Equations Différentielles

Généralités sur les équations différentielles

Introduction

Définition

Soit une fonction

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

On note y les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables.
On définit l'équation différentielle

$$f(y, y', \ldots, y^{(n)}, t) = 0 \qquad (E)$$

Introduction

Définition

Soit une fonction

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

On note y les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables.
On définit l'équation différentielle

$$f(y, y', \ldots, y^{(n)}, t) = 0 \qquad (E)$$

Définition

Un équation différentielle (E) est d'ordre $n \in \mathbb{N}$ lorsque n est le plus petit entier naturel telle qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$
telle que (E) peut s'écrire

$$f(y, y', \ldots, y^{(n)}, t) = 0$$

Définition

Résoudre une équation différentielle c'est déterminer l'ensemble des fonctions y dérivables (n fois) sur I qui vérifient cette équation.
On les nomme ***solutions*** *de l'équation.*

Définition

Résoudre une équation différentielle c'est déterminer l'ensemble des fonctions y dérivables (n fois) sur I qui vérifient cette équation.
On les nomme ***solutions*** *de l'équation.*

Définition

Résoudre une équation différentielle c'est déterminer l'ensemble des fonctions y dérivables (n fois) sur I qui vérifient cette équation.
On les nomme ***solutions*** *de l'équation.*

Exemples :

$$(E_1) \quad y'' - \left(2x^2+1\right) y' + y^2 = xe^x$$

Une fonction f est solution de E_1 différentielle si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - \left(2x^2+1\right) f'(x) + f(x)^2 = xe^x$$

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

1. $f(x) = 3e^{-x^2} + \frac{1}{2}$ pour l'équation différentielle : $y' + 2xy = x$.

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

1. $f(x) = 3e^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$ pour l'équation différentielle : $y' + 2xy = x$.

$$f'(x) = 3(-2x)e^{-x^2} = -6xe^{-x^2}$$

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

1. $f(x) = 3e^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$ pour l'équation différentielle : $y' + 2xy = x$.

$$f'(x) = 3(-2x)e^{-x^2} = -6xe^{-x^2}$$
$$2xf(x) = 6xe^{-x^2} + x$$

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

1. $f(x) = 3e^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$ pour l'équation différentielle : $y' + 2xy = x$.

$$f'(x) = 3(-2x)e^{-x^2} = -6xe^{-x^2}$$

$$2xf(x) = 6xe^{-x^2} + x$$

On vérifie bien que : $f'(x) + 2xf(x) = x$

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

1. $f(x) = 3e^{-x^2} + \frac{1}{2}$ pour l'équation différentielle : $y' + 2xy = x$.

$$f'(x) = 3(-2x)e^{-x^2} = -6xe^{-x^2}$$

$$2xf(x) = 6xe^{-x^2} + x$$

   On vérifie bien que : $f'(x) + 2xf(x) = x$

2. $f(x) = 2e^{-x}\cos(x\sqrt{3})$ pour l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

1. $f(x) = 3e^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$ pour l'équation différentielle : $y' + 2xy = x$.

$$f'(x) = 3(-2x)e^{-x^2} = -6xe^{-x^2}$$

$$2xf(x) = 6xe^{-x^2} + x$$

   On vérifie bien que : $f'(x) + 2xf(x) = x$

2. $f(x) = 2e^{-x}\cos(x\sqrt{3})$ pour l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$f'(x) = 2e^{-x}(-\cos(x\sqrt{3}) - \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3}))$$

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

1. $f(x) = 3e^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$ pour l'équation différentielle : $y' + 2xy = x$.

$$f'(x) = 3(-2x)e^{-x^2} = -6xe^{-x^2}$$

$$2xf(x) = 6xe^{-x^2} + x$$

   On vérifie bien que : $f'(x) + 2xf(x) = x$

2. $f(x) = 2e^{-x}\cos(x\sqrt{3})$ pour l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$f'(x) = 2e^{-x}(-\cos(x\sqrt{3}) - \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3}))$$

$$f''(x) = 2e^{-x}(\cos(x\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3}) - 3\cos(x\sqrt{3}))$$

$$=$$

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

1. $f(x) = 3e^{-x^2} + \dfrac{1}{2}$ pour l'équation différentielle : $y' + 2xy = x$.

$$f'(x) = 3(-2x)e^{-x^2} = -6xe^{-x^2}$$

$$2xf(x) = 6xe^{-x^2} + x$$

   On vérifie bien que : $f'(x) + 2xf(x) = x$

2. $f(x) = 2e^{-x}\cos(x\sqrt{3})$ pour l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2e^{-x}(-\cos(x\sqrt{3}) - \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3})) \\
f''(x) &= 2e^{-x}(\cos(x\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3}) - 3\cos(x\sqrt{3})) \\
&= 2e^{-x}(-2\cos(x\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}\sin(x\sqrt{3}))
\end{aligned}$$

Vérifions que les fonctions suivantes sont solutions des équations différentielles indiquées :

1. $f(x) = 3e^{-x^2} + \frac{1}{2}$ pour l'équation différentielle : $y' + 2xy = x$.

$$f'(x) = 3(-2x)e^{-x^2} = -6xe^{-x^2}$$

$$2xf(x) = 6xe^{-x^2} + x$$

   On vérifie bien que : $f'(x) + 2xf(x) = x$

2. $f(x) = 2e^{-x}\cos(x\sqrt{3})$ pour l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 4y = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x}(-\cos(x\sqrt{3}) - \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3})) \\ f''(x) &= 2e^{-x}(\cos(x\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(x\sqrt{3}) - 3\cos(x\sqrt{3})) \\ &= 2e^{-x}(-2\cos(x\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}\sin(x\sqrt{3})) \end{aligned}$$

   On vérifie que l'on a bien :

$$f''(x) + 2f'(x) + 4f(x) = 0$$

Equations différentielles du premier ordre

Définitions

Définition

On dit qu'une équation différentielle (E) *est linéaire si et seulement si la fonction* f *est linéaire en* $y, y', y", \ldots y^{(n)}$

Définition

On dit qu'une équation différentielle (E) est linéaire si et seulement si la fonction f est linéaire en $y, y', y", \dots y^{(n)}$

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b : $I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre (ou d'ordre 1) l'équation :

$$y' + a(t)y(t) = b(t)$$

Définition

On dit qu'une équation différentielle (E) est linéaire si et seulement si la fonction f est linéaire en $y, y', y", \dots y^{(n)}$

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et $b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre (ou d'ordre 1) l'équation :

$$y' + a(t)y(t) = b(t)$$

Remarque

Définition

On dit qu'une équation différentielle (E) est linéaire si et seulement si la fonction f est linéaire en $y, y', y", \ldots y^{(n)}$

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b : $I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre (ou d'ordre 1) l'équation :

$$y' + a(t)y(t) = b(t)$$

Remarque

- Soit f une solution de (E) sur I, f est C^1 sur I.
  En effet $f'(t) = -a(t)f(t) + b(t)$

Définition

On dit qu'une équation différentielle (E) est linéaire si et seulement si la fonction f est linéaire en $y, y', y", \dots y^{(n)}$

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b : $I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre (ou d'ordre 1) l'équation :

$$y' + a(t)y(t) = b(t)$$

Remarque

- Soit f une solution de (E) sur I, f est C^1 sur I.
  En effet $f'(t) = -a(t)f(t) + b(t)$
- Si on a une équation de type $\alpha(t)y'(t) + \beta(t)y(t) = \gamma(t)$, on peut la ramener à une équation linéaire du premier ordre en travaillant dans une intervalle où α ne s'annule pas et en divisant par $\alpha(t)$.

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et $b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

On appelle ***équation différentielle homogène*** *associée à (E) l'équation obtenue en remplaçant le second membre par 0 dans l'équation E :*

$$(E) \quad y' + a(t)y = 0$$

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et $b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.
Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

*On appelle **équation différentielle homogène** associée à (E) l'équation obtenue en remplaçant le second membre par 0 dans l'équation E :*

$$(E) \quad y' + a(t)y = 0$$

Attention Ne pas confondre équation différentielle **homogène** (sans précision : $\frac{y}{x}$) et équation différentielle **homogène associée** à (E)

Equations différentielles du premier ordre à coefficients constants

Proposition

Pour toute équation différentielle linéaire homogène, la combinaison linéaire de deux solutions de l'équation est également solution de l'équation.
C'est à dire

$$\forall f \text{ et } g \text{ solution de } (E), \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

$$\lambda f + \mu g \text{ est solution de } E$$

Résolution des équations homogènes

Proposition

Soit une équation linéaire homogène :

$$(E) \quad y' + a(x)y = 0$$

avec a fonction continue sur un intervalle I

L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\left\{ f / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration.

Soit f une solution de l'équation (E)
On définit

$$g(x) = f(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

Démonstration.

Soit f une solution de l'équation (E)
On définit
$$g(x) = f(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$
La fonction g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et

Démonstration.

Soit f une solution de l'équation (E)
On définit

$$g(x) = f(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

La fonction g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, g'(x) &= f'(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + f(x)a(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \\
&= (f'(x) + f(x)a(x))e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Démonstration.

