Intégration

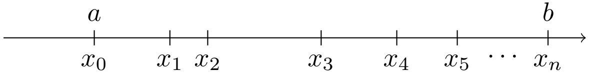
Intégrale d'une fonction en escalier

Subdivision

Définition

*On appelle **subdivision** d'un segment $[a,b]$ toute suite finie $s = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ de nombres réels tels que :*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

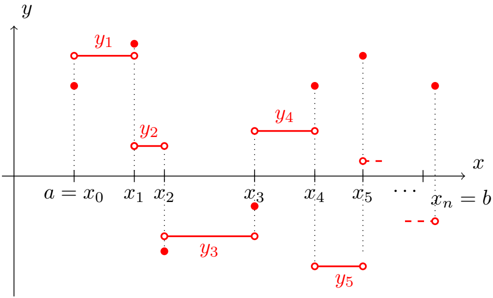


Fonction en escalier

Définition (Fonction en escalier, subdivision adaptée)

On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est ***en escalier*** *si pour une certaine subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$, dite* ***adaptée à*** *f on a*

$$\text{Pour tout } i \in [\![0, n-1]\!],\ f \text{ est constante sur }]x_i, x_{i+1}[\ .$$



Notation Au besoin on utilisera la notation

$$\mathcal{E}_{[a;b]} = \{\phi : [a;b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier sur } [a;b] \ \}$$

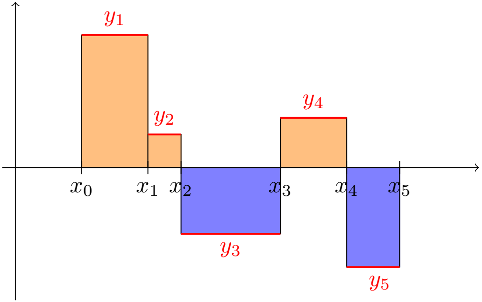
Théorème (Propriétés élémentaires des fonctions en escalier)

Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier.

- *Lorsqu'on ajoute un nombre fini de points à une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, le résultat est encore une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f.*
  A fortiori, la réunion d'une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et d'une subdivision de $[a,b]$ adaptée à g est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f ET à g.
- *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda f + \mu g$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, de même que $|f|$, $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et fg.*

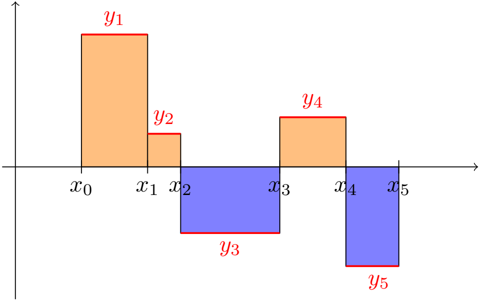
Théorème (Intégrale d'une fonction en escalier)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow$ en escalier.
Soit en outre $(x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f.
Si pour tout $i \in [0, n-1]$, on note y_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$, alors le nombre complexe : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i \,(x_{i+1} - x_i)$ ne dépend pas de la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ choisie.



Définition

La valeur du théorème précédent est appelée intégrale de f sur $[a, b]$, notée : $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ *ou* $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t$ *ou* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.



Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier)

Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *en escalier.*

1. *Linéarité : Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{C} : \displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$
2. *Inégalité triangulaire :* $\displaystyle\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$
3. *Relation de Chasles : Pour tout* $c \in [a, b] : \displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$
4. *Lien avec les parties réelles et imaginaires :* $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i} \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f).$

Démonstration.

Donnons-nous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, c \in [a, b]$ et une subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ adaptée à f ET à g - mais donc aussi à $\lambda f + \mu g, |f|, \mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

1. $$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{(\lambda f + \mu g)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}^{\text{Valeur de } \lambda f + \mu g} (x_{i+1} - x_i)$$
$$= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) + \mu \sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)$$
$$= \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

□

Démonstration.

2. D'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$:

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right|(x_{i+1} - x_i) = \int_{[a,b]} |f|.$$

$\square$

Démonstration.

3. Quitte à ajouter le point c à la subdivision $(x_0, \ldots, x_n)$, on peut supposer que : $x_k = c$ pour un certain $k \in [0, n]$.

