Algèbre-Premier semestre 2021

Algèbre-Premier semestre 2021

Thèmes

- Logique et raisonnement
- Ensembles
- Relations binaires
- Applications
- Nombres complexes
- Polynômes
- Fractions rationnelles

Les Nombres Complexes

Introduction :

- L'équation
$$x + 2 = 1$$
n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle en a dans $\mathbb{Z}$, « un ensemble plus grand que $\mathbb{N}$ ».
- L'équation
$$3x = 1$$
n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais elle en a dans $\mathbb{Q}$.
- L'équation
$$x^2 = -1$$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

On va donc construire un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel cette équation possède des solutions. On appellera cet ensemble $\mathbb{C}$:

l'ensemble des nombres complexes.

Les Nombres Complexes

On définit un élément particulier de $\mathbb{C}$, note i qui n'est pas réel, tel que

$$i^2 = -1.$$

L'équation $x^2 + 1 = 0$ possède alors 2 solutions

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = 0 &\Longleftrightarrow x^2 - i^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x - i)(x + i) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = i \text{ ou } x = -i \end{aligned}$$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Donnons la définition de l'ensemble des nombres complexes.

Définition

On appelle ensemble des **nombres complexes** *et on note* $\mathbb{C}$, *l'ensemble des nombres de la forme*

$$a + ib \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels},$$

et où i *est un élément qui vérifie*

$$i^2 = -1.$$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Étudions quelques propriétés de l'ensemble des nombres complexes.

Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z = a + ib.$$

Démonstration.

En effet, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a', b') \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$a + ib = z = a' + ib' \quad \Longrightarrow \quad (a - a') = i(b' - b).$$

En élevant au carré, on obtient une égalité entre nombres réels :

$$(a - a')^2 = -(b' - b)^2 \quad \Longrightarrow \quad a = a' \text{ et } b = b'.$$

□

Forme algébrique des Nombres Complexes

La proposition précédente nous amène à définir.

Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On dit que z a pour **écriture algébrique** *$a + ib$ et on définit :*

- *a sa* **partie réelle** *qu'on notera*

$$\mathrm{Re}(z) = a,$$

- *b sa* **partie imaginaire** *qu'on notera*

$$\mathrm{Im}(z) = b.$$

Remarques :

- Les réels sont exactement les nombres complexes de partie imaginaire nulle, c'est-à-dire

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) = 0\} = \{a + 0i : \ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$

- Un nombre complexe de partie réelle nul est appelé un **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs sera noté $i\mathbb{R}$. C'est-à-dire

$$i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) = 0\} = \{0 + ib : \ b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Définition (Égalité entre nombres complexes)

Deux nombres complexes

$$z = a + bi \quad et \quad z' = a' + ib'$$

sont **égaux** *si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :*

$$a + ib = a' + ib' \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b'. \end{array} \right.$$

En résumé :

UNE égalité de nombres complexes $=$ **DEUX égalités de nombres réels**

Forme algébrique des Nombres Complexes

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations : d'addition et de multiplication qui généralisent celles que nous connaissons sur $\mathbb{R}$.

Définition (Addition sur $\mathbb{C}$)

Pour tous

$$z = a + ib \in \mathbb{C} \quad \textit{et} \quad z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$$

on définit

$$z + z' \; = (a + a') + i(b + b').$$

Ce qui signifie que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z + z') &= \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z + z') &= \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z'). \end{aligned}$$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Définition (Multiplication sur $\mathbb{C}$)

Pour tous

$$z = a + ib \in \mathbb{C} \quad \textit{et} \quad z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$$

on définit

$$z \cdot z' \ = (aa' - bb') + i\,(ab' + a'b.)\,.$$

Ce qui signifie que

$$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$$
$$\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z').$$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Définition

Enfin, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ *on a*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Remarque :

- En général :

$$\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$$

- En particulier :

$$\mathrm{Re}(z^2) \neq \mathrm{Re}(z)^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z^2) \neq \mathrm{Im}(z)^2.$$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Proposition

L'application

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{C} \\ (a,b) \mapsto z = a + ib \end{array}$$

réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$.

