Algèbre-Premier semestre 2021

Algèbre-Premier semestre 2021

Thèmes

- Logique et raisonnement
- Ensembles
- Relations binaires
- Applications
- Nombres complexes
- Polynômes
- Fractions rationnelles

Fractions Rationnelles

Dans ce chapitre nous continuons à utiliser $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

À partir de l'ensemble $\mathbb{Z}$, nous pouvons construire l'ensemble $\mathbb{Q}$. De la même manière, nous pouvons construire à partir de $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles. Dans l'ensemble des fractions rationnelles, il va nous être possible, par exemple, de parler de l'inverse d'un polynôme. Dans la suite, nous allons donc voir que les fractions rationnelles sont aux polynômes ce que les nombres rationnels sont aux entiers relatifs.

Définition (Fractions Rationnelles)

Une fraction rationnelle *à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme*

$$R = \frac{P}{Q},$$

où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont deux polynômes avec $Q \neq 0$. Autrement dit, une fraction rationnelle *est un* quotient *entre deux polyômes.*
Si $R = \dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle, le couple (P, Q) s'appelle un représentant *de la fraction rationnelle R.*

Définition

L'ensemble des fractions rationnelles est noté $\mathbb{K}(X)$.

Remarque : On identifie tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ à la fraction rationnelle $\dfrac{P}{1}$. Cette identification fait de $\mathbb{K}[X]$ un sous-ensemble de $\mathbb{K}(X)$.

Fractions Rationnelles

Définition (Égalité entre fractions rationnelles)

Soit $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$. Alors on dit que les deux fractions rationnelles $\dfrac{A}{B}$ et $\dfrac{C}{D}$ sont égales, si et seulement si

$$A \cdot D = C \cdot B.$$

Exemple :

- Dans $\mathbb{R}(X)$, les fractions $\dfrac{1}{X}$ et $\dfrac{X+1}{X(X+1)}$ sont égales car :

$$1 \cdot X(X+1) = X \cdot (X+1).$$

Fractions Rationnelles

Remarque : Une fraction rationnelles possède plusieurs représentants. Autrement dit, l'écriture d'une fraction rationelle $R \in \mathbb{K}(X)$ comme quotient de deux polynomes, **n'est pas unique** :

$$R(X) = \frac{1}{X} = \frac{X+1}{X(X+1)} = \frac{(X+3)(X^2+1)}{X(X+3)(X^2+1)}.$$

Entre tous les façons d'exprimer une fraction rationnelle R, nous allons surtout être interessés par la forme irréductible de R.

Fractions Rationnelles

Avant de pouvoir parler de la forme irréductible d'une fraction rationnelle, nous devons introduire la notion de polynômes premiers.

Définition (Polynômes premiers)

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
On dit que P et Q sont deux polynômes premiers entre eux *si et seulement si les seuls diviseurs communs à P et Q sont les polynômes constants non nuls.*

Exemples :

- $(X-1)$ et $(2X+4)$ sont premiers entre eux.
- X^2+X+1 et $X-1$ sont premiers entre eux.
- $2X^2+2X-4$ et X^3-1 ne sont pas premiers entre eux.
  En effet

$$\begin{aligned}
(2X^2+2X-4) &= (X-1)(2X+4) \quad\Longrightarrow\quad (X-1)|(2X^2+2X-4) \\
(X^3-1) &= (X-1)(X^2+X+1) \quad\Longrightarrow\quad (X-1)|(X^3-1).
\end{aligned}$$

Fractions Rationnelles

Définition (Forme irréductible)

Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle.*

On appelle forme irréductible *de* R *toute écriture de la forme* $R = \dfrac{P}{Q}$ *avec* P *et* Q *deux polynômes premiers entres eux. Une telle écriture est toujours possible et* unique à multiplications près par des scalaires non nuls*.*

Fractions Rationnelles

Exemple :

- $R(X) = \dfrac{(X+1)}{X(X+1)}$ n'est pas sous forme irréductible. Une forme irréductible de $R(X)$ est :
$$R(X) = \frac{1}{X}.$$
- $R(X) = \dfrac{2X^2+2X-4}{(X-1)^3}$ n'est pas sous forme irréductible. Une forme irréductible de $R(X)$ est :
$$R(X) = \frac{2X+4}{X^2-2X+1}.$$
- $R(X) = \dfrac{2X^2+2X-4}{X^3-1}$ n'est pas sous forme irréductible. Une forme irréductible de $R(X)$ est :
$$R(X) = \frac{2X+4}{X^2+X+1}.$$

Fractions Rationnelles

Étudions quelques opérations sur l'ensemble des fractions rationnelles.

Définition (Addition-Multiplication)

Soit $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$ *avec* $B \neq 0$ *et* $D \neq 0$.
On définit la somme, le produit, le produit par un scalaire et le quotient de la façon suivante :

- Somme :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D + B \cdot C}{B \cdot D}.$$

- Produit :

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

- Produit par un Scalaire : *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \cdot \frac{A}{B} = \frac{\lambda A}{B}$$

- Quotient :

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}.$$

Fractions Rationnelles

Remarque : Les définitions de somme et produit ne dépendent pas du choix des représentants (propriété indispensable).

Définition (Dérivée)

Soit $R = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle. On appelle* dérivée *de* R *la fraction rationnelle*

$$R' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

Remarque : La dérivée de R ne dépend pas du choix de P et Q.

Fractions Rationnelles

La dérivée satisfait les propriétés suivantes :

Proposition

Soient R et S deux fractions rationnelles dans $\mathbb{K}(X)$.

- $(R+S)' = R' + S'$.
- *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda R)' = \lambda R'$.
- $(R \cdot S)' = R' \cdot S + R \cdot S'$.
- $\left(\dfrac{R}{S}\right)' = \dfrac{R'S - RS'}{S^2}$.

Fractions Rationnelles

Définition (Degré d'une fraction rationnelle)

Soit $R = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle. On appelle* degré *de* R *l'entier relatif :*

$$\deg(R) = \deg(P) - \deg(Q).$$

Remarques :

- Le **degré** de R ne depend pas du choix de P et Q.
- Le degré d'une fraction rationnelle $R = \dfrac{P}{Q}$ est ainsi soit un entier **relatif** (si $P \neq 0$), soit $-\infty$ (si $P = 0$).

Proposition

Pour tous $R, S \in \mathbb{K}(X)$*, nous avons*

- $\deg(R + S) \leq \max(\deg(R), \deg(S))$.
- $\deg(R \cdot S) = \deg(R) + \deg(S)$.

Fractions Rationnelles

Définition (Zéro et Pôle d'une fraction rationnelle)

Soit $R = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle* IRRÉDUCTIBLE.