   La fonction $f_{[a,c]}$ est alors en escalier sur $[a, c]$ de subdivision adaptée $(x_0, \ldots, x_k)$, et la fonction $f_{[c,b]}$ l'est sur $[c, b]$ de subdivision adaptée $(x_k, \ldots, x_n)$.

   Enfin :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=k}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

□

Démonstration.

4. Cela découle de la linéarité de l'intégrale pour $\lambda = 1$ et $\mu = i$.
   On peut aussi le démontrer directement :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Re}(f)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) + i\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Im}(f)\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$$

$\square$

Intégrale d'une fonction continue (par morceaux)

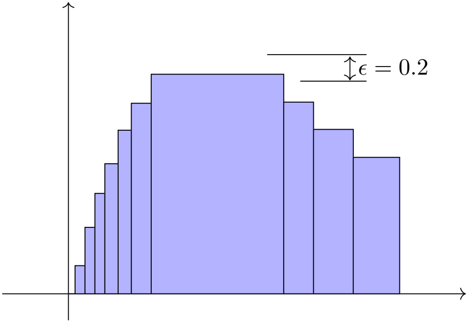
Théorème

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$.
Alors il existe $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier telle que

$$\forall x \in [a,b], |f(x) - \theta(x)| \leqslant \epsilon$$

Démonstration.

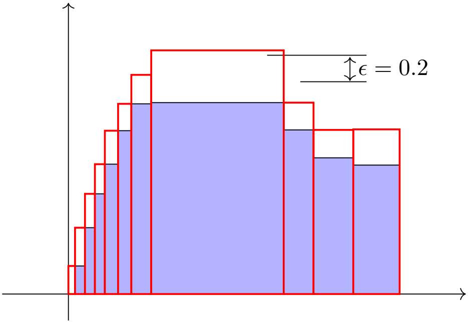
Admis. □

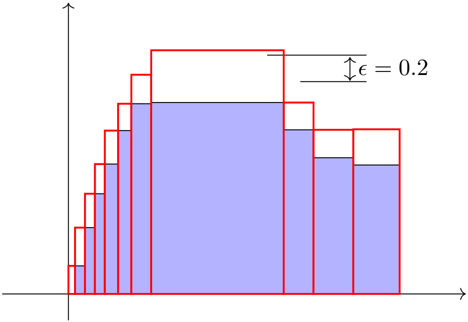


Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a, b]$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe deux fonctions* $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ *telles que :*

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon.$$





Démonstration.

D'après le théorème précédent, on a θ en escaliers telle que $\forall x \in [a, b], |f(x) - \theta(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. $\theta(x) - \frac{\epsilon}{2} \leqslant f(x) \leqslant \theta(x) + \frac{\epsilon}{2}$. On pose alors les fonctions en escalier $\varphi = \theta - \frac{\epsilon}{2}$ et $\psi = \theta + \frac{\epsilon}{2}$ pour obtenir le résultat. $\square$

On suppose à présent que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée quelconque.

Théorème

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors :

1. $\mathcal{A}^-_{[a,b]}(f) = \left\{ \int_a^b \phi(x)dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f \right\}$ *admet une borne supérieure,*
2. $\mathcal{A}^+_{[a,b]}(f) = \left\{ \int_a^b \psi(x)dx \mid \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi \right\}$ *admet une borne inférieure, et ces deux bornes sont égales.*

Notation Au besoin on utilisera les notations

$$\mathcal{E}^-_{[a;b]}(f) = \{\phi \text{ en escalier sur } [a;b] \text{ telle que } \phi \leqslant f\}$$

$$\mathcal{E}^+_{[a;b]}(f) = \{\psi \text{ en escalier sur } [a;b] \text{ telle que } f \leqslant \psi\}$$

Démonstration.

La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$.
Posons $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.

- $\mathcal{A}^-_{[a,b]}(f)$ est non vide puisqu'il contient la fonction constante m.
  Ainsi $A^-_{[a,b]}(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
  De plus pour tout $\varphi \in \mathcal{A}^-_{[a,b]}(f)$, on a $\varphi \leqslant f \leqslant M$.
  Donc :
  $$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} M = M(b-a).$$
  L'ensemble $A^-_{[a,b]}(f)$ est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée (par $M(b-a)$). Il possède donc une borne supérieure que l'on note α.
- De même, $A^+_{[a,b]}(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par $m(b-a)$. Il possède donc une borne inférieure que l'on note β.