Démonstration

- L'application f est surjective par la définition de $\mathbb{C}$.
- Montrons que f est injective : Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ avec

$$z = a + ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad z' = a' + ib', (a', b') \in \mathbb{R}^2$$

Montrons que

$$z = z' \Rightarrow (a,b) = (a', b')$$

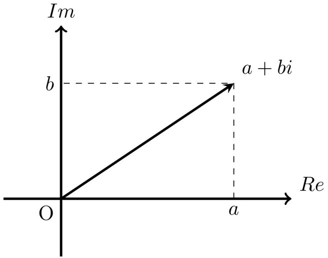
Supposons $z = z'$. Il vient

$$a + ib = a' + ib'$$

Donc $a = a'$ et $b = b'$ et $z = z'$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Interprétation géométrique de $\mathbb{C}$:
La bijection $f : (a, b) \mapsto z = a + ib$, nous permet d'identifier l'ensemble des nombres complexe au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$:



On associe à $z = a + ib \in \mathbb{C}$ un unique point M du plan

$$z = a + ib \mapsto M = (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

et un unique vecteur $\vec{v}$ tel que

$$z \mapsto v = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

On dit que $z = a + ib$ est **l'affixe** du point M et du vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (a, b), et on écrit $M(z)$ et $\vec{v}(z)$.

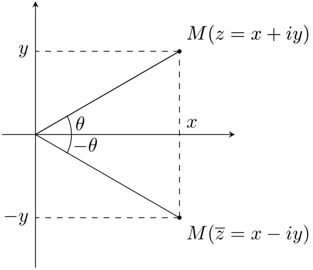
Forme algébrique des Nombres Complexes

Définition

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- *On appelle* conjugué *de* z *le nombre complexe* $\overline{z}$*, défini par*

$$\overline{z} = x - iy \quad (i.e. \quad \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)).$$



Forme algébrique des Nombres Complexes

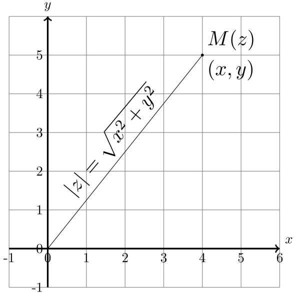
Définition

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- *On appelle* module *de* z *le nombre réel positif noté* $|z|$ *et défini par*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left(i.e. \quad |z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)} \right)$$

Remarque Avec $z \in \mathbb{C}$ $O(0)$, $M(z)$



$|z| = OM$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Étudions quelques propriétés du conjugué d'un nombre complexe.

Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$. *Alors*

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$.
- $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- $z \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} = z$.
- $z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} = -z$.

Forme algébrique des Nombres Complexes

Conjugué et somme et produit de complexes.

Proposition

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, *nous avons*

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.

En particulier, si $z' \neq 0$, *alors*

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\overline{\alpha z} = \alpha \overline{z}$$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Montrons quelques propriétés du conjugué

Démonstration.

Produit : Soit $z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$ Soit x, y, x', y' réels tels que
$z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
on a

$$\begin{aligned} zz' &= (x+iy)(x'+iy') \\ &= xx' + iyx' + ix'y + i^2yy' \\ &= xx' - yy' + i(x'y + xy') \end{aligned}$$

Donc

$$\overline{zz'} = xx' - yy' - i(x'y + xy')$$

et

$$\begin{aligned} \bar{z}\overline{z'} &= (x-iy)(x'-iy') \\ &= xx' - iyx' - ix'y + i^2yy' \\ &= xx' - yy' - i(x'y + xy') \end{aligned}$$

D'où l'égalité. $\square$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Donnons maintenant certaines propriétes du module.

Proposition

Soient $z, \ z' \in \mathbb{C}$.
Propriétés algébriques *:*

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$, *et si* $z' \neq 0$ *alors*

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Propriétés géométriques *:*

- $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$
- $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \quad$ *et* $\quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|.$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous avons

$$z\bar{z} = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z) = |z|^2.$$

Remarque :

- L'inverse de $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$se calcule donc grâce à la formule $z\bar{z} = |z|^2$. En effet

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Forme algébrique des Nombres Complexes

Deux autres propriétés importantes du module sont :

Proposition

Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$.