Soit f une solution de l'équation (E)
On définit

$$g(x) = f(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

La fonction g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\forall x \in I, g'(x) &= f'(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + f(x)a(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\\ &= (f'(x) + f(x)a(x))e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc la fonction g est constante, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = A$ et $f(x) = Ae^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$.

Démonstration.

Soit f une solution de l'équation (E)
On définit

$$g(x) = f(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

La fonction g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, g'(x) &= f'(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + f(x)a(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \\
&= (f'(x) + f(x)a(x))e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc la fonction g est constante, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = A$ et $f(x) = Ae^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$.
Donc toute fonction f solution de (E) et de cette forme.

... suite ...

Démonstration.

Par ailleurs, si on définit $h(x) = Ae^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$, on a $h'(x) + a(x)h(x) = -Ae^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}a(x) + a(x)Ae^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = 0$ donc les fonctions de cette forme sont bien solution de l'équation.
D'où le résultat. $\square$

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x} y = 0$$

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{x}} = Ae^{\ln|x|} = A|x| \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{x}} = Ae^{\ln|x|} = A|x| \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Construction des solutions sur $\mathbb{R}$

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{x}} = Ae^{\ln|x|} = A|x| \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Construction des solutions sur $\mathbb{R}$

On veut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1.

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{x}} = Ae^{\ln|x|} = A|x| \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

<u>Construction des solutions sur $\mathbb{R}$</u>

On veut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1.

On a donc sur $]-\infty; 0[$, $f(x) = Bx$ et sur $]0; +\infty[$, $f(x) = Ax$.

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{x}} = Ae^{\ln|x|} = A|x| \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Construction des solutions sur $\mathbb{R}$
On veut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1.

On a donc sur $]-\infty; 0[$, $f(x) = Bx$ et sur $]0; +\infty[$, $f(x) = Ax$.
Pour que la fonction soit de classe C^1 il faut et il suffit que $A = B$.

Exemple

$$(E_H) \quad xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{x}} = Ae^{\ln|x|} = A|x| \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

<u>Construction des solutions sur $\mathbb{R}$</u>

On veut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1.

On a donc sur $]-\infty; 0[$, $f(x) = Bx$ et sur $]0; +\infty[$, $f(x) = Ax$.
Pour que la fonction soit de classe C^1 il faut et il suffit que $A = B$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions linéaires.

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{2x}} = Ae^{\frac{1}{2}\ln|x|} = A\sqrt{|x|} \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{2x}} = Ae^{\frac{1}{2}\ln|x|} = A\sqrt{|x|} \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

<u>Construction des solutions sur $\mathbb{R}$</u>

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{2x}} = Ae^{\frac{1}{2}\ln|x|} = A\sqrt{|x|} \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Construction des solutions sur $\mathbb{R}$
On veut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1.

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{2x}} = Ae^{\frac{1}{2}\ln|x|} = A\sqrt{|x|} \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

<u>Construction des solutions sur $\mathbb{R}$</u>
On veut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1.

On a donc sur $]0; +\infty[$, $f(x) = A\sqrt{x}$.
Si $A \neq 0$, cette fonction est prolongeable par continuité en 0 mais la fonction obtenue n'est pas dérivable.

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{2x}} = Ae^{\frac{1}{2}\ln|x|} = A\sqrt{|x|} \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

<u>Construction des solutions sur $\mathbb{R}$</u>
On veut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1.

On a donc sur $]0; +\infty[$, $f(x) = A\sqrt{x}$.
Si $A \neq 0$, cette fonction est prolongeable par continuité en 0 mais la fonction obtenue n'est pas dérivable. Donc il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exemple

$$(E_H) \quad 2xy' - y = 0$$

Solution

On se place dans une intervalle où $x \neq 0$, $I =]0; +\infty[$ ou $J =]-\infty; 0[$
On a

$$E_h \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2x} y = 0$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions f telles que

$$f(x) = Ae^{\int_1^x \frac{dx}{2x}} = Ae^{\frac{1}{2}\ln|x|} = A\sqrt{|x|} \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Construction des solutions sur $\mathbb{R}$
On veut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1.

On a donc sur $]0; +\infty[$, $f(x) = A\sqrt{x}$.
Si $A \neq 0$, cette fonction est prolongeable par continuité en 0 mais la fonction obtenue n'est pas dérivable. Donc il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
L'unique solution est donc la fonction nulle.

Exemple Résoudre sur $I =]0; \pi[$

$$(E_H) \quad y' \sin t - y \cos t = 0$$

Exemple Résoudre sur $I =]0;\pi[$

$$(E_H) \quad y' \sin t - y \cos t = 0$$

Solution

Exemple Résoudre sur $I =]0; \pi[$

$$(E_H) \quad y' \sin t - y \cos t = 0$$

Solution
La fonction sin ne s'annule par sur I donc l'équation revient à

Exemple Résoudre sur $I =]0; \pi[$

$$(E_H) \quad y' \sin t - y \cos t = 0$$

Solution
La fonction sin ne s'annule par sur I donc l'équation revient à

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$$

Exemple Résoudre sur $I =]0; \pi[$

$$(E_H) \quad y' \sin t - y \cos t = 0$$

Solution
La fonction sin ne s'annule par sur I donc l'équation revient à

$$y' - \frac{\cos x}{\sin x} y = 0$$

Donc les solutions sont

$$f(t) = Ae^{-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos t}{\sin t} dt} = Ae^{\ln|\sin t|} = A \sin t \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Proposition

Soit une équation différentielle linéaire

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

avec a et b fonctions continues sur un intervalle I

Soit y_P une solution de l'équation (E), alors

y_H est une solution de l'équation homogène E_0) associée à (E)
si et seulement si $y_H + y_P$ est une solution de l'équation (E)

Proposition

Soit une équation différentielle linéaire

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

avec a et b fonctions continues sur un intervalle I

Soit y_P une solution de l'équation (E), alors

y_H est une solution de l'équation homogène $E_0)$ associée à (E)
si et seulement si $y_H + y_P$ est une solution de l'équation (E)

Démonstration.

$$\begin{aligned} y_H \text{ solution de } (E_0) \Leftrightarrow y_H' + ay_H = 0 \quad &\Leftrightarrow y_H' + a(x)y_H + (y_P' + a(x)y_P) = b(x) \\ &\Leftrightarrow y_H' + y_P' + a(x)y_H + a(x)y_P = b(x) \\ &\Leftrightarrow (y_H + y_P)' + a(x)(y_H + y_P) = b(x) \\ &\Leftrightarrow y_H + y_P \text{ solution de } (E) \end{aligned}$$

$\square$

Exemple Résoudre l'équation

$$(E) \quad (1+x^2)y' + y = 1$$

Exemple Résoudre l'équation

$$(E) \quad (1+x^2)y' + y = 1$$

Solution

Exemple Résoudre l'équation

$$(E) \quad (1+x^2)y' + y = 1$$

Solution

La solution de l'equation homogène est $x \mapsto \lambda e^{-\arctan x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Exemple Résoudre l'équation

$$(E) \quad (1+x^2)y' + y = 1$$

Solution
La solution de l'equation homogène est $x \mapsto \lambda e^{-\arctan x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
La solution constante $x \mapsto 1$ est une solution particulière évidente donc

Exemple Résoudre l'équation

$$(E) \quad (1+x^2)y' + y = 1$$

Solution

La solution de l'equation homogène est $x \mapsto \lambda e^{-\arctan x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
La solution constante $x \mapsto 1$ est une solution particulière évidente donc
L'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions :

Exemple Résoudre l'équation

$$(E) \quad (1+x^2)y' + y = 1$$

Solution
La solution de l'equation homogène est $x \mapsto \lambda e^{-\arctan x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
La solution constante $x \mapsto 1$ est une solution particulière évidente donc
L'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions :

$$x \mapsto 1 + \lambda e^{-\arctan x} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Proposition

Soient $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ *des fonctions continues.*
Si f_1 *est solution sur* I *de* $y' + a(t)y = b_1(t)$ *et* f_2 *est solution sur* I *de* $y' + a(t)y = b_2(t)$ *alors pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda f_1 + \mu f_2$ *est solution sur* I *de*

$$y' + a(t)y = \lambda b_1 + \mu b_2$$

Proposition

Soient $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ *des fonctions continues.*
Si f_1 *est solution sur* I *de* $y' + a(t)y = b_1(t)$ *et* f_2 *est solution sur* I *de* $y' + a(t)y = b_2(t)$ *alors pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda f_1 + \mu f_2$ *est solution sur* I *de*

$$y' + a(t)y = \lambda b_1 + \mu b_2$$

Remarque

Cette proposition peut être utile dans la pratique : pour résoudre une équation différentielle linéaire, on peut éventuellement scinder le second membre afin de se ramener à plusieurs équations différentielles dont les seconds membres seront plus simples à traiter.