Démonstration.

- Supposons $\beta < \alpha$.
  Alors, comme α est la borne sup de $\mathcal{A}^-$, il existe ϕ en escalier tel que $\phi \leqslant f$ et $\beta < \int_{[a,b]} \varphi < \alpha$.
  Alors pour toute fonction ψ en escalier tel que $f \leqslant \psi$, on a
  $$\varphi \leqslant f \leqslant \psi$$
  donc
  $$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$$
  Donc $\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \beta$ Ce qui est contradictoire avec $\beta < \int_{[a,b]} \varphi$. Donc $\alpha \leqslant \beta$

$\square$

Autre démonstration

Démonstration.

- Puisque pour tout φ en escalier telle que $\varphi \leqslant f$ et ψ en escalier telle que $f \leqslant \psi$, on a $\varphi \leqslant \psi$, on a $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi$.

  Ainsi $\displaystyle\int_{[a,b]} \psi$ est un majorant de $\mathcal{A}^-(f)$, la borne supérieure α de $\mathcal{A}^-(f)$ est donc plus petite que $\displaystyle\int_{[a,b]} \psi$.

  On obtient :

  $$\text{Pour toute fonction en escalier } \psi \text{ telle que } f \leqslant \psi, \quad \alpha \leqslant \int_{[a,b]} \psi$$

  De même, α est un minorant de $\mathcal{A}^+_{[a,b]}(f)$, et β est le plus grand des minorants de cette partie. Donc $\alpha \leqslant \beta$.

$\square$

Démonstration.

- Soit $\epsilon > 0$.
  On sait qu'il existe $\varphi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^-_{[a;b]}(f)$ telles que $\phi \leqslant f \leqslant \psi$ telles que pour tout $x \in [a,b]$, $\psi(x) - \varphi(x) \leqslant \epsilon$.
  On a alors :
  $$\int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \epsilon(b-a)$$
  Or par définition de α et β, on a :
  $$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \int_{[a,b]} \psi$$
  D'où pour tout $\varepsilon > 0$,
  on a
  $$0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leqslant \epsilon(b-a)$$
  Finalement, on a bien $\alpha = \beta$.

$\square$

Définition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*

On appelle intégrale de f *sur* $[a,b]$ *le nombre réel noté* $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ *défini par :*

$$\int_{[a,b]} f = \sup\left\{\int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)\right\} = \inf\left\{\int_{[a,b]} \psi \mid \psi \in \mathcal{E}^+_{[a,b]}(f)\right\}$$

Proposition (Linéarité)

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continues et* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

Proposition (Lemme)

Soit $\varepsilon > 0$.
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue et* $\theta \in \mathcal{E}_{[a,b]}$ *telles que* $|f - \theta| \leqslant \varepsilon$, *alors*

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leqslant (b-a)\varepsilon$$

Démonstration.

On a $\theta - \varepsilon \leqslant f \leqslant \theta + \varepsilon$, d'où (par définition de l'intégrale) :

$$\int_{[a,b]} (\theta - \varepsilon) \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} (\theta + \varepsilon)$$

Par linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\left| \int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta \right| \leqslant \int_{[a,b]} \varepsilon \leqslant (b-a)\varepsilon.$$

$\square$

Démonstration.

On définit

- θ_1 tel que $|f - \theta_1| < \epsilon$
- θ_2 tel que $|g - \theta_2| < \epsilon$
- $h = \lambda f + \mu g$
- $\theta = \lambda\theta_1 + \mu\theta_2$
- $I = \int_{[a,b]} \theta = \lambda \int_{[a,b]} \theta_1 + \mu \int_{[a,b]} \theta_2$ (par linéarité pour les fonctions en escalier).

