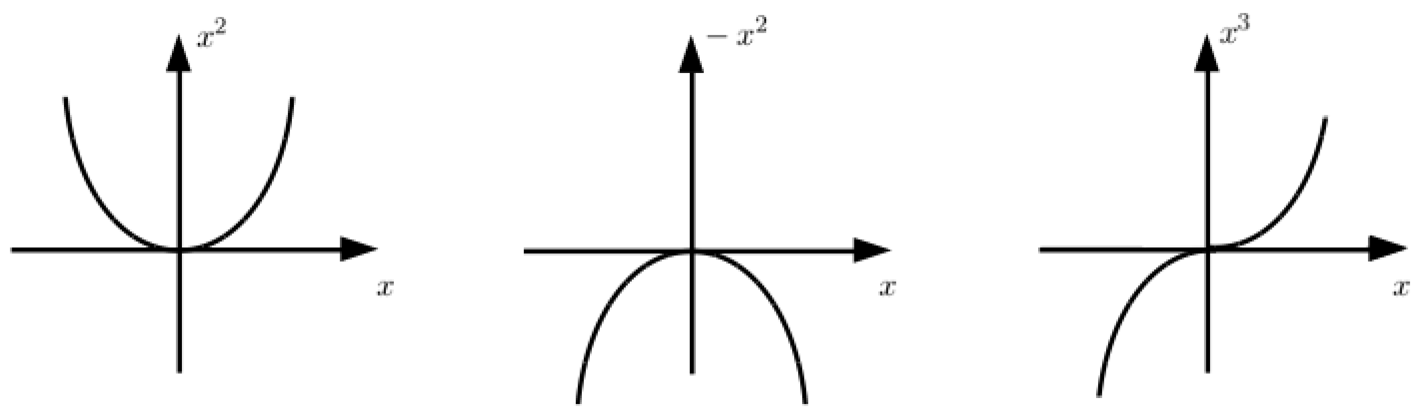
Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathring{A}$

Condition nécessaire pour que a soit un extremum	$f'(a) = 0$

mais ce n'est pas suffisant



$f''(a) > 0$
$f'(a) = 0$

$f''(a) < 0$
$f'(a) = 0$

$f''(a) = 0$
$f'(a) = 0$

c'est la dérivée seconde qui permet de conclure

Propriété 2 :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en a et que toutes les dérivées partielles de f en a sont définies, alors a est un point critique de f.

Démonstration : cas où a est un minimum local

Il existe alors $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$ et pour $\forall x \in B(a,r)$, $f(x) \geq f(a)$

Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$
Soit $i \in [\![1,p]\!]$ $\Rightarrow$ $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+he_i) - f(a)}{h}$

Or si $|h| < r$ (ce qui est le cas à partir d'un moment puisque h tend vers 0)

nous avons $a + he_i \in B(a,r)$ $\Rightarrow$ $f(a+he_i) - f(a) \geq 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+he_i) - f(a)}{h} \geq 0 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+he_i) - f(a)}{h} \leq 0 \end{array}\right\} \text{ d'où une limite nulle}$$

Comme cela est vrai pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\vec{\nabla}_a f = 0_{\mathbb{R}^p}$

Comme dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

il faut étudier les dérivées du second ordre pour conclure

Propriété 3 : (Développement limité d'ordre 2)

Soient U un ouvert de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soient $a \in U$ et $U_0 = \{h \in \mathbb{R}^p / a + h \in U\}$. Alors, il existe une application $\epsilon \ : \ U_0 \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{h \to 0_{\mathbb{R}^p}} \epsilon(h) = 0$ et

$$\forall h = (h_1, ..., h_p) \in U_0,$$

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_a + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_a + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

Cette relation est appelée développement limité de f à l'ordre 2 en a.

Démonstration : admis.

Théorème 6 : (Condition suffisante d'ordre 2)

Soient U un ouvert de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit a un point critique de f. On introduit la fonction Q

$$\begin{array}{rccl} Q : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ & h = (h_1, \ldots, h_p) & \mapsto & Q(h) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_a \end{array}$$

S'il existe un voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$ sur lequel

1. Q est positive et ne s'annule qu'en $h = 0$, alors f admet un minimum local strict en a
2. Q est négative et ne s'annule qu'en $h = 0$, alors f admet un maximum local strict en a.