Problème de Cauchy

Définition

Étant données deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle
$(E): \quad y' + a(t)y = b(t)$.
*Le **problème de Cauchy** associé au couple (t_0, y_0) où $t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{K}$ est la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale (ou condition de Cauchy) $y(t_0) = y_0$.*

Proposition

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, on considère l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t).$$

Pour $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy associé à la condition initiale $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution sur I.

Démonstration.

Soit A une primitive de la fonction continue a, qui vérifie donc $A' = a$. Puisque $e^{A(t)}$ ne s'annule pas sur I, on a une équation équivalente en multipliant $y' + a(t)y = b(t)$ par $e^{A(t)}$:

$$\forall t \in I, \quad e^{A(t)}\left(y' + a(t)y\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}y(t)\right) = e^{A(t)}b(t).$$

Compte tenu de la condition $y\left(t_0\right) = y_0$, ceci équivaut par intégration de t_0 à t à :

$$e^{A(t)}y(t) - e^{A(t_0)}y_0 = \int_{t_0}^{t} e^{A(u)}f(u)du$$

Soit encore si A désigne plus particulièrement la primitive de a s'annulant en t_0 :

$$y(t) = e^{-A(t)}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(u)}f(u)du\right)$$

$\square$

Remarque On a montré en particulier dans la preuve de ce résultat que toute solution de (E) est bien de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$, ce qui justifie la méthode de variation de la constante.

Exemple. Résoudre $y' - \dfrac{1}{2x}y = \sqrt{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$, avec pour condition initiale $y(1) = 1$.

Solution Il s'agit d'une équation linéaire du première ordre à coefficient continus sur I.

La solution générale de son équation homogène associée est donc

$x \mapsto \lambda \exp\left(\dfrac{1}{2}\ln x\right) = \lambda\sqrt{x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Par la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $x \mapsto \lambda(x)\sqrt{x}$, avec λ dérivable sur I.

En reportant dans l'équation, il vient $\lambda'(x)\sqrt{x} = \sqrt{x}$ donc $\lambda'(x) = 1$ puis on peut prendre $\lambda : x \mapsto x$ et une solution particulière de (E) est $x \mapsto x\sqrt{x}$.

La solution générale de (E) est donc $x \mapsto (\lambda + x)\sqrt{x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Pour trouver l'unique solution du problème considéré, il faut résoudre l'équation $(\lambda + 1) = 1$ i.e. $\lambda = 0$.

Ainsi la solution du problème de Cauchy considéré est $x \mapsto x\sqrt{x}$.

Proposition

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t).$$

- *Une seule courbe intégrale définie sur I passe par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.*

Proposition

On considère deux fonctions a et b continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t).$$

- *Une seule courbe intégrale définie sur I passe par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.*
- *Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $I \times \mathbb{R}$.*

Démonstration.

Le premier point est une reformulation du résultat précédent.
Montrons le deuxième point : supposons que deux courbes intégrales se coupent en $M_0\,(t_0, y_0)$.
Notons y_1 et y_2 les solutions de (E) sur I correspondantes. Elles sont donc toutes deux solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) \\ y\,(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Par unicité, on a donc $y_1 = y_2$. $\square$

Remarque. La seule solution de (E_0) : $y' + a(t)y = 0$ telle que $y\,(t_0) = 0$ est la fonction nulle.
En effet, la fonction nulle est solution de (E_0).
Et par la proposition précédente, c'est l'unique solution telle que $y\,(t_0) = 0$.
En particulier, la seule solution de (E_0) qui s'annule est la fonction nulle.

On revient sur le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre non normalisées :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où a, b, c sont continues sur un intervalle I, mais où a est susceptible de s'annuler sur I. Nous allons voir sur des exemples que les résultats précédents, comme le théorème de Cauchy, peuvent alors tomber en défaut. Supposons par exemple que a s'annule en un unique point t_0 de I. On procèdera alors comme suit.

Méthode pour étudier les raccordements

Pour résoudre (E) sur I :

- On commence par résoudre l'équation sur les intervalles $I_g =]-\infty, t_0[\cap I$ et $I_d =]t_0, +\infty[\cap I$ où a ne s'annule pas.
- On cherche ensuite une solution f de (E) sur I. On remarque que f est solution de (E) sur I_g.
  On en connait donc la forme explicite $f = f_g$.
  De même sur l'intervalle I_d, on connait la forme f_d de f.
  La fonction f étant solution de (E) sur I, la fonction
  $t \in I \setminus \{t_0\} \mapsto \begin{cases} f_g(t) \text{ si } t \in I_g \\ f_d(t) \text{ si } t \in I_d \end{cases}$ doit être :
    - prolongeable par continuité en t_0,
    - de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (c'est à dire en t_0)
    - solution de l'équation différentielle sur I (c'est à dire en t_0).

On va voir sur des exemples que ces conditions sont satisfaites dans certains cas, pas dans d'autres.

Exemple.
Déterminer les solutions de (E) : $ty' - 2y = t^3$ sur $\mathbb{R}$.
Solution
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients variables et continus, non normalisée.
On commence par la résoudre sur des intervalles sur lesquels $t \neq 0$, soit sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
On montre alors alors que :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{t \to \lambda t^2 + t^3, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } \mathcal{S}_{\mathbb{R}_-^*} = \left\{t \to \mu t^2 + t^3, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

On cherche à présent les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Soit f une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$. Elle est donc solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, et on a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda t^2 + t^3 \text{ pour tout } t > 0,$$
$$\exists \mu \in \mathbb{R}, f(t) = \mu t^2 + t^3 \text{ pour tout } t < 0.$$

Prenons $t = 0$ dans l'équation, on obtient : $0 \times f'(0) - 2f(0) = 0$, soit $f(0) = 0$.
La fonction f doit être continue et dérivable en 0 . D'où :

$$\lim_{x \to 0^+} f(t) = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(t)$$

Ici on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \lambda t^2 + t^3 = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^-} \mu t^2 + t^3 = 0.$$

Donc cette condition est bien satisfaite pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On étudie la dérivabilité :

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda t^2 + t^3}{t} = 0$$
$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{\mu t^2 + t^3}{t} = 0$$

Là encore, cette condition est bien satisfaite pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Finalement, on obtient que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 \text{ si } t \geq 0 \\ \mu t^2 + t^3 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On représente plusieurs de ces solutions :

Remarque Le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} (E) \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$ a donc une infinité de solutions.
À l'opposé, le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} (E) \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$ n'a aucune solution.
On voit ici que le théorème de Cauchy tombe en défaut en $t = 0$, là où le coefficient t de y' s'annule.

Exemple. Résoudre $(1-t)y' - y = t$ sur $\mathbb{R}$.

Solution

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients variables et continus, non normalisée.

On commence par la résoudre sur des intervalles sur lesquels $1 - t \neq 0$, soit sur $]1, +\infty[$ et sur $]-\infty, 1[$.

On montre alors alors que :

$$\mathcal{S}_{]1,+\infty[} = \left\{ t \to \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}_{]-\infty,1[} = \left\{ t \to \frac{\mu}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche à présent les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
Soit f l'une d'elles.
On a alors :

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} \text{ pour tout } t > 1$$

$$\exists\mu \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{\mu}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} \text{ pour tout } t < 1$$

Prenons $t = 1$ dans l'équation, on obtient : $0 \times f'(1) - f(1) = 1$, soit $f(1) = -1$.
La fonction f doit être continue et dérivable en 1 :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\lambda}{1-t} + \frac{t^2}{2(1-t)} = \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda > -1/2 \\ -\infty \text{ si } \lambda < -1/2 \\ -1 \text{ si } \lambda = -1/2 \end{cases} .$$

Ainsi on a nécessairement $\lambda = -1/2$.
De même, $\mu = -1/2$. On obtient alors $f(t) = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement, on obtient qu'il y a une unique solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, qui est :

$$t \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$$

Le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} (E) \\ y(1) = 0 \end{array} \right.$ n'a pas de solution dans ce cas.

Le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} (E) \\ y(1) = -1 \end{array} \right.$ a pour sa part une unique solution.

Equations différentielles du premier ordre à coefficient constant

Equations différentielles linéaires à coefficient constant

Proposition

Soit une équation différentielle linéaire

$$(E) \quad y' + ay = b \;\; \textit{avec } a \in \mathbb{R} \textit{ et } b \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{b}{a} + \lambda e^{-ax} \right\}$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, *il existe une unique solution telle que* $f(x_0) = y_0$

Equations différentielles linéaires à coefficient constant

Proposition

Soit une équation différentielle linéaire

$$(E) \quad y' + ay = b \quad \textit{avec } a \in \mathbb{R} \textit{ et } b \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{b}{a} + \lambda e^{-ax} \right\}$$

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, il existe une unique solution telle que* $f(x_0) = y_0$

Remarque Si $b = 0$

$$\left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{-ax} \right\}$$

Démonstration.