On a :

$$|h - \theta| \leqslant |\lambda(f - \theta_1) + \mu(g - \theta_2| \leqslant (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$$

Par le lemme :

$$\left| \int_{[a,b]} h - I \right| \leqslant \left| \int_{[a,b]} h - \int_{[a,b]} \theta \right| \leqslant (b - a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon$$

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned}
&\left|\lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g - I\right| \\
\leqslant\ & \left|\lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g - \lambda \int_{[a,b]} \theta_1 - \mu \int_{[a,b]} \theta_2\right| \\
\leqslant\ & \left|\lambda \left(\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} \theta_1\right) + \mu \left(\int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} \theta_2\right)\right| \\
\leqslant\ & |\lambda|(b-a)\varepsilon + |\mu|(b-a)\varepsilon \\
\leqslant\ & (b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Démonstration.

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left| \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) - \left(\lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g \right) \right| \\
&= \left| \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) - I + \left(I - \lambda \int_{[a,b]} f - \mu \int_{[a,b]} g \right) \right| \\
&= \left| \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) - I \right| + \left| I - \lambda \int_{[a,b]} f - \mu \int_{[a,b]} g \right) \right| \\
&\leqslant 2(b-a)(|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme c'est vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, on en déduit $\Delta = 0$, et donc la linéarité de l'intégrale. □

Proposition (Relation de Chasles)

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et $c \in [a, b]$.

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Démonstration.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-_{[a,b]}(f)$.
On a alors :

$$\varphi_{[a,c]} \in \mathcal{E}^-_{[a,c]}(f) \text{ et } \varphi_{[c,b]} \in \mathcal{E}^-_{[c,b]}(f).$$

Par définition de l'intégrale, on obtient :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

$\square$

Démonstration.

Ainsi $\displaystyle\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ est un majorant de $\mathcal{A}^{-}_{[a,b]}(f)$.
Par définition de la borne supérieure :

$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,q]} f + \int_{[c,b]} f$$

En appliquant (linéarité) ce résultat à $-f$, on en déduit l'inégalité inverse, et donc :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

$\square$

Notation.
Soient a et b deux réels quelconques (en particulier on ne suppose plus nécessairement $a < b$).
Soit f une fonction continue entre a et b.
On définit le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ par :

- si $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$;
- si $a = b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$;
- si $b < a$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f(x)dx$.

La relation de Chasles et la linéarité sont alors vraies pour a, b, c quelconques.

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *continues sur un intervalle* I *et* $a, b \in I$.

1. $f \geqslant 0$ et $a \leqslant b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$ *(positivité de l'intégrale)*
2. $f \leqslant g$ et $a \leqslant b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$ *(passage aux inégalités)*
3. $a \leqslant b \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$ *(inégalité de la norme)*
4. *Si* $a \leqslant b$ *et* $m \leqslant f \leqslant M$ *entre* a *et* b, *alors*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

.

Attention Bien vérifier $a < b$.

Démonstration.

1. Puisque $f \geqslant 0$, alors $\varphi = 0$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $\varphi \leqslant f$.
   Par définition de l'intégrale de f sur $[a, b]$, on en déduit que
   $$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b \varphi(x)dx = 0.$$
2. On applique le point précédent à la fonction $h = g - f \geqslant 0$:
   $$\int_a^b h(x)dx \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geqslant \int_a^b f(x)dx$$
   par linéarité de l'intégrale.

$\square$

Démonstration.

3. On a pour tout $x \in [a, b], -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$. D'où par croissance de l'intégrale :

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

Ainsi, on obtient $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

4. Il suffit de prendre l'intégrale dans les inégalités $m \leqslant f \leqslant M$.

□

Remarque. La majoration suivante, vraie également si $b < a$, peut être utile :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\, dx\right|$$

Définition

La valeur moyenne d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$$

Remarque. La valeur moyenne est la constante μ qui vérifie

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mu$$

Proposition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et positive alors*

$$\int_{[a,b]} f = 0 \text{ si et seulement si } f \text{ est nulle sur } [a, b].$$

Démonstration.

$\Leftarrow$ Si f est nulle, son intégrale est nulle.
$\Rightarrow$ Par contraposition, supposons que f n'est pas nulle sur $[a, b]$: $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$.

D'après la définition de la continuité de f en c avec $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2}$:

$$\exists a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b, \forall x \in [a, b], x \in [\alpha, \beta] \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, on a $f(x) \leqslant \dfrac{\ell(c)}{2}$.
En prenant l'intégrale, on en déduit donc que :

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant \int_\alpha^\beta \varepsilon dx = (\beta - \alpha)\varepsilon > 0.$$

□

Remarque. Si f n'est pas supposée continue, le résultat est faux : par exemple $f(x) = 0$ sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est positive, non nulle mais $\int_0^1 f = 0$.