- *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On dit que* λ *est un* zéro *de* R *si* λ *est une racine de* P. *La multiplicité de* λ *dans* P *est alors appelée la* multiplicité de λ dans R.
- *Soit* $\mu \in \mathbb{K}$. *On dit que* μ *est un* pôle *de* R *si* μ *est une racine de* Q. *La multiplicité de* μ *dans* Q *est alors appelée la* multiplicité de μ dans R.

Remarque : Cette fois nous avons imposé à la fraction rationnelle d'être sous forme irréductible. Cela implique qu'un élément de $\mathbb{K}$ ne peut pas être à la fois pôle et zéro : un élément de $\mathbb{K}$ est soit un pôle, soit un zéro, soit rien du tout.

Fractions Rationnelles

Exemple : Dans $\mathbb{R}[X]$, la fraction

$$\begin{aligned} R(X) &= \frac{(X+1)(X-2)^4(X-3)(X-4)^3(X+7)(X^2+X+1)}{X^3(X+1)^2(X-3)(X-4)(X-5)^2(X^2+1)^3} \\ &= \frac{(X-2)^4(X-4)^2(X+7)(X^2+X+1)}{X^3(X+1)(X-5)^2(X^2+1)^3}. \end{aligned}$$

a pour zéros :

- 2 de multiplicité 4.
- 4 de de multiplicité 2.
- -7 de multiplicité 1.

et pour pôles :

- 0 de multiplicité 3.
- -1 de multiplicité 1.
- 5 de de multiplicité 2.

3 n'est ni un pôle ni un zéro.

Fractions Rationnelles

Théorème (Partie Entière)

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle. Il existe un unique polynôme* $E \in \mathbb{K}[X]$ *et une unique fraction rationnelle* $R \in \mathbb{K}(X)$ *pour lesquels :*

$$F = E + R \quad \textit{et} \;\; \deg(R) < 0.$$

Le polynôme E *est appelé la* partie entière *de* F *et* n'est autre que le quotient de la division euclidienne de P par Q.

Remarque :

- Pour calculer la partie entière d'une fraction rationnelle il suffit de faire la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
- Si le degré de la fraction rationnelle est négatif, alors la partie entière est nulle.

Fractions Rationnelles

Exemple : Soit $R = \dfrac{2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1}{X^2 - X + 1}$. Alors

$$2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1 = (X^2 - X + 1)(2X^2 + X - 3) + (-X + 2)$$

D'où on obtient

$$\begin{aligned}\frac{2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1}{X^2 - X + 1} &= \frac{(X^2 - X + 1)(2X^2 + X - 3) + (-X + 2)}{X^2 - X + 1} \\ &= (2X^2 + X - 3) + \frac{-X + 2}{X^2 - X + 1}\end{aligned}$$

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème

Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ de partie entière E et de pôles distincts $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_r$. Il existe une unique famille des nombres complexes

$$(a_{ik})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq m_i}$$

telles que

$$R = \underbrace{E}_{\text{partie entiere de } R} + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X-\lambda_i)^k}}_{\text{partie polaire relative au pole } \lambda_i}$$

Cette décomposition de R est appelée décomposition en éléments simples *sur $\mathbb{C}$.*

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème

Soit $R = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ *sous* forme irréductible, *de partie entière* E. *Soit la décomposition de* Q *en facteurs irréductibles :*

$$Q = \alpha \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} (X^2 + b_j X + c_j)^{n_j}.$$

Alors il existe des familles uniques de réels

$$(a_{ik})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq m_i} \quad ; \quad (u_{jk})_{1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq n_j} \quad ; \quad (v_{jk})_{1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq n_j}$$

telles que

$$R = \underbrace{E}_{\text{partie entière de } R} + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \lambda_i)^k}}_{\text{partie polaire relative au pole } \lambda_i} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{u_{jk} X + v_{jk}}{(X^2 + b_j X + c_j)^k}$$

Cette décomposition de R *est appelée décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{R}$.

Fractions Rationnelles

Notation : Dans la décomposition de la fraction rationnelle R dans $\mathbb{R}(X)$:

- Les fractions $\dfrac{a_{ik}}{(X-\lambda_i)^k}$ sont appelées **éléments simples de première espèce**.
- Les fractions $\dfrac{u_{jk}X+v_{jk}}{(X^2+b_jX+c_j)^k}$ sont appelées **éléments simples de seconde espèce**.

Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Corollaire

Soit $R = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ *sous* forme irréductible, *de partie entière* E*. Soit la décomposition de* Q *en facteurs irréductibles :*

$$\begin{aligned} Q &= \alpha \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} (X^2+b_jX+c_j)^{n_j} \quad \textit{dans} \;\; \mathbb{R}[X] \\ &= \alpha \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{s} ((X-\mu_i)\cdot(X-\overline{\mu_i}))^{n_j} \quad \textit{dans} \;\; \mathbb{C}[X]. \end{aligned}$$

Alors il existe des familles uniques $(a_{ik})_{1\leq i\leq r, 1\leq k\leq m_i}$ *et* $(\eta_{jk})_{1\leq j\leq s, 1\leq k\leq n_j}$ *telles que*

$$R = \underbrace{E}_{\text{partie entiere de } R} + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X-\lambda_i)^k}}_{\text{partie polaire relative au pole } \lambda_i}$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} \underbrace{\sum_{k=1}^{n_j} \left(\frac{\eta_{jk}}{(X-\mu_j)^k} + \frac{\overline{\eta}_{jk}}{(X-\overline{\mu_j})^k} \right)}_{\text{partie polaire relative au poles } \mu_j \text{ et } \overline{\mu_j}}.$$

C'est la décomposition en éléments simples de R *dans* $\mathbb{C}(X)$*.*

Procédure à suivre pour la D.E.S

Soient

$$P = 2X^6 + 3X^5 - 3X^4 - 3X^3 - 3X^2 - 18X - 5 \quad \text{et} \quad Q = X^5 + X^4 - 2X^3 - X^2 - X + 2.$$

Nous allons calculer la décomposition en éléments simples de

$$F = \frac{2X^6 + 3X^5 - 3X^4 - 3X^3 - 3X^2 - 18X - 5}{X^5 + X^4 - 2X^3 - X^2 - X + 2}$$

Donnons la procédure à suivre :

(1) **Partie entière :** Puisque $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on fait la division euclidienne de P par Q pour extraire la partie entière de F. Nous avons :

$$F = \underbrace{2X+1}_{partie\ entiere\ de\ F} + \frac{X^3 - 21X - 7}{X^5 + X^4 - 2X^3 - X^2 - X + 2}$$

(2) **Polês de F :** Déterminer les pôles de F. Pour faire cela, on factorise le polynôme dénominateur de F en produit de facteurs irréductibles. Dans notre exemple, nous avons :

$$Q(1) = Q'(1) = Q(-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (X-1)^2(X+2) \text{ divise } Q.$$

Finalement, en effectuant la division euclidienne de Q par $(X-1)^2(X+2)$ on obtient :

$$Q(X) \;=\; (X-1)^2(X+2)(X^2+X+1) \qquad \text{dans } \mathbb{R}[X].$$

Procédure à suivre pour la D.E.S

Et

$$Q(X) = (X-1)^2(X+2)(X^2+X+1) = (X-1)^2(X+2)(X-j)(X-\bar{j}) \qquad \text{dans } \mathbb{C}[X],$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Ainsi 1 et -2 sont des pôles de F dans $\mathbb{R}$ d'ordre 2 et 1 respectivement, et le couple j, $\bar{j}$ sont des pôles simples de F sur $\mathbb{C}$.