- On cherche une solution particulière constante :

$$0 + af_0(x) = b \Leftrightarrow f_0(x) = \frac{b}{a}$$

On connaît les solutions de l'équation homogène :

$$f_H(x) = \lambda e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = \lambda e^{-ax}$$

On peut donc conclure que les solutions de l'équation sont $f = f_0 + f_H$
Donc l'ensemble des solutions est bien

$$\left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{b}{a} + \lambda e^{-ax} \right\}$$

- On résout $f(x_0) = y_0$ pour obtenir

$$f(x) = \frac{b}{a} + \left(y_0 - \frac{b}{a} \right) e^{-a(x-x_0)}$$

Méthode de résolution (Rappel)

Pour résoudre

$$(E) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

avec a et b fonctions continues sur un intervalle I

on procède en général en deux étapes :

- Etape 1 : on résout l'équation homogène, obtenue en remplaçant le second membre par zéro,

$$(E_H) \quad y' + a(x)y = 0$$

  la solution générale est alors notée y_H.
- Etape 2 : on cherche une solution particulière y_P de l'équation initiale (E).

La solution générale de (E) est alors la somme des deux : $y = y_H + y_P$.

Elle comporte toujours une constante, qui ne peut être déterminée que par une condition initiale.

Recherche de solutions particulières

Rechercher des solutions particulières

Méthode

- Il faut toujours commencer par rechercher d'éventuelles solutions évidentes (par exemple solution constante aisé car dans ce cas : $y' = 0$).

Recherche de solutions particulières

Rechercher des solutions particulières

Méthode

- Il faut toujours commencer par rechercher d'éventuelles solutions évidentes (par exemple solution constante aisé car dans ce cas : $y' = 0$).
- Si l'on n'en trouve pas, on peut toujours utiliser **la méthode de variation de la constante** :
  On part de la solution générale de l'équation homogène et on remplace la constante λ par une fonction $\lambda(x)$.

Exemple

Exemple

Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Exemple
Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.
Solution

Exemple
Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.
Solution
On écrit $y' - \dfrac{t}{1+t}y = -\dfrac{1}{1+t}$

Exemple

Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Solution

On écrit $y' - \dfrac{t}{1+t}y = -\dfrac{1}{1+t}$

Equation différentielle homogène

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

Exemple

Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Solution

On écrit $y' - \dfrac{t}{1+t}y = -\dfrac{1}{1+t}$

Equation différentielle homogène

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$f(t) = Ae^{-\int_1^t -\frac{u}{1+u}dt} = Ae^{t-\ln(1+t)} = \frac{Ae^t}{1+t}$$

Exemple

Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Solution

On écrit $y' - \dfrac{t}{1+t}y = -\dfrac{1}{1+t}$

Equation différentielle homogène

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$f(t) = Ae^{-\int_1^t -\frac{u}{1+u}dt} = Ae^{t-\ln(1+t)} = \frac{Ae^t}{1+t}$$

Solution particulière

Exemple

Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Solution

On écrit $y' - \dfrac{t}{1+t}y = -\dfrac{1}{1+t}$

Equation différentielle homogène

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$f(t) = Ae^{-\int_1^t -\frac{u}{1+u}dt} = Ae^{t-\ln(1+t)} = \frac{Ae^t}{1+t}$$

Solution particulière

On cherche une solution g de la forme $g(t) = \dfrac{A(t)e^t}{1+t}$

$$g'(t) = \frac{A'(t)e^t}{t+1} + \frac{A(t)e^t}{t+1} - \frac{A(t)e^t}{(t+1)^2}$$

Exemple

Déterminer les solutions de $(t+1)y' - ty + 1 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Solution

On écrit $y' - \dfrac{t}{1+t}y = -\dfrac{1}{1+t}$

Equation différentielle homogène

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$f(t) = Ae^{-\int_1^t -\frac{u}{1+u}dt} = Ae^{t-\ln(1+t)} = \frac{Ae^t}{1+t}$$

Solution particulière

On cherche une solution g de la forme $g(t) = \dfrac{A(t)e^t}{1+t}$

$g'(t) = \dfrac{A'(t)e^t}{t+1} + \dfrac{A(t)e^t}{t+1} - \dfrac{A(t)e^t}{(t+1)^2}$

donc $(t+1)g'(t) = A'(t)e^t + A(t)e^t - \dfrac{A(t)e^t}{t+1}$

On a obtenu

$$(t+1)g'(t) = A'(t)e^t + A(t)e^t - \frac{A(t)e^t}{t+1}$$

On a donc $(t+1)g'(t) - tg(t) + 1$
$= A'(t)e^t + A(t)e^t - \dfrac{A(t)e^t}{t+1} - \dfrac{tA(t)e^t}{t+1} + 1$
$= A'(t)e^t + 1$

Donc $A'(t) = e^{-1}$ et $A(t) = -e^{-t}$ donc une solution particulière est

$$g(t) = -\frac{1}{1+t}$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme

$$f(t) = \frac{Ae^t - 1}{t+1}, A \in \mathbb{R}$$

Exemple

$$(E) \qquad xy' - y = x^2 + 1$$

Exemple

$$(E) \qquad xy' - y = x^2 + 1$$

Solution

On a vu que la solution de l'équation homogène (E_H) était :

$$y_H(x) = \lambda x$$

Exemple

$$(E) \qquad xy' - y = x^2 + 1$$

Solution

On a vu que la solution de l'équation homogène (E_H) était :

$$y_H(x) = \lambda x$$

On va donc chercher une solution particulière sous la forme :

$$y(x) = \lambda(x)x$$

Exemple

$$(E) \qquad xy' - y = x^2 + 1$$

Solution

On a vu que la solution de l'équation homogène (E_H) était :

$$y_H(x) = \lambda x$$

On va donc chercher une solution particulière sous la forme :

$$y(x) = \lambda(x)x$$

On l'injecte dans l'équation différentielle (E), ce qui donne :

$$xy' - y = x^2 + 1 \iff x\left[\lambda'(x)x + \lambda(x)\right] - \lambda(x)x = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x)x^2 = x^2 + 1 \iff \lambda'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

Exemple

$$(E) \qquad xy' - y = x^2 + 1$$

Solution

On a vu que la solution de l'équation homogène (E_H) était :

$$y_H(x) = \lambda x$$

On va donc chercher une solution particulière sous la forme :

$$y(x) = \lambda(x)x$$

On l'injecte dans l'équation différentielle (E), ce qui donne :

$$xy' - y = x^2 + 1 \Longleftrightarrow x\left[\lambda'(x)x + \lambda(x)\right] - \lambda(x)x = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x)x^2 = x^2 + 1 \Longleftrightarrow \lambda'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

Une solution particulière sera obtenue en prenant :

$$\lambda(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - \frac{1}{x},$$

Une solution particulière sera obtenue en prenant :

$$\lambda(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - \frac{1}{x},$$

Une solution particulière sera obtenue en prenant :

$$\lambda(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - \frac{1}{x},$$

ce qui donne comme solution particulière de l'équation différentielle :

$$y_P(x) = \lambda(x)x = \left(x - \frac{1}{x}\right) x = x^2 - 1$$

Une solution particulière sera obtenue en prenant :

$$\lambda(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - \frac{1}{x},$$

ce qui donne comme solution particulière de l'équation différentielle :

$$y_P(x) = \lambda(x)x = \left(x - \frac{1}{x}\right) x = x^2 - 1$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors donnée par (en prolongeant en 0) :

Une solution particulière sera obtenue en prenant :

$$\lambda(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - \frac{1}{x},$$

ce qui donne comme solution particulière de l'équation différentielle :

$$y_P(x) = \lambda(x)x = \left(x - \frac{1}{x}\right) x = x^2 - 1$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors donnée par (en prolongeant en 0) :

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = x^2 - 1 + \lambda x,$$

avec λ réel quelconque.

Autres Exemples

1. $y' + 4y = 0$
2. $y' + 2xy = 0$
   Solution générale : $y_H(x) = \lambda e^{-x^2}$
3. $xy' + 2y = 0$
4. $\sqrt{x}y' + 5y = 0$
   Solution Générale : $y_H(x) = \lambda e^{-10\sqrt{x}}$

Exemples

$$y' + 2xy = 6x^2 e^{-x^2}$$

Solution

On sait que la solution générale de l'équation homogène est :

$$y_H(x) = \lambda e^{-x^2}$$

On va chercher une solution particulière sous la forme :

$$y(x) = \lambda(x) e^{-x^2}$$

On a alors :

$$y'(x) = \lambda'(x) e^{-x^2} + \lambda(x)(-2x) e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E_2) &\iff y' + 2xy = 6x^2 e^{-x^2} \\ &\iff \lambda'(x) e^{-x^2} + \lambda(x)(-2x) e^{-x^2} + 2x\lambda(x) e^{-x^2} = 6x^2 e^{-x^2} \\ &\iff \lambda'(x) e^{-x^2} = 6x^2 e^{-x^2} \\ &\iff \lambda'(x) = 6x^2 \end{aligned}$$

On peut donc prendre $\lambda(x) = 2x^3 \Rightarrow y_p(x) = \lambda(x)e^{-x^2} = 2x^3e^{-x^2}$
La solution générale de (E_2) est donc :

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = y(x) = 2x^3e^{-x^2} + \lambda e^{-x^2} = \left(2x^3 + \lambda\right) e^{-x^2}$$

$$y(x) = \left(2x^3 + \lambda\right) e^{-x^2}$$

avec λ réel déterminé par une éventuelle condition initiale.