Inégalité triangulaire :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Inégalité triangulaire généralisée (1) :

$$\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|.$$

Inégalité triangulaire généralisée (2) :

$$\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Nombres complexes de module 1

On se place dans un repère $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, orthonormé, orienté.

Définition

On appelle cercle trigonométrique *et on note* $\mathbb{U}$ *l'ensemble des nombres complexes de module* 1 *:*

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}.$$

Remarque : Géométriquement, $\mathbb{U}$ est le circle de centre 0 et rayon 1. En effet,

$$x + iy \in \mathbb{U} \quad \iff \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad \iff \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Nombres complexes de module 1

Définition

Soit $z \in \mathbb{U}$, $M(z)$ et $\theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.
On définit $\cos\theta$ et $\sin\theta$ comme l'abscisse et l'ordonnée de M

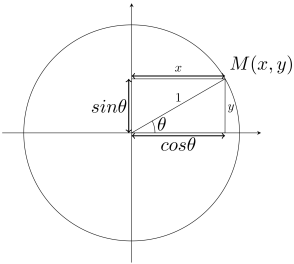
$$M(\cos\theta, \sin\theta)$$

Remarque

Pour un point du cercle trigonométrique, on a, en utilisant la définition géométrique (rapport des longueurs dans un triangle rectangle) du cosinus et du sinus

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{1} = y.$$

Cette nouvelle définition du cos et du sin est bien compatible avec la définition géométrique et l'étend aux angles supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et aux angles négatifs.



Nombres complexes de module 1

Définition

Soit $\theta \in \mathbb{R}$*, on appelle* exponentielle $i\theta$ *le nombre complexe défini par*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remarque : Notons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} \in \mathbb{U}$$

De plus,

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1 \text{ et } \left|e^{i\theta}\right| = |\cos(\theta) + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}.$$

Donc

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Nombres complexes de module 1

Les remarques précédentes nous permettent d'énoncer le résultat suivant.

Théorème

- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists\, \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}.$$

En résumé

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

- *Pour tous* $\theta \in \mathbb{R},\ \theta' \in \mathbb{R}$ *on a*

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \left\{ \begin{array}{c} \cos(\theta) = \cos(\theta') \\ \sin(\theta) = \sin(\theta') \end{array} \right\} \iff \theta = \theta' \mod (2\pi).$$

Nombres complexes de module 1

Étudions quelques propriétés de l'exponentielle $i\theta$.

Théorème

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Conjugaison :

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

- Formule d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad et \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Nombres complexes de module 1

Démonstration.

- **Conjugaison :** Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

- **Formule d'Euler :** Ces formules sont évidentes à partir de la définition de $e^{i\theta}$.

$\square$

Nombres complexes de module 1

Étudions quelques propriétés de l'exponentielle $i\theta$.

Théorème

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*.*

- Transformation des sommes en produits :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}.$$

- Formule de De Moivre :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Nombres complexes de module 1

Démonstration.

- **Transformation des sommes en produits :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') = e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

- **Formule de De Moivre :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors le point précédent nous permet, grâce à une recurrence simple, de conclure

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \implies (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

□

Application à la trigonométrie

Étudions quelques applications de l'exponentiele $i\theta$ à la trigonométrie.

Linéarisation des puissances de cosinus et sinus : Linéariser une expression polynomiale de la forme

$$\cos^k(x) \cdot \sin^l(x)$$

en $\sin(x)$ et $\cos(x)$, c'est l'exprimer comme une **combinaison lineaire** de

$$\cos(x),\ \cos(2x),\ \cos(3x), \cdots \quad \text{et} \quad \sin(x),\ \sin(2x),\ \sin(3x), \cdots$$

en supprimant toute puissance et tout produit.