(3) **Poser la décomposition en éléments simples de F** : Il existe des réels tels que la décomposition de F dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit sous la forme :

$$F = 2x+1+\underbrace{\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{(X-1)}}_{\textit{partie polaire relative au pole } 1}+\underbrace{\frac{c}{(X+2)}}_{\textit{partie polaire relative au pole } -2}+\frac{dX+e}{X^2+X+1}.$$

De plus, puisque F est une fraction rationnelle à coefficients réels, la décomposition de F dans $\mathbb{C}(X)$ s'écrit sous la forme :

$$F = 2x+1+\frac{a}{(X-1)^2}+\frac{b}{(X-1)}+\frac{c}{X+2}+\underbrace{\frac{\alpha}{X-j}+\frac{\overline{\alpha}}{X-\bar{j}}}_{\textit{partie polaire relative aux poles } j \textit{ et } \bar{j}}.$$

(4) **Calculer les coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simples de F** : Pour cela nous allons étudier des méthodes systématiques et efficaces adaptées à chaque type de pôle.

D.E.S-Pôles simples : Multiplication-Évaluation

Pôles simples : Commençons par calculer les coefficients associées à des poles simples. Pour faire cela nous allons introduire la méthode dite de **multiplication-évaluation.**

Multiplication-évaluation : Soit λ un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q}$, alors

$$Q = (X - \lambda)Q_1$$

avec $Q_1(\lambda) \neq 0$. Ainsi, F se décompose sous la forme :

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{X - \lambda} + F_0,$$

où λ n'est pas un pôle de la fraction rationnelle F_0. La procédure à suivre pour trouver α est la suivante :

1. **Multiplier F par $X - \lambda$** :

$$(X - \lambda)F(X) = (X - \lambda)\frac{P(X)}{(X - \lambda)Q_1(X)} = (X - \lambda) \cdot \frac{\alpha}{X - \lambda} + (X - \lambda)F_0(X).$$

2. **Simplifier :**

$$\frac{P}{Q_1} = \alpha + (X - \lambda)F_0.$$

3. **Substituer X par λ et calculer le coefficient** :

$$\frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} = \alpha + (\lambda - \lambda)F_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} = \alpha.$$

D.E.S-Pôles simples : Multiplication-Évaluation

Dans notre exemple $\lambda = -2$ est un pôle simple, implementons la méthode. Nous avons

$$(2X+1) + \frac{X^3 - 21X - 7}{(X-1)^2(X+2)(X^2+X+1)} = \frac{c}{X+2} + F_0$$

Multiplions F par $X+2$:

$$(X+2)\cdot(2X+1) + \frac{(X+2)\cdot(X^3 - 21X - 7)}{(X-1)^2(X+2)(X^2+X+1)} = (X+2)\cdot\frac{c}{X+2} + (X+2)\cdot F_0$$

Simplifions :

$$(X+2)\cdot(2X+1) + \frac{(X^3 - 21X - 7)}{(X-1)^2(X^2+X+1)} = c + (X+2)\cdot F_0.$$

Substituons X par -2 :

$$(-2+2)\cdot(2(-2)+1) + \frac{(-8+42-7)}{(-2-1)^2\cdot((-2)^2-2+1)} = c \quad \Longrightarrow \quad c = 1.$$

D.E.S-Pôles doubles : Multiplication-Évaluation

Étudions à présent le cas des pôles doubles.

Pôles doubles : Soit λ un pôle double de $F = \frac{P}{Q}$, alors

$$Q = (X - \lambda)^2 Q_1,$$

avec $Q_1(\lambda) \neq 0$. Ainsi, F se décompose sous la forme :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{\alpha}{(X-\lambda)^2} + \frac{\beta}{(X-\lambda)} + F_0,$$

où λ n'est pas un pôle de la fraction rationnelle F_0. La procédure à suivre pour trouver α et β est la suivante :

• **Premier coefficient :** Pour trouver α nous pouvons utiliser le principe de **multiplication-évaluation** introduit au moment d'étudier les pôles simples, mais au lieu de multiplier F par $(X - \lambda)$ on multiplie F par $(X - \lambda)^2$:

$$(X-\lambda)^2 \cdot \frac{P(X)}{(X-\lambda)^2 Q_1(X)} = (X-\lambda)^2 \cdot \frac{\alpha}{(X-\lambda)^2} + (X-\lambda)^2 \cdot \frac{\beta}{(X-\lambda)} + (X-\lambda)^2 \cdot F_0.$$

On simplifie :

$$\frac{P(X)}{Q_1(X)} = \alpha + (X-\lambda)\beta + (X-\lambda)^2 \cdot F_0.$$

Pour finalement substituer X par λ :

$$\frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} = \alpha.$$

D.E.S - Pôles doubles : Multiplication-Évaluation

Dans notre exemple $\lambda = 1$ est un pôle d'ordre 2, implémentons la méthode.
Nous avons :

$$(2X+1) + \frac{X^3 - 21X - 7}{(X-1)^2(X+2)(X^2+X+1)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{(X-1)} + F_0.$$

Multiplions F par $(X-1)^2$:

$$\begin{aligned}(X-1)^2 \cdot (2X+1) + \frac{(X-1)^2(X^3-21X-7)}{(X-1)^2(X+2)(X^2+X+1)} &= (X-1)^2 \cdot \frac{a}{(X-1)^2} \\ &+ (X-1)^2 \cdot \left(\frac{b}{(X-1)} + F_0\right).\end{aligned}$$

Simplifions :

$$(X-1)^2 \cdot (2X+1) + \frac{(X^3-21X-7)}{(X+2)(X^2+X+1)} = a + (X-1)b + (X-1)^2 \cdot F_0.$$

Subtituons X par 1 :

$$(-1-1)^2 \cdot (2(-1)+1) + \frac{(1^3-21-7)}{(1+2)(1^2+1+1)} = \frac{-27}{9} = -3 \quad \Longrightarrow \quad a = -3.$$

D.E.S - Pôles doubles : Soustraction

- **Deuxième coefficient :** Maintenant que l'on connaît le coefficient α dans

$$F = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{\alpha}{(X-\lambda)^2} + \frac{\beta}{(X-\lambda)} + F_0,$$

pour calculer β nous allons utiliser la méthode dite de **soustraction**.