Exemples

$\sqrt{x}y' + 5y = 10\sqrt{x}$

Dans certains cas, il y a des méthode plus rapides que celle de la variation de la constante :

Proposition (Solution particulière avec second membre exponentielle-polynôme)

On considère un nombre $a \in \mathbb{K}$, une fonction polynomiale P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et l'équation différentielle linéaire :

$$y' + ay = e^{\lambda t} P(t)$$

Alors l'équation (E) a au moins une solution particulière de la forme

$$t \to e^{\lambda t} t^m Q(t)$$

où Q est une fonction polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\deg(Q) = \deg(P)$ *et :*

- $m = 0$ *si* $\lambda + a \neq 0$.
- $m = 1$ *si* $\lambda + a = 0$.

Exemple.

Exemple.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\,\mathrm{ch}(t) \quad (E)$.

Exemple.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\,\mathrm{ch}(t) \quad (E)$.
Solution
L'équation s'écrit :

$$y' + y = 2e^{t} + 2e^{-t}$$

Exemple.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\,\mathrm{ch}(t) \quad (E)$.

Solution

L'équation s'écrit :

$$y' + y = 2e^{t} + 2e^{-t}$$

Par superposition, on résout

$$y' + y = 2e^{t} \quad (E_1) \text{ et } y' + y = 2e^{-t} \quad (E_2)$$

Exemple.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\,\mathrm{ch}(t) \quad (E)$.
Solution
L'équation s'écrit :

$$y' + y = 2e^t + 2e^{-t}$$

Par superposition, on résout

$$y' + y = 2e^t \quad (E_1) \text{ et } y' + y = 2e^{-t} \quad (E_2)$$

- Pour E_1, on cherche $f(t) = \lambda e^t$
  On résout $f'(t) + f(t) = 2e^2 \Leftrightarrow 2\lambda e^t = 2e^t \Leftrightarrow \lambda = 1$
  Donc $t \mapsto e^t$ est une solution de (E_1)

Exemple.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\,\mathrm{ch}(t) \quad (E)$.

Solution

L'équation s'écrit :

$$y' + y = 2e^t + 2e^{-t}$$

Par superposition, on résout

$$y' + y = 2e^t \quad (E_1) \text{ et } y' + y = 2e^{-t} \quad (E_2)$$

- Pour E_1, on cherche $f(t) = \lambda e^t$
  On résout $f'(t) + f(t) = 2e^2 \Leftrightarrow 2\lambda e^t = 2e^t \Leftrightarrow \lambda = 1$
  Donc $t \mapsto e^t$ est une solution de (E_1)
- Pour E_2, on cherche $f(t) = \alpha t e^{-t}$
  On résout $f'(t) + f(t) = 2e^{-t} \Leftrightarrow (\alpha - \alpha t + \alpha t)e^{-t} = 2e^{-t} \Leftrightarrow \alpha = 2$
  Donc $t \mapsto 2te^{-t}$ est une solution de (E_2)

Exemple.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\,\mathrm{ch}(t) \quad (E)$.

Solution

L'équation s'écrit :

$$y' + y = 2e^{t} + 2e^{-t}$$

Par superposition, on résout

$$y' + y = 2e^{t} \quad (E_1) \text{ et } y' + y = 2e^{-t} \quad (E_2)$$

- Pour E_1, on cherche $f(t) = \lambda e^{t}$
  On résout $f'(t) + f(t) = 2e^{2} \Leftrightarrow 2\lambda e^{t} = 2e^{t} \Leftrightarrow \lambda = 1$
  Donc $t \mapsto e^{t}$ est une solution de (E_1)
- Pour E_2, on cherche $f(t) = \alpha t e^{-t}$
  On résout $f'(t) + f(t) = 2e^{-t} \Leftrightarrow (\alpha - \alpha t + \alpha t)e^{-t} = 2e^{-t} \Leftrightarrow \alpha = 2$
  Donc $t \mapsto 2te^{-t}$ est une solution de (E_2)

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions f telles que :

Exemple.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 4\,\mathrm{ch}(t) \quad (E)$.

Solution

L'équation s'écrit :

$$y' + y = 2e^{t} + 2e^{-t}$$

Par superposition, on résout

$$y' + y = 2e^{t} \quad (E_1) \text{ et } y' + y = 2e^{-t} \quad (E_2)$$

- Pour E_1, on cherche $f(t) = \lambda e^{t}$
  On résout $f'(t) + f(t) = 2e^{2} \Leftrightarrow 2\lambda e^{t} = 2e^{t} \Leftrightarrow \lambda = 1$
  Donc $t \mapsto e^{t}$ est une solution de (E_1)
- Pour E_2, on cherche $f(t) = \alpha t e^{-t}$
  On résout $f'(t) + f(t) = 2e^{-t} \Leftrightarrow (\alpha - \alpha t + \alpha t)e^{-t} = 2e^{-t} \Leftrightarrow \alpha = 2$
  Donc $t \mapsto 2te^{-t}$ est une solution de (E_2)

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions f telles que :

$$f(x) = \lambda e^{-t} + e^{t} + 2te^{-t} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Rechercher des solutions particulières

Pour une équation du type

$$a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

En général on imite le second membre :

- Si $c(t)$ est un polynôme, rechercher une solution particulière de même degré.
- Si $c(t)$ est une fonction trigonométrique, rechercher une solution particulière trigonométrique : $\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$
- Si $c(t)$ est solution de l'équation homogène associée, rechercher une solution particulière $\alpha t c(t)$

Exemple 15.

$$y' - 2y = t^2 - 3t + 1$$

On pose $y_P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ et on cherche les coefficients α, β et γ.

$$y_P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

donc

$$y_P'(t) = 2\alpha t + \beta$$

Comme on veut que y_P soit solution de (2), on cherche α, β et γ tels que :

$$\begin{aligned} y_P' - 2y_P = t^2 - 3t + 1 \Leftrightarrow & \quad 2\alpha t + \beta - 2\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right) = t^2 - 3t + 1 \\ \Leftrightarrow & \quad -2\alpha t^2 + 2(\alpha - \beta)t + \beta - 2\gamma = t^2 - 3t + 1 \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} -2\alpha = 1 & \\ 2\alpha - 2\beta & = -3 \\ \beta - 2\gamma & = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = & -\frac{1}{2} \\ \beta = & 1 \\ \gamma = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Exemple 16.

$$y' - 2y = e^{8t}$$

On pose $y_P(t) = \alpha e^{8t}$ et on cherche le coefficient α.

$$y_P(t) = \alpha e^{8t}$$

donc

$$y_P'(t) = 8\alpha e^{8t}$$

Comme on veut que y_P soit solution de (3), on cherche α tel que :

$$\begin{aligned} y_P' - 2y_P = e^{8t} &\Leftrightarrow 8\alpha e^{8t} - 2\alpha e^{8t} = e^{8t} \\ &\Leftrightarrow 6\alpha e^{8t} = e^{8t} \\ &\Leftrightarrow 6\alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc $y_P(t) = \dfrac{1}{6}e^{8t}$ est une solution particulière de l'équation (3).

Exemple 17.

$$y' - 2y = \cos(3t)$$

On pose $y_P(t) = \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)$ et on cherche les coefficients α et β.

$$y_P(t) = \alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)$$

donc

$$y_P'(t) = 3\beta\cos(3t) - 3\alpha\sin(3t)$$

Comme on veut que y_P soit solution de (4), on cherche α et β tels que :

$$\begin{aligned} y_P' - 2y_P = \cos(3t) &\Leftrightarrow \quad 3\beta\cos(3t) - 3\alpha\sin(3t) - 2(\alpha\cos(3t) + \beta\sin(3t)) = \cos(3t) \\ &\Leftrightarrow \quad (3\beta - 2\alpha)\cos(3t) - (3\alpha + 2\beta)\sin(3t) = \cos(3t) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\beta - 2\alpha = 1 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{2}{13} \\ \beta = \dfrac{3}{13} \end{array} \right.$$

Exemple 18.

$$y' - 3y = e^{3t}$$

Les solutions de l'équation homogène associée $y' - 3y = 0$ sont de la forme $y_H(t) = ke^{3t}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$. On remarque donc que le second membre $\left(e^{3t}\right)$ de l'équation différentielle $y' - 3y = e^{3t}$ est solution de l'équation homogène associée. On pose $y_P(t) = \alpha te^{3t}$ et on cherche le coefficient α.

$$y_P(t) = \alpha te^{3t}$$

donc

$$y_P'(t) = \alpha e^{3t} + 3\alpha te^{3t}$$

Comme on veut que y_P soit solution de (5), on cherche α tel que :

$$\begin{aligned} y_P' - 3y_P = e^{3t} \Leftrightarrow &\quad \alpha e^{3t} + 3\alpha te^{3t} - 3\alpha te^{3t} = e^{3t} \\ \Leftrightarrow &\ \alpha e^{3t} = e^{3t} \\ \Leftrightarrow &\quad \alpha = 1 \end{aligned}$$

Donc $y_P(t) = te^{3t}$ est une solution particulière de (5).