Application à la trigonométrie

Décrivons la méthode avec un exemple : Linéariser $\cos^4(x)\sin^2(x)$. On procède comme suit :

(1) On utilise les formules d'Euler pour changer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en e^{ix} et e^{-ix}.

$$\cos^4(x)\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$

(2) On développe complètement, avec le binôme de Newton.

$$\begin{aligned}\cos^4(x)\sin^2(x) &= -\frac{1}{64}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)\\ &\qquad\cdot\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\\ &= -\frac{1}{64}\left(e^{6ix}+2e^{4ix}-e^{2ix}-4-e^{-2ix}+2e^{-4ix}+e^{-6ix}\right).\end{aligned}$$

(3) On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$ grâce à la formule d'Euler.

$$\begin{aligned}\cos^4(x)\sin^2(x) &= -\frac{1}{64}\left(\left(e^{6ix}+e^{-6ix}\right)+2\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)-\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)-4\right)\\ &= \frac{1}{32}(-\cos(6x)-2\cos(4x)+\cos(2x)+2).\end{aligned}$$

Application à la trigonométrie

Technique de l'angle moitié : Pour factoriser une expression du type

$$e^{ix} + e^{iy} \quad \text{et} \quad e^{ix} - e^{iy}.$$

On procede comme suit :

1. On commence par noter que

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

2. Donc

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{iy} &= \left(e^{\frac{i(x+y)}{2}} \cdot e^{\frac{i(x-y)}{2}} + e^{\frac{i(x+y)}{2}} \cdot e^{-\frac{i(x-y)}{2}} \right) \\ &= e^{\frac{i(x+y)}{2}} \left(e^{\frac{i(x-y)}{2}} + e^{-\frac{i(x-y)}{2}} \right) \\ &= 2e^{\frac{i(x+y)}{2}} \cos\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} e^{ix} - e^{iy} &= e^{\frac{i(x+y)}{2}} \left(e^{\frac{i(x-y)}{2}} - e^{-\frac{i(x-y)}{2}} \right) \\ &= 2e^{\frac{i(x+y)}{2}} i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

Application à la trigonométrie

La **technique de l'angle de l'angle moitié** nous permet de calculer facilement les expressions suivants :

Proposition

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Par exemple : En utilisant

$$\sin(x) = \mathrm{Im}(\cos(x)+i\sin(x)) = \mathrm{Im}(e^{ix}) \quad \text{et} \quad \sin(y) = \mathrm{Im}(\cos(y)+i\sin(y)) = \mathrm{Im}(e^{iy})$$

on déduit

$$\begin{aligned}\sin(x) + \sin(y) = \mathrm{Im}\left(e^{ix} + e^{iy}\right) &= \mathrm{Im}\left(2e^{\frac{i(x+y)}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).\end{aligned}$$

Application à la trigonométrie

Comme l'on vient de voir dans la proposition précédente, l'un des avantages de la forme exponentielle est qu'elle permet de faire facilement des calculs de trigonométrie. Ainsi on peut démontrer les formules suivantes.

Théorème

1. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.
2. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.
3. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1 - tan(x)tan(y)}$.
4. $\cos(x) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.
5. $\sin(x) = \dfrac{2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.
6. $\tan(x) = \dfrac{2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

Forme Trigonométrique d'un nombre complexe

L'exponentielle $i\theta$ nous offre une autre manière d'exprimer tout nombre complexe. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$. Notons que si on calcule le module de $\frac{z}{|z|}$ on obtient

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \left|z \cdot \frac{1}{|z|}\right| = |z| \cdot \left|\frac{1}{|z|}\right| = |z| \cdot \frac{1}{|z|} = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$, nous avons

$$\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U} \quad \Longrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, \ \frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

Par conséquent, tout nombre complexe peut être écrit sous la forme

$$z = |z| \cdot e^{i\theta}.$$

Forme Trigonométrique d'un nombre complexe

Théorème

Tout nombre complexe non nul *peut être écrit sous la forme :*

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r \in \mathbb{R}_+^\times \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Cette forme est dite trigonométrique*.*

- *Le réel r est unique car :* $r = |z|$ *(En effet,* $|z| = |re^{i\theta}| = |r| \cdot |e^{i\theta}| = |r|$*).*
- *Mais* θ*, appelé* UN argument *de* z*, et note* $\arg(z)$*, est seulement unique à* 2π *près.*
  En revanche il existe un et un seul argument de z *dans* $]-\pi, \pi]$*, et celui ci est appelé l'*argument principal *de* z*.*
- *Le couple* (r, θ) *est aussi appelé* UN *couple de* coordonnées polaires *du point d'image* z*.*

Forme Trigonométrique d'un nombre complexe

Remarques :