Soustraction : La procédure à suivre pour trouver β est la suivante :

1. Ramener $\dfrac{\alpha}{(X-\lambda)^2}$ à gauche :

$$\frac{P(X)}{(X-\lambda)^2 Q_1(X)} - \frac{\alpha}{(X-\lambda)^2} = \frac{\beta}{(X-\lambda)} + F_0.$$

2. Mettre $F_1 = F - \dfrac{\alpha}{(X-\lambda)^2}$ au même dénominateur :

$$\frac{P(X) - \alpha \cdot Q_1(X)}{(X-\lambda)^2 Q_1(X)} = \frac{\beta}{(X-\lambda)} + F_0,$$

   puis simplifier la fraction à gauche. Le numérateur et le dénominateur se simplifient forcément (sinon il y a une erreur de calcul) et λ devient une racine simple de F_1.

3. Le coefficient β peut se calculer alors en utilisant le principe de **multiplication-évaluation :** on multiplie F_1 par $(X-\lambda)$, on simplifie puis on substitue X par λ.

D.E.S - Pôles doubles : Soustraction

Appliquons cette méthode à notre exemple pour calculer b :

$$F \quad = \quad \frac{b}{(X-1)} - \frac{3}{(X-1)^2} + F_0.$$

(1) Ramener $\dfrac{-3}{(X-1)^2}$ à gauche :

$$(2X+1) + \frac{X^3-21X+1}{(X+2)(X^2+X+1)(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)^2} = \frac{b}{X-1} + F_0.$$

(2) Mettre la fraction à gauche au même dénominateur, puis simplifier :

$$(2X+1) + \underbrace{\frac{4X^2+13X+1}{(X+2)(X^2+X+1)(X-1)}}_{F_1} = \frac{b}{(X-1)} + F_0.$$

On voit bien que 1 est une pôle simple pour la fraction rationnelle ainsi obtenue.
(3) Pour trouver β on multiplie F_1 par $(X-1)$, on simplifie et finalement on évalue en 1 :

$$F_1(X) = \frac{b}{(X-1)} + \ \cdots \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{multiplier\ \ par\ \ (X-1)} \quad \frac{4X^2+13X+1}{(X+2)(X^2+X+1)} = b + (X-1)\cdot(\ \cdots$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{substituer\ \ X\ \ par\ \ 1} \quad \frac{4+13+1}{(1+2)(1+1+1)} = 2 = b.$$

D.E.S - Élements simples de seconde espèce

Ainsi

$$F = 2x + 1 + \frac{2}{X-1} - \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{1}{X+2} + \frac{dX+e}{X^2+X+1} \qquad \text{dans } \mathbb{R}[X].$$

et

$$F = 2x + 1 + \frac{2}{X-1} - \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{1}{X+2} + \frac{\alpha}{X-j} + \frac{\overline{\alpha}}{X-\overline{j}} \qquad \text{dans } \mathbb{C}[X].$$

Pour trouver les coefficient d et e on dispose de deux méthodes :

- **Passage dans** $\mathbb{C}$:On calcule d'abord les coeffiecients α et $\overline{\alpha}$, puis on regroupe les éléments simples conjugués :

$$\begin{aligned}
F &= \left(\frac{\alpha}{X-j} + \frac{\overline{\alpha}}{X-\overline{j}}\right) + \cdots = \frac{\alpha(X-\overline{j}) + \overline{\alpha}(X-j)}{(X-j)(X-\overline{j})} + \cdots \\
&= \frac{(\alpha+\overline{\alpha})X - (\alpha\cdot\overline{j} + \overline{\alpha}\cdot j)}{X^2+X+1} + \cdots \\
\Longrightarrow &\quad \frac{(\alpha+\overline{\alpha})X - (\alpha\cdot\overline{j} + \overline{\alpha}\cdot j)}{X^2+X+1} = \frac{dX+e}{X^2+X+1}. \\
\Longrightarrow &\quad d = \alpha + \overline{\alpha} \quad \text{et} \quad e = -(\alpha\cdot\overline{j} + \overline{\alpha}\cdot j).
\end{aligned}$$

D.E.S - Élements simples de seconde espèce

Calculons donc α et $\overline{\alpha}$. Utilisons pour cela le principe de **multiplication-évaluation :** on multiplie F par $(X-j)$, on simplifie et finalement on substitue X par j :

$$F(X) = \frac{\alpha}{(X-j)} + \cdots \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{multiplier par } (X-j)} \frac{(X^3-21X-7)}{(X-1)^2(X+2)(X-\bar{j})} = \alpha + (X-j)\cdot(\cdots$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{substituer } X \text{ par } j} \frac{(j^3-21j-7)}{(j-1)^2(j+2)(j-\bar{j})} = -\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i = \alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\alpha} = -\frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} d &= 2\mathrm{Re}\left(-\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i\right) = -3 \\ e &= -2\mathrm{Re}\left(\left(-\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i\right)\cdot\bar{j}\right) = 1. \end{aligned}$$

D'où on obtient :

$$\begin{aligned} F &= 2x+1+\frac{2}{(X-1)} - \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+2)} + \frac{-\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{6}i}{(X-j)} + \frac{-\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{6}i}{(X-\bar{j})} \\ &= 2x+1+\frac{2}{(X-1)} - \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+2)} + \frac{-3X+1}{X^2+X+1}. \end{aligned}$$

D.E.S - Élements simples de seconde espèce

Deuxième mêthode pour trouver les coefficient d et e :

Multiplication-évaluation dans $\mathbb{C}$: La procédure à suivre pour trouver d et e est la suivante :

1. **On multiplie** F **par** $X^2 + X + 1$:

$$(X^2 + X + 1)F = (X^2 + X + 1)(2X + 1) + \frac{X^3 - 21X - 7}{(X-1)^2(X+2)} = (dX + e) + (X$$

2. **Substituer** X **par l'une des racines de** $X^2 + X + 1$:

$$(j^2 + j + 1)(2j + 1) + \frac{j^3 - 21j - 7}{(j-1)^2(j+2)} = dj + e \quad \Longrightarrow \quad \frac{6 + 21j}{3j - 3} = dj + e.$$

3. **On calcule** d **et** e **en séparant les parties réelle et imaginaire** (A vous de le faire) :

$$d = -3 \quad \text{et} \quad e = 1.$$

D.E.S - Pôles Multiples

Pôles d'ordre supérieur ou égal à 3 : Soit λ un pôle d'ordre $n \geq 3$ de $F = \frac{P}{Q}$, alors

$$Q = (X-\lambda)^n Q_1,$$

avec $Q_1(\lambda) \neq 0$. Ainsi, F se décompose sous la forme :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{a_0}{(X-\lambda)^n} + \frac{a_1}{(X-\lambda)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(X-\lambda)} + F_0,$$

où λ n'est pas un pôle de la fraction rationnelle F_0.