Si pour tout voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$, Q admet des valeurs positives et négatives, alors f n'admet pas d'extremum local en a.

Démonstration :

Pour h suffisamment petit, $\vec{\nabla}_{(a+h)} f \approx 0_{\mathbb{R}^p}$ puisque a est un point critique

Donc

$$f(a+h) - f(a) \approx \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p h_i h_j \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_a = Q(h)$$

Si Q est positif alors $f(a+h) > f(a)$ donc minimum.
Si Q est négatif alors $f(a+h) < f(a)$ donc maximum

Définition 8 : (Matrice hessienne)

Soient U un ouvert de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $a \in U$ un point critique de f. On définit alors la matrice hessienne de f en a, notée $H_f(a)$, par

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}\right|_a \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}\right|_a & \cdots & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}\right|_a \end{pmatrix}$$

Définition 9 : (Notations de Monge)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit $a \in U$ un point critique de f. On définit alors les notations de Monge comme

$$r = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_a \qquad s = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_a = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_a \qquad t = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_a$$

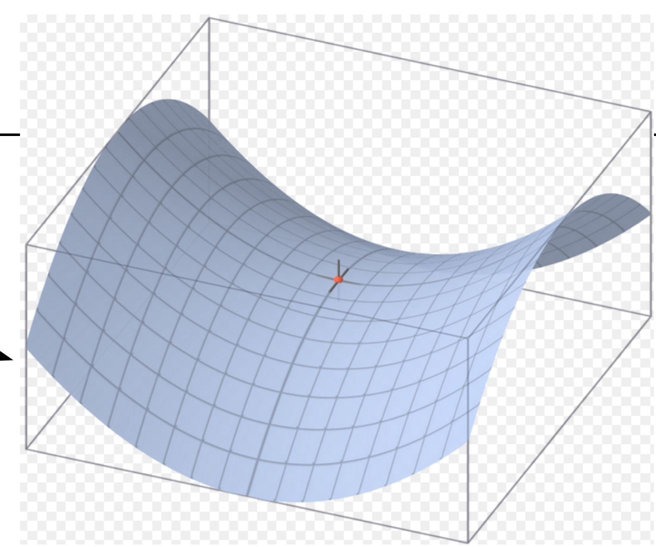
alors avec ces notations

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Théorème 7 : (Condition suffisante d'ordre 2)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Soit a un point critique de f. Alors

1. Si $\det\left(H_f(a)\right) = rt - s^2 > 0$:
   (a) si $r > 0$, alors f admet un minimum local strict en a.
   (b) si $r < 0$, alors f admet un maximum local strict en a.
2. Si $\det\left(H_f(a)\right) = rt - s^2 < 0$, alors f n'a pas d'extremum local en a. Dans ce cas, a est appelé point-col, ou point-selle de f.
3. Si $\det\left(H_f(a)\right) = rt - s^2 = 0$, alors on ne peut pas conclure sans faire une étude locale poussée.



Démonstration distribuée en cours

$\boxed{\text{Plan général de recherche d'extrema de } f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$

Étape 0 Vérification du caractère $\mathscr{C}^2$ de f sur U.

Étape 1 Recherche des points critiques $(x;y)$ de f en résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right.$$

Étape 2 Pour chaque point critique, calculer r, s, et t, puis :

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, c'est un minimum local strict.
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, c'est un maximum local strict.
- Si $rt - s^2 < 0$, c'est un point-selle.
- Si $rt - s^2 = 0$, il faut faire une étude locale (DL à l'ordre 3 par exemple)

Étape 3

- Recherche de minima globaux :
  - Si f n'est pas minorée, pas de minimum global.
  - Si f est minorée, on choisit le (ou les) minimum(a) local(locaux) strict(s) dont la valeur de f est la plus faible.
- Recherche de maxima globaux :
  - Si f n'est pas majorée, pas de maximum global.
  - Si f est majorée, on choisit le (ou les) maximum(a) local(locaux) strict(s) dont la valeur de f est la plus forte.