- Zéro n'a pas de forme trigonométrique, donc pas d'argument.
- Pour tout $z, \; z' \in \mathbb{C}^*$

$$z = z' \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} |z| = |z|' \\ \arg(z) = \arg(z') \quad \mod (2\pi). \end{array} \right.$$

Exemple : Les formes trigonométriques des réels et des imaginaires purs sont :

- **Cas des réels :** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x = xe^{i0} \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad x = (-x)e^{i\pi} \text{ si } x < 0.$$

- **Cas des imaginaires purs :** Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$:

$$iy = ye^{i\frac{\pi}{2}} \text{ si } y > 0 \quad \text{et} \quad iy = (-y)e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ si } y < 0.$$

Forme Trigonométrique d'un nombre complexe

Étudions quelques propriétés des arguments.

Proposition (Propriétés des arguments)

Pour tous $z \in \mathbb{C}^*$, $z' \in \mathbb{C}^\times$ *nous avons*

- $$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \mod(2\pi).$$
- $$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \mod(2\pi).$$
- $$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \mod(2\pi).$$

Forme Trigonométrique d'un nombre complexe

Démonstration.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \mod(2\pi)$: Nous avons

$$zz' = |z| \cdot e^{i\arg(z)}|z'| \cdot e^{i\arg(z')} = |zz'| \cdot e^{i(\arg(z)+\arg(z'))}.$$

D'où on conclut que $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \mod (2\pi)$.

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \mod(2\pi)$: Nous avons

$$\overline{z} = \overline{|z| \cdot e^{i\arg(z)}} = \overline{|z|} \cdot \overline{e^{i\arg(z)}} = |z| \cdot e^{-i\arg(z)} = |\overline{z}| \cdot e^{-i\arg(z)}.$$

D'où on conclut que $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \mod (2\pi)$.

- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \mod(2\pi)$: Nous avons

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z| \cdot e^{i\arg(z)}} = \frac{1}{|z|} \cdot e^{-i\arg(z)}.$$

D'où on conclut que $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \mod (2\pi)$.

□

Forme Trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. Nous avons deux façon d'exprimer z :

- **Forme Algébrique** : $z = x + iy$.
- **Forme Trigonométrique** : $z = re^{i\theta}$.

Études le lien qui existe entre les deux écritures.

Théorème (Lien entre la forme algébrique et les formes trigonométriques)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ *de*

forme algébrique : $z = x + iy$ *et de* **forme trigonométrique :** $z = re^{i\theta}$.

1. *Forme algébrique en fonction d'une forme trigonométrique :*

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r\sin(\theta).$$

2. *Forme trigonométrique en fonction d'une forme algébrique :*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \mod (2\pi) \quad \text{si } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \mod (2\pi) \quad \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Équations du second degré à coefficients complexes

Étudions quelques équations polynomiales dans $\mathbb{C}$. Commençons par étudier les équations du second degré deux. Notre objectif est de montrer que toute équation de la forme

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C},\ c \in \mathbb{C}$$

possède des solutions sur $\mathbb{C}$.

Définition (Racines carrées d'un nombre complexe)

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z tout nombre complexe ω vérifiant

$$\omega^2 = z.$$

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'équation d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$:

$$\omega^2 = z,$$

possède exactement deux solutions opposées.

Équations du second degré à coefficients complexes

Démonstration.

On commence par écrire z sous forme trigonométrique

$$z = re^{i\theta}, \;\; r \in \mathbb{R}_+, \;\; \theta \in \mathbb{R}.$$

Posons

$$\zeta = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \zeta^2 = z.$$

Nous disposons ainsi d'**un exemple** de racine carrée de z, et grâce à lui, nous allons trouver toutes les solutions de l'équation $\omega^2 = z$.
Pour tout $\omega \in \mathbb{C}^*$, soit $se^{i\beta}$, avec $s \in \mathbb{R}_+$ son écriture trigonométrique. Alors

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z \quad & \Longleftrightarrow \quad \omega^2 = \zeta^2 \\
& \Longleftrightarrow \quad s^2 e^{i2\beta} = re^{i\theta} \\
& \Longleftrightarrow \quad s^2 = r \quad \text{et} \quad e^{i2\beta} = e^{i\theta} \\
& \Longleftrightarrow \quad s = \sqrt{r} \quad \text{et} \quad 2\beta = \theta \mod (2\pi) \\
& \Longleftrightarrow \quad s = \sqrt{r} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\theta}{2} \mod (\pi) \\
& \Longleftrightarrow \quad \omega = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{ou} \quad u = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu. □