• **Premier coefficient** : Pour calculer a_0 nous pouvons utiliser le principle de **multiplication-évaluation** : On multiplie F par $(X-\lambda)^n$ pour ensuite évaluer en λ :

$$\begin{aligned} (X-\lambda)^n \cdot \frac{P(X)}{Q(X)} &= a_0 + a_1(X-\lambda) + \cdots + a_{n-1}(X-\lambda)^{n-1} + (X-\lambda)^n F_0. \\ \Longrightarrow \quad \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} &= a_0. \end{aligned}$$

• **Tout autre coefficient** : Pour calculer les autres coefficients, on peut toujours appliquer la méthode de soustraction introduite dans le cas des pôles doubles. En effet : **Pour calculer** a_1 : on doit suivre les étapes suivants :

1. Ramener $\frac{a_0}{(X-\lambda)^n}$ à gauche.
2. Mettre $F_1 = F - \frac{a_0}{(X-\lambda)^n}$ au même denominateur puis simplifier numérateur et dénominateur.
3. Multiplier F_1 par $(X-\lambda)^{n-1}$ puis évaluer en λ pour trouver a_1.

D.E.S - Pôles Multiples

Pour calculer a_2 : on doit suivre les étapes suivants :

1. Ramener $\dfrac{a_0}{(X-\lambda)^n} + \dfrac{a_1}{(X-\lambda)^{n-1}}$ à gauche.
2. Mettre $F_1 = F - \dfrac{a_0}{(X-\lambda)^n} - \dfrac{a_1}{(X-\lambda)^{n-1}}$ au même denominateur puis simplifier numérateur et dénominateur.
3. Multiplier F_2 par $(X-\lambda)^{n-2}$ puis évaluer en λ pour trouver a_2.

Et ainsi de suite pour tout autre coefficient.

Notons que au fur et à mesure des soustractions, les fractions se simplifient, mais les calculs restent lourds. Donnons donc une autre méthode pour calculer les coefficients. Cette deuxième méthode est basée sur le principe de **division selon les puissances croissantes** qui nous permet de calculer tous les coefficients d'un pôle d'un coup.

Division selon les puissances croissantes : Nous avons le résultat suivant :

Proposition (Division selon les puissances croissantes)

Soit $n \in \mathbb{N}$, A et B des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$. On suppose que le terme constant de B est non nul. Alors il existe deux polynômes C et D vérifiant :

$$A(X) = B(X)\cdot C(X) + X^{n+1}D(X), \quad \deg(Q) \leq n.$$

D.E.S - Pôles Multiples

Exemple : Soit

$$A = X^5 + 6X^4 + 14X^3 + 16X^2 + 9X + 3 \quad \text{et} \quad B = X^2 + 4X + 4. \qquad (1)$$

Calculer la division selon les puissances croissantes à l'ordre 2 de A par B.

Solution : Le principe est le même que la division euclidienne, mis à part qu'au lieu d'ordonner les polynômes selon les puissances décroissantes, on les ordonne selon les puissances croissantes. Lors de la division, il faut garder en tête que l'on ne s'intéresse qu'aux degrés inférieurs ou égaux à 2 :

$$\begin{array}{ccccccccccccc|l}
 & 3 & + & 9X & + & 16X^2 & + & 14X^3 & + & 6X^4 & + & X^5 & & 4+4X+X^2 \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & & \frac{3}{4}+\frac{3}{2}X \\
- & 3 & + & 3X & + & \frac{3}{4}X^2 & & & & & & & & +\frac{37}{16}X^2 \\ \cline{2-13}
 & & & 6X & + & \frac{61}{4}X^2 & + & 14X^3 & + & 6X^4 & + & X^5 & & \\
 & & - & 6X & + & 6X^2 & + & \frac{3}{2}X^3 & + & & & & & \\ \cline{4-13}
 & & & & & \frac{37}{4}X^2 & + & \frac{25}{2}X^3 & + & 6X^4 & + & X^5 & & \\
 & & & & - & \frac{37}{4}X^2 & + & \frac{37}{4}X^2 & + & \frac{37}{16}X^4 & & & & \\ \cline{5-13}
 & & & & & & & \frac{13}{4}X^3 & + & \frac{59}{16}X^4 & + & X^5 & &
\end{array}$$

Par conséquent :

$$A = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}X + \frac{37}{16}X^2\right) B + X^3 \left(\frac{13}{4} + \frac{59}{16}X + X^2\right).$$

D.E.S - Pôles Multiples

Maintenant qu'on a introduit la **division selon les puissances croissantes**, regardons comme elle nous permet de calculer les coefficients d'un pôle de multiplicité n. Comme précédement, soit λ un pôle d'ordre $n \geq 3$ de $F = \frac{P}{Q}$, alors

$$Q = (X - \lambda)^n Q_1,$$

avec $Q_1(\lambda) \neq 0$. Ainsi, F se décompose sous la forme :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{a_0}{(X-\lambda)^n} + \frac{a_1}{(X-\lambda)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(X-\lambda)} + F_0,$$

où λ n'est pas un pôle de la fraction rationnelle F_0. La méthode à suivre est la suivante :

a) On effectue le changement de variable $Y = X - \lambda$, et on réécrit F en fonction de Y : Ainsi, F se décompose sous la forme :

$$\frac{P(Y)}{Y^n \cdot Q_1(Y)} = \frac{a_0}{Y^n} + \frac{a_1}{Y^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{Y} + F_0(Y).$$

Le nouveau pôle est alors 0, de multiplicité n.

b) On multiplie $F(Y)$ par Y^n :

$$Y^n \cdot \frac{P(Y)}{Y^n \cdot Q_1(Y)} = \frac{P(Y)}{Q_1(Y)} = a_0 + a_1 Y + \cdots + a_{n-1} Y^{n-1} + Y^n \cdot F_0(Y).$$

c) Les n coefficients se trouvent alors en faisant une **division selon les puissances croissantes** de P par Q_1, que l'on arrête dès que l'on obtient le n^e coefficient.