Equations différentielles du premier ordre à variables séparables

Définition

Soit deux intervalles I et J.
On note y les fonction dérivables définies et dérivables sur I à valeur dans J.
On appelle équation différentielle à variables séparables, toute équation qui peut se mettre sous la forme :

$$y' = g(t)h(y) \qquad (E)$$

avec g fonction continue sur I et h fonction continue sur J.

Définition

Soit deux intervalles I et J.
On note y les fonction dérivables définies et dérivables sur I à valeur dans J.
On appelle équation différentielle à variables séparables, toute équation qui peut se mettre sous la forme :

$$y' = g(t)h(y) \qquad (E)$$

avec g fonction continue sur I et h fonction continue sur J.

Proposition

Si $h(a) = 0$ alors $y(t) = a$ est une solution constante de (E).

Définition

Soit deux intervalles I et J.
On note y les fonction dérivables définies et dérivables sur I à valeur dans J.
On appelle équation différentielle à variables séparables, toute équation qui peut se mettre sous la forme :

$$y' = g(t)h(y) \qquad (E)$$

avec g fonction continue sur I et h fonction continue sur J.

Proposition

Si $h(a) = 0$ alors $y(t) = a$ est une solution constante de (E).

Exemple Résoudre l'équation $y' = \dfrac{2y}{t}, t > 0$

Ici $g(t) = \dfrac{1}{t}$ et $h(y) = 2y$
Ici $h(0) = 0$ donc $y(t) = 0$ est une solution de l'équation.

Proposition

Soit deux intervalles I et J.
On note y les fonction dérivables définies et dérivables sur I à valeur dans J.
Soit l'équation différentielle

$$y' = g(t)h(y) \qquad (E)$$

avec g fonction continue sur I et h fonction continue sur J.
Si h ne s'annule pas sur J et si K est une primitive de $\dfrac{1}{h}$ et G une primitve de g alors

$$y' = g(t)h(y) \Leftrightarrow K(y) = G(t) + A, A \in \mathbb{R}$$

Proposition

Soit deux intervalles I et J.
On note y les fonction dérivables définies et dérivables sur I à valeur dans J.
Soit l'équation différentielle

$$y' = g(t)h(y) \qquad (E)$$

avec g fonction continue sur I et h fonction continue sur J.
Si h ne s'annule pas sur J et si K est une primitive de $\frac{1}{h}$ et G une primitve de g alors

$$y' = g(t)h(y) \Leftrightarrow K(y) = G(t) + A, A \in \mathbb{R}$$

Démonstration.

$$y' = g(t)h(y) \Leftrightarrow \frac{y'}{h(y)} = g(t) \Leftrightarrow K(y) = G(t) + A, A \in \mathbb{R}$$

Exemple

Résoudre l'équation $y' = \dfrac{2y}{t}, t > 0$

Exemple

Résoudre l'équation $y' = \dfrac{2y}{t}, t > 0$

Solution

Exemple

Résoudre l'équation $y' = \dfrac{2y}{t}, t > 0$

Solution

Si $y \neq 0$,
$\dfrac{y'}{2y} = \dfrac{1}{t}$

Exemple

Résoudre l'équation $y' = \frac{2y}{t}, t > 0$

Solution

Si $y \neq 0$,
$\frac{y'}{2y} = \frac{1}{t}$
En intégrant :

Exemple

Résoudre l'équation $y' = \frac{2y}{t}, t > 0$

Solution

Si $y \neq 0$,
$\frac{y'}{2y} = \frac{1}{t}$
En intégrant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln|y| &= \ln|t| + A \\ &= \ln|t| + \ln a \\ &= \ln|at| \text{ en posant } \ln a = A\end{aligned}$$

Exemple

Résoudre l'équation $y' = \dfrac{2y}{t}, t > 0$

Solution

Si $y \neq 0$,
$\dfrac{y'}{2y} = \dfrac{1}{t}$
En intégrant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln |y| &= \ln |t| + A \\ &= \ln |t| + \ln a \\ &= \ln |at| \text{ en posant } \ln a = A \end{aligned}$$

On a donc $\ln |y| = 2 \ln |at| = \ln \left((at)^2 \right)$

Exemple

Résoudre l'équation $y' = \dfrac{2y}{t}, t > 0$

Solution

Si $y \neq 0$,
$\dfrac{y'}{2y} = \dfrac{1}{t}$
En intégrant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln|y| &= \ln|t| + A \\ &= \ln|t| + \ln a \\ &= \ln|at| \text{ en posant } \ln a = A\end{aligned}$$

On a donc $\ln|y| = 2\ln|at| = \ln\left((at)^2\right)$
donc $|y| = (at)^2$ donc $y = bt^2 \;\; b \in \mathbb{R}$

Exemple

Résoudre l'équation $y' = \dfrac{2y}{t}, t > 0$

Solution

Si $y \neq 0$,
$\dfrac{y'}{2y} = \dfrac{1}{t}$
En intégrant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln|y| &= \ln|t| + A \\ &= \ln|t| + \ln a \\ &= \ln|at| \text{ en posant } \ln a = A\end{aligned}$$

On a donc $\ln|y| = 2\ln|at| = \ln\left((at)^2\right)$
donc $|y| = (at)^2$ donc $y = bt^2 \;\; b \in \mathbb{R}$
L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme

$$f(t) = at^2, \;\; a \in \mathbb{R}$$

Equations différentielles homogènes du premier ordre

Définition

Une équation différentielle du premier ordre est dite ***homogène*** *si elle peut s'écrire sous la forme*

$$\frac{dy}{dx} = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

où h est une fonction continue

Définition

*Une équation différentielle du premier ordre est dite **homogène** si elle peut s'écrire sous la forme*

$$\frac{dy}{dx} = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

où h est une fonction continue

Résolution d'une équation homogène

En posant le changement de fonction $z = \frac{y}{x}$, on obtient une équation à variables séparées.

Définition

Une équation différentielle du premier ordre est dite ***homogène*** *si elle peut s'écrire sous la forme*

$$\frac{dy}{dx} = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

où h est une fonction continue

Résolution d'une équation homogène

En posant le changement de fonction $z = \dfrac{y}{x}$, on obtient une équation à variables séparées.

Démonstration.

On a $xz = y$ donc $z + xz' = y'$ donc

$$y' = h\left(\frac{y}{z}\right) \Leftrightarrow z + xz' = h(z) \Leftrightarrow \frac{z'}{h(z) - z} = \frac{1}{x}$$

$\square$

Exemple

$$x^2y' + y^2 = 2x^2$$

Exemple

$$x^2y' + y^2 = 2x^2$$

Solution

$y' = -\dfrac{y^2}{x^2} + 2$

On pose $z = \dfrac{y}{x}$ donc $y = zx$ donc $y' = z'x + z$

Exemple

$$x^2 y' + y^2 = 2x^2$$

Solution

$y' = -\frac{y^2}{x^2} + 2$

On pose $z = \frac{y}{x}$ donc $y = zx$ donc $y' = z'x + z$

$$x^2 y' + y^2 = 2x^2$$

$$\Leftrightarrow$$

Exemple

$$x^2y' + y^2 = 2x^2$$

Solution

$y' = -\dfrac{y^2}{x^2} + 2$

On pose $z = \dfrac{y}{x}$ donc $y = zx$ donc $y' = z'x + z$

$$\begin{aligned} & x^2y' + y^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2(z'x + z) + z^2x^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \end{aligned}$$

Exemple

$$x^2y' + y^2 = 2x^2$$

Solution

$y' = -\dfrac{y^2}{x^2} + 2$

On pose $z = \dfrac{y}{x}$ donc $y = zx$ donc $y' = z'x + z$

$$\begin{array}{ll} & x^2y' + y^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow & x^2(z'x + z) + z^2x^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow & xz' + z + z^2 = 2 \\ \Leftrightarrow & \end{array}$$

Exemple

$$x^2y' + y^2 = 2x^2$$

Solution

$y' = -\dfrac{y^2}{x^2} + 2$

On pose $z = \dfrac{y}{x}$ donc $y = zx$ donc $y' = z'x + z$

$$\begin{array}{rl} & x^2y' + y^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow & x^2(z'x + z) + z^2x^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow & xz' + z + z^2 = 2 \\ \Leftrightarrow & xz' = 2 - z - z^2 \\ \\ \Leftrightarrow & \end{array}$$

Exemple

$$x^2y' + y^2 = 2x^2$$

Solution

$y' = -\dfrac{y^2}{x^2} + 2$

On pose $z = \dfrac{y}{x}$ donc $y = zx$ donc $y' = z'x + z$

$$\begin{array}{rl} & x^2y' + y^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow & x^2(z'x + z) + z^2x^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow & xz' + z + z^2 = 2 \\ \Leftrightarrow & xz' = 2 - z - z^2 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{z'}{2 - z - z^2} = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