Équations du second degré à coefficients complexes

Attention :

- $\sqrt{x}$ est une notation **autorisée** si $x \in \mathbb{R}_+$.
- $\sqrt{z}$ est une notation **interdite** si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Pourquoi cet interdit ? Parce que nous ne savons pas choisir, tout nombre complexe non nul a **deux racines carrées distinctes** qui se valent l'une l'autre. Il n'y a que dans le cas des réels positifs qu'on sait choisir car les racines carrées d'un réel positif x sont toutes les deux réelles, l'une positive, l'autre négative, et on choisit de noter $\sqrt{x}$ la première.

Équations du second degré à coefficients complexes

De la preuve du théorème précédent, on sait que si la forme trigonométrique de z est $re^{i\theta}$, alors les deux racines carrés de z sont

$$\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Le problème c'est que, très souvent il est très difficile de déterminer la forme trigonométrique d'un complexe. Dans ce cas, pour trouver les racines carrés il nous faut travailler avec l'écriture algebrique du nombre complexe.

Équations du second degré à coefficients complexes

Pour déterminer l'écriture algébrique des racines carrées, on procèdera comme suit :

1. On cherche les racines de $z = a + ib$ sous la forme $w = x + iy$. L'équation $w^2 = z$ donne le système
$$w^2 = z \iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = a + ib \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$
en identifiant parties réelle et imaginaire.
2. On pensera systématiquement à ajouter l'équation
$$|w|^2 = |z| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$
pour trouver les valeurs de x^2 et y^2.
3. On prend ensuite les racines carrées, en faisant attention aux signes relatifs de x et y, donné par l'équation $2xy = b$.

Équations du second degré à coefficients complexes

Décrivons la méthode avec un exemple :
Calculer les racines carrés de $24 + 10i$**.**

1. On cherche les racines de $z = a + ib$ sous la forme $w = x + iy$.
   $w^2 = 24 + 10i \iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = 24 + i10 \iff$
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ 2xy = 10 \end{cases}$$
2. $|w|^2 = |24 + 10i| \iff x^2 + y^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26.$
   Nous avons donc trois équations : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x^2 - y^2 = 24 \\ 2xy = 10 \end{cases}$
   $$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 1 \\ xy = 5 \end{cases}$$
3. **Nous avons donc les solutions :**
   $$(x, y) = (5, 1) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (-5, -1)$$
   $$\iff w = 5 + i \quad \text{ou } w = -5 - i.$$

Équations du second degré à coefficients complexes

Maintenant qu'on a montré que tout nombre complexe possède exactement deux racines carrées, nous pouvons donner la preuve que toute équation de degré 2 possède des solutions dans $\mathbb{C}$.

Théorème

Soient a, b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Alors les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0$$

sont

$$\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Équations du second degré à coefficients complexes

Démonstration.

Nous avons

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)\\ &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

Soit δ l'une de deux racines carrés de b^2-4ac. Alors $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$.Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) \qquad (x^2-y^2=(x-y)(x+y))\\ &= a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\cdot\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\\ &= a\left(z-\left(\frac{-b-\delta}{2a}\right)\right)\cdot\left(z-\left(\frac{-b+\delta}{2a}\right)\right). \end{aligned}$$

Les racines de az^2+bz+c sont donc

$$\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a}$$

□

Équations du second degré à coefficients complexes

En lien avec ce qui précède, la relation triviale :

$$(z-x)(z-y) \quad = \quad z^2-(x+y)z+xy$$

nous permet de calculer x et y quand on connaît leur somme $x+y$ et leur produit xy.

Théorème (Systèmes somme-produit)

Soient $a, \ b \in \mathbb{C}$.Les solutions du système somme-produit d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} x+y=b \\ xy=c \end{cases}$$

sont les deux racines du polynôme z^2-bz+c (éventuellement égales).

Remarque : La somme des solutions de az^2+bz+c vaut $\dfrac{-b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$.