D.E.S - Pôles Multiples

Implémentons la méthode sur l'exemple suivant :

Exemple : Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2}.$$

Solution :

- (a) **Partie entière :** Puisque $\deg(X^5 + X^4 + 1) = \deg((X-1)^3(X+1)^2)$, on fait la division euclidienne de $X^5 + X^4 + 1$ par $(X-1)^3(X+1)^2$ pour extraire la partie entière de F. Nous avons

$$F = \underbrace{1}_{partie\ \ entiere\ \ de\ \ F} + \frac{2X^4 + 2X^3 - 2X^2 - X + 2}{(X-1)^3(X+1)^2}$$

- (b) **Pôles :** F possède un pôle double : -1 et un pôle triple : 1.
- (c) **Poser la décomposition en éléments simples** : La décomposition de F dans $\mathbb{C}(X)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{(X+1)}.$$

Trouvons la valeur de chaque coefficient.

D.E.S - Pôles Multiples

Dans le cas des pôles multiples la méthode dite de **division selon les puissances croissantes** s'avère très utile. Implementons cette technique pour trouver a, b et c :

On commence par le changement de variable $X - 1 = Y$, pour ensuite réécrire F en fonction de Y :

$$F(Y) = \frac{(Y+1)^5 + (Y+1)^4 + 1}{Y^3(Y+2)^2} = \frac{Y^5 + 6Y^4 + 14Y^3 + 16Y^2 + 9Y + 3}{Y^3(Y^2 + 4Y + 4)}.$$

On multiplie $F(Y)$ par Y^3 :

$$Y^3 F(Y) = \frac{Y^5 + 6Y^4 + 14Y^3 + 16Y^2 + 9Y + 3}{Y^2 + 4Y + 4},$$

et on fait la division selon les puissances croissantes de

$$Y^5 + 6Y^4 + 14Y^3 + 16Y^2 + 9Y + 3 \quad \text{par} \quad Y^2 + 4Y + 4.$$

Lors de la division, il faut garder en tête que l'on ne s'intéresse qu'aux degrés inférieurs ou égaux à 2 (car 1 est pôle de multiplicité 3). C'est-à-dire on fait une division selon les puissances croissantes à l'ordre 2. Nous avons (Voir Exemple (1)) :

$$\frac{Y^5 + 6Y^4 + 14Y^3 + 16Y^2 + 9Y + 3}{Y^2 + 4Y + 4} = \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}Y + \frac{37}{16}Y^2\right) + Y^3 \cdot \frac{\frac{13}{4} + \frac{59}{16}Y + Y^2}{Y^2 + 4Y + 4}.$$

Ainsi

$$a = \frac{3}{4} \quad ; \quad b = \frac{3}{2} \quad ; \quad c = \frac{37}{16}.$$

D.E.S - Pôles Multiples

Par conséquent

$$\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3}{4(X-1)^3} + \frac{3}{2(X-1)^2} + \frac{37}{16(X-1)} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{e}{(X+1)}.$$

Pour trouver d on utilise la mêthode de **multiplication-évaluation** : On multiplie F par $(X+1)^2$, on simplifie et finalement on évalue en -1. On obtient :

$$d = -\frac{1}{8}.$$

Finalement pour e, considérons $F(0)$:

$$F(0) = \frac{0^5+0^4+1}{(0-1)^3(0+1)^2} = -1 \quad \Longrightarrow \quad -1 = -\frac{3}{4(-1)^3} + \frac{3}{2(-1)^2} + \frac{37}{16(-1)} - \frac{1}{8} + e.$$

$$\Longrightarrow \quad e = -\frac{5}{16}.$$

D'où

$$\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3}{4(X-1)^3} + \frac{3}{2(X-1)^2} + \frac{37}{16(X-1)} - \frac{1}{8(X+1)^2} - \frac{5}{16(X+1)}.$$

D.E.S - Élements simples de seconde espèce

Élements simples de seconde espèce : Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, avec Q un polynome de discriminant négatif tel que :

$$\begin{aligned} Q(X) &= (X^2+aX+b)^n Q_1(X) \quad \text{et} \\ & (X^2+aX+b) \;\text{ ne divise pas }\; Q_1(X). \end{aligned}$$

Ainsi, F se décompose sous la forme :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{\alpha_0 X+\beta_0}{(X^2+aX+b)^n} + \frac{\alpha_1 X+\beta_1}{(X^2+aX+b)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1} X+\beta_{n-1}}{(X^2+aX+b)} + F_0,$$

où (X^2+aX+b) ne divise pas le dénominateur de la fraction rationnelle F_0.
La méthode à suivre pour trouver les coefficients est la suivante :

- **Pour calculer α_0 et β_0** : nous pouvons utiliser le principle de **multiplication -évaluation** : On multiplie F par $(X^2+aX+b)^n$ pour ensuite évaluer en une racine complexe λ de X^2+aX+b :

$$\begin{aligned} (X^2+aX+b)^n \cdot \frac{P(X)}{(X^2+aX+b)^n Q_1(X)} &= (\alpha_0 X+\beta_0) + (X^2+aX+b)(\cdots \\ \implies \quad \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} &= \alpha_0\lambda+\beta_0, \end{aligned}$$

Où l'on calcule α_0 et β_0 en séparant les parties réelles et imaginaires.

D.E.S - Élements simples de seconde espèce

Pour calculer les autres coefficients, on peut toujours appliquer la méthode de soustraction introduite dans le cas des pôles doubles. En effet :

- **Pour calculer** α_1 **et** β_1 : on doit suivre les étapes suivants :

1. Ramener $\dfrac{\alpha_0 X + \beta_0}{(X^2 + aX + b)^n}$ à gauche.
2. Mettre $F_1 = F - \dfrac{\alpha_0 X + \beta_0}{(X^2 + aX + b)^n}$ au même denominateur puis simplifier numérateur et dénominateur.
3. Multiplier F_1 par $(X^2 + aX + b)^{n-1}$ puis évaluer en λ pour trouver α_1 et β_1.

- **Pour calculer** α_2 **et** β_2 :

1. Ramener $\dfrac{\alpha_0 X + \beta_0}{(X^2 + aX + b)^n} + \dfrac{\alpha_1 X + \beta_1}{(X^2 + aX + b)^{n-1}}$ à gauche.
2. Mettre $F_1 = F - \dfrac{\alpha_0 X + \beta_0}{(X^2 + aX + b)^n} - \dfrac{\alpha_1 X + \beta_1}{(X^2 + aX + b)^{n-1}}$ au même denominateur puis simplifier numérateur et dénominateur.
3. Multiplier F_2 par $(X^2 + aX + b)^{n-2}$ puis évaluer en λ pour trouver α_2 et β_2.

Et ainsi de suite pour tout autre coefficient.