On décompose la fraction en éléments simples :

$$\frac{1}{2 - z - z^2} = \frac{1}{(1 - z)(z + 2)} = \left(\frac{1}{3(1 - z)} + \frac{1}{3(z + 2)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z'}{2-z-z^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z'}{2 - z - z^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(\frac{1}{3(1-z)} + \frac{1}{3(z+2)}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z'}{2-z-z^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(\frac{1}{3(1-z)} + \frac{1}{3(z+2)}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(-\frac{1}{3}\ln|1-z| + \frac{1}{3}\ln|z+2|\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z'}{2-z-z^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(\frac{1}{3(1-z)} + \frac{1}{3(z+2)}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(-\frac{1}{3}\ln|1-z| + \frac{1}{3}\ln|z+2|\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+z}{1-z}\right| = \ln|ax| \qquad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{z+2}{1-z}\right| = 3\ln|ax|$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{z+2}{1-z}\right| = \ln|ax|^3 \qquad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z+2}{1-z}\right| = |ax|^3, \ a \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z+2}{1-z} = ax^3, \ a \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \quad z+2 = ax^3(1-z)$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(1+ax^3\right) = ax^3 - 2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z'}{2-z-z^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(\frac{1}{3(1-z)} + \frac{1}{3(z+2)}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(-\frac{1}{3}\ln|1-z| + \frac{1}{3}\ln|z+2|\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+z}{1-z}\right| = \ln|ax| \qquad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{z+2}{1-z}\right| = 3\ln|ax|$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{z+2}{1-z}\right| = \ln|ax|^3 \qquad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z+2}{1-z}\right| = |ax|^3,\ \ a \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z+2}{1-z} = ax^3,\ \ a \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \quad z+2 = ax^3(1-z)$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(1+ax^3\right) = ax^3 - 2 \qquad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2+a^3x^3}{a^3x^3-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z'}{2-z-z^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(\frac{1}{3(1-z)} + \frac{1}{3(z+2)}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(-\frac{1}{3}\ln|1-z| + \frac{1}{3}\ln|z+2|\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+z}{1-z}\right| = \ln|ax| \qquad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{z+2}{1-z}\right| = 3\ln|ax|$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{z+2}{1-z}\right| = \ln|ax|^3 \qquad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z+2}{1-z}\right| = |ax|^3, \; a \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z+2}{1-z} = ax^3, \; a \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \quad z+2 = ax^3(1-z)$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(1+ax^3\right) = ax^3 - 2 \qquad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2+a^3x^3}{a^3x^3-1}$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble de fonctions de la forme

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z'}{2-z-z^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(\frac{1}{3(1-z)} + \frac{1}{3(z+2)}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad z'\left(-\frac{1}{3}\ln|1-z| + \frac{1}{3}\ln|z+2|\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+z}{1-z}\right| = \ln|ax| \qquad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{z+2}{1-z}\right| = 3\ln|ax|$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{z+2}{1-z}\right| = \ln|ax|^3 \qquad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z+2}{1-z}\right| = |ax|^3,\ a \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z+2}{1-z} = ax^3,\ a \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \quad z+2 = ax^3(1-z)$$

$$\Leftrightarrow \quad z\left(1+ax^3\right) = ax^3 - 2 \qquad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2+a^3x^3}{a^3x^3-1}$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble de fonctions de la forme

$$f(x) = x\frac{2+Ax^3}{Ax^3-1}, A \in \mathbb{R}$$

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

On désigne toujours par $\mathbb{K}$ l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$.

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{K} (a \neq 0)$, et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

La fonction f s'appelle le second membre. On appelle solution sur I de (E) toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I telle que :

$$\forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

La courbe représentative d'une solution y sur I est alors appelée courbe intégrale sur I.

Remarque Soit y une solution de (E) sur I, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. En effet, elle est supposée deux fois dérivable sur I.

De plus f'' est continue sur I puisque $y''(t) = \frac{1}{a}f(t) - \frac{b}{a}y'(t) - \frac{c}{a}y(t)$

Exemples d'équations différentielles linéaires du second ordre.

- La tension U aux bornes d'un condensateur de capacité C en série avec une résistance R, une bobine d'inductance L et un générateur de force électromotrice $E(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$LCU'' + RCU' + U = E(t)$$

- L'intensité I dans un circuit LC constitué d'un condensateur de capacité R et d'une bobine d'inductance L vérifie l'équation différentielle :

$$I'' + \frac{1}{LC} I = 0$$

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K} (a \neq 0)$, et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle linéaire suivante :

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

On appelle équation différentielle homogène (sans second membre) associée à (E) l'équation :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Proposition

L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$ de (E_0) est stable par combinaison linéaire, c'est à dire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathcal{S}_0, \lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_0$$

Proposition

Pour $r \in \mathbb{K}$, la fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ si et

Définition

On appelle équation caractéristique associée à (E) *l'équation* $ar^2 + br + c = 0$ *d'inconnue* $r \in \mathbb{C}$.

Proposition (Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$)

On considère trois nombres $a, b, c \in \mathbb{C}$ où $a \neq 0$, et l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + c = 0$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- *Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes r et r'. Les solutions complexes de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{r' t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Proposition (Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{C}$)

On considère trois nombres $a, b, c \in \mathbb{C}$ où $a \neq 0$, et l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + c = 0$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- *Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes r et r'. Les solutions complexes de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{r' t}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

- *Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine double $r = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{C}$.*
  Les solutions complexes de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Démonstration.

Soit r une solution de l'équation caractéristique (qui existe toujours sur $\mathbb{C}$).
La fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.
Posons maintenant $y(t) = u(t)e^{rt}$ avec u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On montre alors que y est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si u est solution de l'équation :

$$au''(t) + (2ar + b)u'(t) + \left(ar^2 + br + c\right) u(t) = 0.$$

Puisque $ar^2 + br + c = 0$ et $r + r' = -\dfrac{b}{a}$, soit $2ar + b = a\left(r - r'\right)$, celle-ci s'écrit :

$$u''(t) + \left(r - r'\right) u'(t) = 0.$$

... suite ...

Démonstration.

On obtient ici une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en u'

- Si $\Delta = 0$, alors $r = r'$ et l'équation devient $u''(t) = 0$, d'où :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \quad u(t) = \lambda + \mu t \quad \text{et} \quad y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}.$$

- Si $\Delta \neq 0$, alors r et r' sont distinctes, et la résolution de l'équation donne $u'(t) = \lambda e^{(r-r')t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, et donc :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C} : \quad u(t) = \lambda e^{(r-r')t} + \mu \quad \text{et} \quad y(t) = \lambda e^{rt} + \mu e^{r't}$$

□

Proposition (Résolution de l'équation homogène dans $\mathbb{R}$)

On considère trois nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ où $a \neq 0$, et l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + c = 0$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- *Si $\Delta > 0$: l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r et r'. Les solutions de (E_0) sont alors les fonctions de la forme : $t \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{r't}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.*
- *Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine double $r \in \mathbb{R}$. La solution générale de (E_0) est $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.*
- *Si $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux solutions complexes non réelles $\alpha \pm i\beta$, (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$). La solution générale de (E) est $x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.*

Remarque. On peut aussi écrire $x \mapsto e^{\alpha x}(A \cos(\beta x + \phi))$, avec $(A, \phi) \in \mathbb{R}^2$

Démonstration.

Notons d'abord que les solutions à valeurs réelles de cette équation sont des solutions à valeurs complexes caractérisées par le fait qu'elles sont égales à leur conjugué). On a donc selon le signe du discriminant :

- si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines distinctes $r < r'$. Les solutions complexes sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{r't}$$

avec$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Ces solutions sont réelles si pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda e^{rt} + \mu e^{r't} = \bar{\lambda} e^{rt} + \bar{\mu} e^{r't}$$

soit si $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\mu = \bar{\mu}$ (quitte à prendre $t = 0$ ou à faire $t \to +\infty$).

suite ...

□

Démonstration.

Inversement si $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\mu = \bar{\mu}$, l'égalité précédente est bien vérifiée. Les solutions réelles dans ce cas sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{rt} + \mu e^{r't} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- On traite le cas $\Delta = 0$ de façon similaire.
- si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. Les solutions complexes sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t}$$

avec$(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Ces solutions sont réelles si pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda e^{(\alpha+i\beta)t} + \mu e^{(\alpha-i\beta)t} = \bar{\lambda} e^{(\alpha-i\beta)t} + \bar{\mu} e^{(\alpha+i\beta)t}$$

soit si $\lambda = \bar{\mu}$ (quitte à prendre $t = 0$ ou $t = \pi/2\beta$).

Démonstration.

Inversement si $\lambda = \bar{\mu}$, l'égalité précédente est bien vérifiée. Si on note $\lambda = a + ib$, les solutions réelles sont donc les fonctions de la forme (avec $a, b \in \mathbb{R}$)

$$t \mapsto (a+ib)e^{(\alpha+i\beta)t} + (a-ib)e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(2a\cos(\beta t) - 2b\sin(\beta t))$$

Enfin :

En posant ϕ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{a^2+b^2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{a^2+b^2}$

On a

$$\begin{aligned} a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t) &= (a^2+b^2)(\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi) \\ &= (a^2+b^2)\cos(\beta+\varphi) \end{aligned}$$

$\square$

Remarque On dit que l'ensemble des solutions de (E_0) forme un plan vectoriel, puisque celles-ci sont combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles (que ce soit dans le cas réel ou complexe).