Racines n-ième de l'unité

Nous avons décrit les racines carrées de tout complexe non nul z. Faisons le même avec les racines de degré n. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, nous allons donc étudier l'équation :

$$\zeta^n = z.$$

Commençons avec le cas $z = 1$.

Définition (Racines n-ièmes de l'unité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racines n-ièmes de l'unité *tout nombre complexe ζ tel que*

$$\zeta^n = 1$$

On noté $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de racines n-ièmes de l'unité.

Le résultat suivant nous donne une description de l'ensemble de **racines n-ièmes de l'unité**.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité, qui sont

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} : \quad 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Racines n-ième de l'unité

Démonstration.

Soit $\zeta \in \mathbb{C}^*$. Posons $r = |\zeta|$ et notons θ l'unique argument de ζ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Par identification de formes trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\zeta^n = 1 \quad & \iff \quad r^n \cdot e^{in\theta} = 1 \cdot e^{i\cdot 0} \quad \iff \quad r^n = 1 \quad \text{et} \quad n\theta = 0 \quad \mod (2\pi) \\
& \underbrace{\iff}_{r>0} \quad r = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 2k\pi \\
& \iff \quad r = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \\
& \underbrace{\iff}_{\theta \in [0,2\pi[} \quad r = 1 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n-1,\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \\
& \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n-1,\ \text{tel que } \zeta = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Racines n-ième de l'unité

Démonstration.

On a obtenu :

$$\zeta^n = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n-1,\ \text{tel que } \zeta = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Ceci nous fait bien un total de n racines distinctes, car les nombres

$$0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \frac{6\pi}{n}, \cdots,\ \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

sont distincts et éléments de $[0, 2\pi[$, donc les nombres complexes

$$1,\ e^{\frac{2i\pi}{n}},\ e^{\frac{4i\pi}{n}},\ e^{\frac{6i\pi}{n}}, \cdots,\ e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}}$$

sont distincts aussi. $\square$

Racines n-ième de l'unité

Les racines de l'unité satisfont la propriété suivante.

Proposition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. La somme des racines n-ième de l'unité est égale è 0. Autrement dit, soit ζ une racine n-ième de l'unité différente de 1, alors

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

Démonstration.

On reconnaît une suite géométrique de raison . La somme des termes est :

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = \frac{1 - \zeta^n}{1 + \zeta} = \frac{0}{1 + \zeta} = 0$$

$\square$

Racines n-ième de l'unité

Un exemple important, est celui de l'ensemble des racines cubiques de l'unité.

Définition (Le nombre j)

On note j la racine cubique de l'unité

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Proposition

Quelques relations à connaître

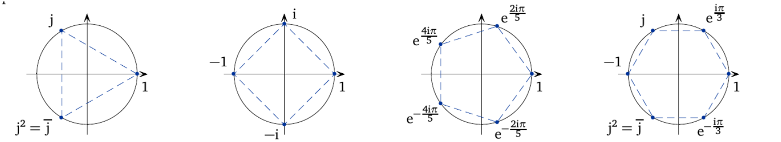
$$j^3 = 1, \quad \overline{j} = j^2, \quad 1 + j + j^2 = 0,$$

et pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \overline{j}).$$

Racines n-ième de l'unité

Visualisation géométrique des racines de la unité : Soit $n \geq 3$. Les éléménts dans $\mathbb{U}_n$ définissent les sommets d'un polygone régulier à n côtés.



$\mathbb{U}_3$ est l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral.

$\mathbb{U}_4$ est l'ensemble des sommets d'un carré.

$\mathbb{U}_5$ est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier.

$\mathbb{U}_6$ est l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier.

Racines n-ième

Étudions maintenant les racines n-ième de **tout nombre complexe non nul**.

Définition (Racines n-ièmes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ non nul. On appelle Racine n-ième *de z tout nombre complexe ζ tel que*

$$z = \zeta^n.$$

L'ensemble de **racines n-ièmes** de z est décrit dans le résultat suivant.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *La seule racine n-ième de 0 est 0.* (En effet, $\zeta^n = 0 \iff \zeta = 0$.)
2. *Tout nombre complexe $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ possède exactement n racines n-ièmes, à savoir :*

$$\sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Racines n-ième de l'unité

Démonstration.

Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons

$$\zeta = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n}} \quad \Longrightarrow \quad \zeta^n = z.$$

Nous disposons ainsi d'**un exemple** de racine n-ème de z, et grâce à lui, nous allons les trouver toutes. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$:

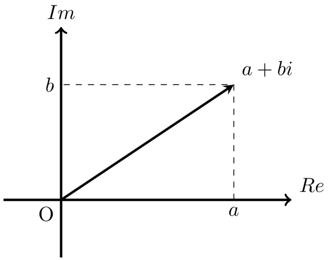
$$\begin{aligned}
\omega^n = z \quad & \Longleftrightarrow \quad \omega^n = \zeta^n \\
& \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\omega}{\zeta}\right)^n = 1 \\
& \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n-1,\ \text{tel que } \frac{\omega}{\zeta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
& \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n-1,\ \text{tel que } \omega = \zeta \cdot e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
& \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n-1,\ \text{tel que } \omega = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\theta + 2ik\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat. □

Géométrie des Nombres Complexes

Règles de calcul sur les affixes :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan d'affixes respectifs z et z' et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ a pour affixe :
$$\lambda z + \mu z'.$$
- Pour A et B deux points du plan d'affixes respectifs z et z', l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est
$$z' - z.$$



Les notions de point, vecteur, coordonnées et nombre complexe sont équivalentes, on préfère d'ailleurs souvent écrire qu'un point est **ÉGAL** à un nombre complexe, qu'un vecteur est **ÉGAL** à ses coordonnées.

Géométrie des Nombres Complexes

Définition

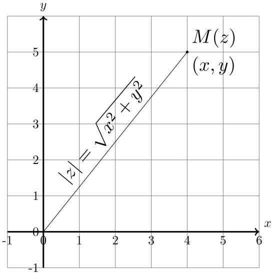
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- *On appelle* module *de z le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par*

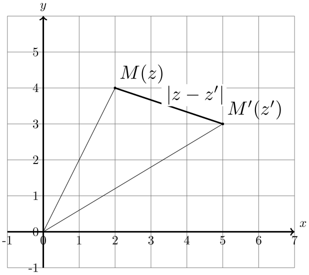
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left(i.e. \quad |z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)} \right)$$

Remarque Avec $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ $O(0)$, $M(z)$ et $M'(z')$

$|z| = OM$



$|z - z'| = MM'$



Géométrie des Nombres Complexes

On en déduit que pour tout $R > 0$:

- **Le cercle** de centre a et rayon R est

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = R\}.$$

- Le **disque ouvert** de centre a et rayon R est

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}.$$

- Le **disque fermé** de centre a et rayon R est

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq R\}.$$

Géométrie des Nombres Complexes

- L'addition de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes de translation : En effet soit $u \in \mathbb{C}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} t_u : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z + u. \end{aligned}$$

  correspond géométriquement à la translation de vecteur $\vec{u}$.
- L'application

$$\begin{aligned} S_O : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto -z. \end{aligned}$$

  correspond, géométriquement, à la symétrie de centre O.

Géométrie des Nombres Complexes

- L'application
$$\begin{aligned} S_x : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{z}. \end{aligned}$$
correspond, géométriquement, à la symétrie d'axe O_x.
- L'application
$$\begin{aligned} S_y : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto -\overline{z}. \end{aligned}$$
correspond, géométriquement, à la symétrie d'axe O_y.

Géométrie des Nombres Complexes

Le produit de deux nombres complexes s'interprète géométriquement en termes d'homothétie et de rotation. En effet :

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors l'application
$$\begin{aligned} H_\lambda : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \lambda z. \end{aligned}$$
correspond, géométriquement, à l'homothétie de centre O et de rapport λ.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors l'application
$$\begin{aligned} R_\theta : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{i\theta} z. \end{aligned}$$
correspond, géométriquement, à la rotation de centre O et d'angle θ.
- Soit $\omega = \rho e^{i\theta}$. Alors l'application
$$\begin{aligned} HR_\omega : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \rho e^{i\theta} z. \end{aligned}$$
correspond, géométriquement, à la composée d'une rotation de centre O et d'angle θ avec une homothétie de centre O et de rapport ρ (similitude).