D.E.S - Autres méthodes : Dérivation

Poles Simples : Dans le cas des pôles simples la **dérivation** peut se montrer très utile au moment de calculer les coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simples. Étudions cela de plus près.

Dérivation : Soit λ un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q}$, alors

$$Q = (X - \lambda)Q_1$$

avec $Q_1(\lambda) \neq 0$. Ainsi, F se décompose sous la forme :

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{X - \lambda} + F_0,$$

où λ n'est pas un pôle de la fraction rationnelle F_0. Comme nous avons vu précédement, ceci implique que :

$$(X - \lambda) \cdot \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)}{Q_1(X)} = \alpha + (X - \lambda)F_0(X) \quad \Longrightarrow \quad \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} = \alpha.$$

Notons maintenant que l'égalité $Q(X) = (X - \lambda)Q_1(X)$ implique que :

$$\begin{aligned} Q'(X) = (X - \lambda)Q_1'(X) + Q_1(X) \quad & \Longrightarrow \quad Q'(\lambda) = (\lambda - \lambda)Q_1'(\lambda) + Q_1(\lambda) \\ & \Longrightarrow \quad Q'(\lambda) = Q_1(\lambda). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\alpha = \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} = \frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)}.$$

D.E.S - Autres méthodes : Dérivation

La dérivation est surtout pratique lorsque l'on connaît la forme développée du dénominateur et que l'on ne veut pas le factoriser. Implémentons la méthode sur l'exemple suivant :

Exemple : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fraction rationnelle : $F(X) = \dfrac{1}{X^n - 1}$.

Solution :

a. **Partie Entière :** Puisque $\deg(1) = 0 < \deg(X^n - 1)$, la partie entière de F est 0.
b. **Pôles :** Soit $Q(X) = X^n - 1$. Les racines de Q sont les racines n-ièmes de l'unité à savoir :

$$\omega_k = e^{\dfrac{2i\pi k}{n}}, \ 0 \leq k \leq n-1 \quad \Longrightarrow \quad Q(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k).$$

Ainsi F possède n pôles simples : $\omega_k = e^{\dfrac{2i\pi k}{n}}$, $0 \leq k \leq n-1$.
c. **Posons la décomposition en éléments simples** : La décomposition de F dans $\mathbb{C}(X)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{a_0}{X-1} + \frac{a_1}{X - \omega_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{X - \omega_{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - \omega_k}.$$

Trouvons la valeur de chaque coefficient à l'aide de la dérivation.

D.E.S - Autres méthodes : Dérivation

Comme tous les pôles sont simples et le denominateur de F est sous forme développée, la **dérivation** s'avère très utile :

On commence par dériver $Q(X) = X^n - 1$:

$$Q'(X) = nX^{n-1}.$$

Puis pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n-1$, on évalue $\dfrac{1}{Q'(X)}$ en ω_k pour trouver a_k :

$$a_k = \frac{1}{Q'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n(X-1)} + \frac{\omega_1}{n(X-\omega_1)} + \cdots + \frac{\omega_{n-1}}{n(X-\omega_{n-1})} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k}{n(X-\omega_k)}.$$

D.E.S - Autres méthodes : Dérivation

Poles Doubles : La **dérivation** peut aussi se montrer très utile au moment de calculer les coefficients associés à un pole double.

Dérivation : Soit λ un pôle double de $F = \frac{P}{Q}$, alors

$$Q = (X-\lambda)^2 Q_1,$$

avec $Q_1(\lambda) \neq 0$. Ainsi, F se décompose sous la forme :

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{\alpha}{(X-\lambda)^2} + \frac{\beta}{(X-\lambda)} + F_0,$$

où λ n'est pas un pôle de la fraction rationnelle F_0. Nous allons à présent calculer β à l'aide de la dérivée. Nous avons vu que pour trouver α il suffit de multiplier F par $(X-\lambda)^2$, simplifier et finalement évaluer en λ :

$$\begin{aligned} \frac{P(X)}{Q_1(X)} &= \alpha + (X-\lambda)\cdot\beta + (X-\lambda)^2\cdot F_0(X) \qquad (2) \\ \Longrightarrow \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} &= \alpha. \end{aligned}$$

Maintenant en dérivant l'équation (2), nous obtenons :

$$\left(\frac{P(X)}{Q_1(X)}\right)' = \beta + (X-\lambda)(2F_0 + (X-\lambda)F_0').$$

Ainsi, en substituant X par λ on conclut :

$$\left(\frac{P}{Q_1}\right)'(\lambda) = \beta.$$

D.E.S - Autres méthodes : Dérivation

Cette méthode demande d'être capable de calculer simplement la dérivée de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q_1}$, c'est-à-dire que P et Q_1 devront de préférence être sous forme développé.

Exemple : Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $F(X) = \frac{X^2+1}{X^3+2X^2+X}$.
Solution :

- (a) **Partie Entière :** Puisque $\deg(X^2+1) < \deg(X^3+2X^2+X)$, la partie entière de F est 0.
- (b) **Pôles :** Nous avons :

$$(X^3+2X^2+X) = X(X^2+2X+1) = X(X+1)^2.$$

  F possède alors un pôle double : -1, et un pôle simple : 0.
- (c) **Posons la décomposition en éléments simples** : La décomposition de F s'écrit sous la forme :

$$\frac{X^2+1}{X^3+2X^2+X} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{(X+1)} + \frac{c}{X}$$

  Trouvons la valeur de chaque coefficient.

• **Calculons** a **:** On multiplie F par $(X+1)^2$, on simplifie et finalement on évalue en -1. On obtient :

$$a = -2.$$

D.E.S - Autres méthodes : Dérivation

• **Calculons** b **:** Trouvons la valeur de b à l'aide de la dérivation. On commence par multiplier F par $(X+1)^2$:

$$(X+1)^2 \cdot \frac{X^2+1}{X(X+1)^2} = \frac{X^2+1}{X},$$

on dérive cette dernière fraction rationnelle :

$$\left(\frac{X^2+1}{X}\right)' = \frac{2X^2-X^2-1}{X^2} = \frac{X^2-1}{X^2},$$

pour finalement évaluer en -1. On obtient :

$$b = 0.$$

• **Calculons** c **:** On multiplie F par X, on simplifie et finalement on évalue en 0. On obtient :

$$c = 1.$$

D'où

$$\frac{X^2+1}{X^3+2X^2+X} = -\frac{2}{(X+1)^2} + \frac{1}{X}.$$

D.E.S - Autres méthodes : Limite et Évaluation.