Exemple. Déterminer les solutions réelles et complexes de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$, et montrer qu'elles tendent vers 0 en $+\infty$.

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K} (a \neq 0)$, et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

Alors toute solution de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_P de (E) une solution de l'équation homogène associée (E_0). Ainsi l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) satisfait :

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$$

Remarque

- Pour obtenir l'ensemble des solutions de (E), il faudra donc déterminer une solution particulière de (E), et lui ajouter l'ensemble des solutions de (E_0) (dont on a vu la forme).
- L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc la somme d'un point y_p et de combinaisons linéaires de deux fonctions non proportionnelles. On dit alors que $\mathcal{S}$ est un plan affine.

Proposition (Principe de superposition)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{K}(a \neq 0)$, et $f_1, f_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur I et les équations différentielles :

$$(E_1) : ay'' + by' + cy = f_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) : ay'' + by' + cy = f_2(t)$$

Si y_1 est solution sur I de (E_1), y_2 est solution sur I de (E_2), alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda y_1 + \mu y_2$ est solution sur I de :

$$ay'' + by' + cy = \lambda f_1 + \mu f_2.$$

Proposition (Solution particulière avec second membre exponentiel-polynôme)

On considère des nombres $a, b, c, \lambda \in \mathbb{K}$ (où $a \neq 0$), une fonction polynomiale P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et l'équation différentielle linéaire :

$$ay'' + by' + c = e^{\lambda t} P(t).$$

Alors l'équation (E) a au moins une solution particulière de la forme

$$t \mapsto e^{\lambda t} t^m Q(t)$$

où Q est une fonction polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $\deg(Q) = \deg(P)$ et :

- *$m = 0$ si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique*
- *$m = 1$ si λ est racine simple du polynôme caractéristique*
- *$m = 2$ si λ est racine double du polynôme caractéristique*

Exemple.

Déterminer les solutions réelles de (E) : $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$.

Solutions L'équation caractéristique de (E) est $r^2 - 3r + 2 = 0$, dont les solutions sont 1 et 2 . Ainsi la solution générale de l'équation homogène associée à (E) est

$$x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Comme 2 est solution simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto xQ(x)e^{2x}$, avec Q fonction polynomiale de degré 1 , donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que $Q(x) = (ax + b)$.

y est deux fois dérivable comme produit de fonctions qui le sont, et

$$\begin{aligned} y'(x) &= (2ax + b)e^{2x} + 2\left(ax^2 + bx\right) e^{2x} \\ &= \left(2ax^2 + 2bx + 2ax + b\right) e^{2x} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} y''(x) &= (4ax + 2b + 2a)e^{2x} + 2\left(2ax^2 + 2bx + 2ax + b\right) e^{2x} \\ &= \left(4ax^2 + 4bx + 8ax + 4b + 2a\right) e^{2x} \end{aligned}$$

En reportant dans (E), il vient

$$\begin{aligned} xe^x &= \left(4ax^2 + 4bx + 8ax + 4b + 2a\right) e^{2x} \\ &\qquad - 3\left(2ax^2 + 2bx + 2ax + b\right) e^{2x} + 2\left(ax^2 + bx\right) e^{2x} \\ &= 2axe^{2x} + (b + 2a)e^{2x} \end{aligned}$$

donc $2a = 1$ et $b + 2a = 0$ par unicité des coefficients d'un polynôme, i.e. $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -1$.

Une solution particulière est donc $x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right) e^{2x}$ et la solution générale de (E) est

$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) e^{2x} + \lambda e^{2x} + \mu e^x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Définition

Étant donnés trois nombres a, b, c *de* $\mathbb{K} (a \neq 0)$ *et une fonction continue* $f : I \to \mathbb{K}$, *on considère l'équation différentielle :*

$$ay'' + by' + cy = f(t).$$

Le problème de Cauchy associé à un triplet $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$ *est la recherche des solutions de* (E) *vérifiant les deux conditions initiales* $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0'$.

Proposition

Pour $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K}^2$*, le problème de Cauchy associé aux conditions initiales* $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0'$ *admet une solution unique sur* I*.*

Proposition

On considère trois nombres a, b, c de $\mathbb{R} (a \neq 0)$, une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ et l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = f(t).$$

1. *Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point $M_0\,(t_0, y_0)$ de $I \times \mathbb{R}$ avec une tangente de pente donnée $y_0' \in \mathbb{R}$ en ce point.*
2. *Deux telles courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper dans $I \times \mathbb{R}$ avec une tangente commune.*

Démonstration.

Le premier point est une reformulation du résultat précédent.
Montrons le deuxième point : supposons que deux courbes intégrales se coupent en $M_0\left(t_0, y_0\right)$ avec une tangente commune de pente $y_0' \in \mathbb{R}$.
Notons y_1 et y_2 les solutions de (E) sur I correspondantes. Elles sont donc toutes deux solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) \\ y\left(t_0\right) = y_0 \\ y'\left(t_0\right) = y_0' \end{cases}$$

Par unicité, on a donc $y_1 = y_2$. $\square$

Remarque La seule solution de (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$ telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ est la fonction nulle. En effet, la fonction nulle est solution de (E_0). Et par la proposition précédente, c'est l'unique solution telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$.

Application à la mécanique

Exercice

Considérons le mouvement d'une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur K et de longueur L, et soumise à une force de frottement fluide (par exemple en plaçant l'oscillateur dans un liquide visqueux) $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$.

1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que l'équation du mouvement est régie par l'équation différentielle :

$$z'' + 2\lambda z' + \omega_0^2 z = 0$$

avec $\begin{cases} 2\lambda = \dfrac{\alpha}{m} \text{ le coefficient d'amortissement de l'oscillateur} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \text{ qui représente sa pulsation propre} \end{cases}$

2. On précise les conditions initiales : $z(0) = 10$ et $z'(0) = 0$ (c'est à dire qu'on suppose l'oscillateur lâché sans vitesse initiale après avoir tiré d'une longueur 10 à partir de sa position d'équilibre).
   a) Avec $\lambda = 0, \omega_0 = 1$, déterminer l'expression explicite du mouvement.
   b) Avec $\lambda = \omega_0 = 1$, déterminer l'expression explicite du mouvement.

c) Avec $\lambda = 1, \omega_0 = \sqrt{5}$, déterminer l'expression explicite du mouvement.

Solution

1. Si l'origine est en haut du ressort et l'axe vertical orienté vers le bas, la loi fondamentale de la dynamique donne :

$$mz'' = -\alpha z' - K(z - L) + mg \text{ ou } mz'' + \alpha z' + Kz = KL + mg.$$

Cette équation équation différentielle a un second membre constant, et on vérifie que $z_0 = L + \dfrac{mg}{K}$ est solution constante (correspondant à l'équilibre).
En portant l'origine en z_0, i.e. en posant $Z = z - z_0$, on obtient :

$$mZ'' + \alpha Z' + KZ = 0 \text{ ou } Z'' + 2\lambda Z' + \omega_0^2 Z = 0.$$

2. Dans tous les cas l'équation caractéristique est $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$
   a) Avec $\lambda = 0, \omega_0 = 1$, $r_1 = i\omega_0$ et $r_2 = -i\omega_0$
   La solution de l'équation est $z(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{i\omega_0 t}$
   Avec les conditions initiales : $A + B = 10$ et $A - B = 0$ donc
   $A = B = 5$ donc $z(t) = 5(e^{i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}) = 10\cos(\omega_0 t)$

b) Avec $\lambda = \omega_0 = 1$, $r_1 = \dfrac{-1+i}{2}$
c) Avec $\lambda = 1, \omega_0 = \sqrt{5}$, déterminer l'expression explicite du mouvement.

Interprétation géométrique. Dans ce dernier cas, on observe un comportement transitoire qui présente quelques oscillations périodiques avant de retrouver un état stable.

3. Supposons toujours $\lambda = 1, \omega_0 = \sqrt{5}$. On impose à présent à l'extrémité supérieure du ressort un mouvement verticale sinusoïdale de sorte que son ordonnée à l'instant t est $f(t) = 5\cos(t)$. Déterminer une expression explicite du mouvement. Déterminer le comportement asymptotique des solutions (état stable).
Vocabulaire. Le second membre d'une équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(t)$ est également appelé signal d'entrée et les solutions de l'équation définiront la réponse du système étudié. On parle de régime libre si f est la fonction nulle, et de régime forcé sinon. Dans le cas d'un oscillateur harmonique amorti en régime libre, on parle de :
   - régime apériodique quand $\lambda > \omega_0$,
   - régime critique quand $\lambda = \omega_0$,

- régime pseudo-périodique quand $\lambda < \omega_0$.