Voyons différentes méthodes moins efficaces que les précédentes mais qui peuvent parfois permettre de finir rapidement les calculs. Soit

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

• **Évaluation dans de valeurs particulières :** Quand il reste peu de coefficients à calculer, il peut être intéressant d'évaluer, l'égalité entre F et sa décomposition, en une ou plusieurs valeurs qui ne sont pas de pôles de F. Cela permet d'obtenir d'autres relations entre les coefficients et calculer les coefficients restants.

Si F est dans $\mathbb{R}(X)$, on peut évaluer en une valeur complexe, l'identification donnant alors deux relations entre les coefficients réels inconnus.

• **Méthode de la limite** $\lim\limits_{x\to+\infty} X \cdot F(X)$ **:** Supposons que le degré de F est strictément négatif (la partie entière est donc nulle), F se décompose alors sous la forme :

$$F(X) = \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k}{(X-\lambda_k)} + \sum_{k=1}^{l} \frac{b_k X + c_k}{(X^2+\beta_k X+\gamma_k)} + F_0.$$

où $\deg(F_0) \leq -2$. Le calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} X \cdot F(X)$ donne alors une relation liant les coeffients a_k et b_k.Regardons cela plus en détail.

D.E.S - Autres méthodes : Limite et Évaluation.

En effet, puisque $\deg(F) < 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\deg(X \cdot F(X)) \leq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} X \cdot F(X) \text{ admet une limite (finie) } L \text{ en } +\infty. \\
\Longrightarrow L \quad &= \quad \lim_{x \to +\infty} X \cdot \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{a_k}{(X - \lambda_k)} + \sum_{k=1}^{l} \frac{b_k X + c_k}{(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)} + F_0 \right) \\
&= \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} \frac{a_k X}{(X - \lambda_k)} + \sum_{k=1}^{l} \frac{b_k X^2 + c_k X}{(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)} + X \cdot F_0 \right) \\
&= \quad \sum_{k=1}^{r} a_k + \sum_{k=1}^{l} b_k + \lim_{x \to +\infty} X \cdot F_0 \\
&= \quad \sum_{k=1}^{r} a_k + \sum_{k=1}^{l} b_k \quad \text{car } \deg(X \cdot F_0) \leq -1.
\end{aligned}$$

Cette méthode est intéressante quand il ne reste plus qu'un ou deux coefficients à calculer. Implémentons ces deux méthodes sur un exemple.

Exemple : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fraction rationnelle :

$$\frac{X^2 + 3}{X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2}.$$

D.E.S - Autres méthodes : Limite et Évaluation.

$$\frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}.$$

Solution :

(a) **Partie entière** : Puisque $\deg(X^2+3) < \deg(X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2)$, la partie entière de F est 0.

(b) **Pôles :** Trouvons les pôles de F. Posons $Q(X) = X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2$. Il faut commencer par remarquer que $Q(1)=0$. On peut alors tester la multiplicité de 1 comme racine de P : on s'aperçoit que 1 est racine triple car

$$Q'(1) = Q''(1) = 0.$$

On en déduit que $Q(X)$ est factorisable par $(X-1)^3$. En effectuant ensuite la division euclidienne de $Q(X)$ par $(X-1)^3$ on obtient :

$$\begin{aligned} X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2 &= (X-1)^3(X^2+2) \\ &= (X-1)^3(X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i). \end{aligned}$$

F possède alors 1 pôle triple dans $\mathbb{R}$: 1, en plus de deux pôles simples dans $\mathbb{C}$: $\pm\sqrt{2}i$.

(c) **Poser la décomposition en éléments simples** : La décomposition de F dans $\mathbb{R}(X)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)} + \frac{dX+f}{X^2+2}.$$

D.E.S - Autres méthodes : Limite et Évaluation.

Puisque F est une fraction rationnelle à coefficient rééls, la décompostion de F dans $\mathbb{C}(X)$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)} + \frac{\alpha}{(X-\sqrt{2}i)} + \frac{\overline{\alpha}}{(X+\sqrt{2}i)}.$$

Commençons par la décomposition de F en $\mathbb{C}(X)$. Pour trouver les valeurs de a et α on utilise la méthode de **multiplication-évaluation** :

• **Calculons a :** On multiplie F par $(X-1)^3$, on simplifie et finalement on évalue en 1. On obtient :

$$a = \frac{4}{3}.$$

• **Calculons α :** On multiplie F par $(X-\sqrt{2}i)$, on simplifie et finalement on évalue en $\sqrt{2}i$. On obtient :

$$\alpha = \frac{1}{27}\cdot\frac{-2-5\sqrt{2}i}{4} \quad\Longrightarrow\quad \overline{\alpha} = \frac{1}{27}\cdot\frac{-2+5\sqrt{2}i}{4}.$$

Pour trouver b et c, on commence par considérer la limite $\lim_{x\to+\infty} X\cdot F(X)$.

Nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} X\cdot\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} = 0 \quad\Longrightarrow\quad 0 = \lim_{x\to+\infty} X\cdot\left(\frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)} + \frac{\alpha}{(X-\sqrt{2}i)} + \frac{\overline{\alpha}}{(X+\sqrt{2}i)}\right) = c+\alpha+\overline{\alpha}.$$

D.E.S - Autres méthodes : Limite et Évaluation.

Ainsi

$$c = -(\alpha + \overline{\alpha}) = -2\mathrm{Re}(\alpha) = \frac{1}{27}.$$

Finalement, en considérant $F(0)$ on obtient :

$$F(0) = \frac{0^3+3}{(0-1)^3(0+2)} = -\frac{3}{2} \implies -\frac{3}{2} = \frac{4}{3(-1)^3} + b - \frac{1}{27(-1)^2} - \frac{1}{27}\cdot\frac{2+5\sqrt{2}i}{4(0-\sqrt{2}i)} + \frac{1}{27}\cdot\frac{-2+5\sqrt{2}i}{4(0+\sqrt{2}i)}$$

$$\implies b = -\frac{2}{9}.$$

D'où

$$\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{4}{3(X-1)^3} - \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{1}{27(X-1)} - \frac{2+5\sqrt{2}i}{108(X-\sqrt{2}i)} + \frac{-2+5\sqrt{2}i}{108(X+\sqrt{2}i)}$$

D.E.S - Autres méthodes : Limite et Évaluation.

Finalement, pour trouver la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ il suffit de regrouper les termes conjugués :

$$
\begin{aligned}
\frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} &= \frac{4}{3(X-1)^3} - \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{1}{27(X-1)}\left(- \frac{2+5\sqrt{2}i}{108(X-\sqrt{2}i)} \right. \\
&\qquad + \frac{-2+5\sqrt{}}{108(X+\sqrt{}} \\
&= \frac{4}{3(X-1)^3} - \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{1}{27(X-1)} - \frac{X-5}{27(X^2+2)}.
\end{aligned}
$$