Calcul intégral

Définition

Soient I un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction continue.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur I dont la dérivée est f.

Proposition (Lien entre deux primitives d'une même fonction)

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante c'est à dire :
Si F_1 et F_2 sont des primitives de f alors

$$\exists C \in \mathbb{K}, F_1 - F_2 = C$$

Démonstration.

Si F_1 et F_2 sont deux primitives de la fonction F sur I, alors $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ donc la fonction $F_1 - F_2$ est constante sur I. $\square$

Proposition (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to K$ une fonction continue, et $a \in I$.

1. *La fonction $F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.*
2. *Pour toute primitive $F : I \to \mathbb{K}$ de f, on a*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Démonstration.

1. La fonction F est définie pour tout $x \in I$ car f est continue sur $[a, x]$ ou $[x, a]$ (selon que $x \geqslant a$ ou $x \leqslant a$).
   Soit $x_0 \in I$, montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.
   On a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt - f(x_0)\\ &= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t) - f(x_0)\, dt\end{aligned}$$

   D'où avec l'inégalité de la moyenne (on vérifie que cette inégalité est aussi vraie si $x < x_0$) :

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\, dt$$

A suivre

Démonstration.

1. (suite) Or f est continue en x_0, donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in I, |t - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Alors pour tout $x \in I, |x - x_0| \leqslant \alpha$, on a pour tout $t \in [x_0, x], |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ et en reportant :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \varepsilon dt \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi on a montré que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Puisque c'est vrai pour tout $x_0 \in I$ et que f est continue, on en déduit finalement que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $F' = f$.

A suivre □

Démonstration.

1. (suite)
   Reste à montrer que F est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Si G satisfait aussi ces propriétés, alors on a vu qu'il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $F = G + C$.
   En évaluant en $x = a$, on obtient $C = 0$, et donc $F = G$.
2. Soit $h : x \mapsto F(x) - F(a)$. Alors h est dérivable sur I comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont, et pour $x \in I, h'(x) = F'(x) = f(x)$. De plus $h(a) = 0$, donc h est une primitive de f s'annulant en a. D'après l'unicité du point précédent, on a pour tout $x \in I, h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. D'où le résultat.

□

Notations.

- Le symbole $\int f(x)dx$ (introduit par Leibniz) désigne une primitive quelconque de f. Elle est donc définie à une constante additive près.
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)$ dt est la primitive de f s'annulant en a.

Proposition

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $u(I), v(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{K}$ continue. Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est définie sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in I, g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Démonstration.

Pour tout $x \in I$, on a $u(x), v(x) \in J$ et J est un intervalle. Donc $[u(x), v(x)] \subset J$ et $g(x)$ existe pour tout $x \in I$.
La fonction $f : J \to \mathbb{K}$ étant continue sur J, elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. On a alors pour tout $x \in I$,

$$g(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que différence et composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x \in I$, on a :

$$g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

□

Proposition (Intégration par parties)

Soient f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$.

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Démonstration.

On a

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt = \int_a^b (f'(t)g(t) + f(t)g'(t))\, dt$$

$$= \int_a^b (fg)'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b$$

puisque fg est $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions qui le sont. $\square$

Démonstration.

(suite) On a

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt = \int_a^b \left(f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\right) dt$$

$$= \int_a^b (fg)'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b$$

puisque fg est $\mathcal{C}^1$ comme produit de fonctions qui le sont. $\square$

Proposition (Changement de variable)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I.
Soient $\varphi : [a,b] \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{dx} = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{dt}.$$

On dit qu'on a effectué le changement de variables $x = \varphi(t)$.

Démonstration.

Si F est une primitive de f, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $f \circ \varphi \times \varphi'$ et on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{dx} = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

$$\int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\mathrm{dt} = [F \circ \varphi(t)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

□

En pratique, il faut modifier trois éléments

- la variable $x = \phi(t)$,
- l'élément différentiel $dx = \phi'(t)dt$,
- les bornes de l'intégrale : si t varie entre a et b, $x = \phi(t)$ doit varier entre $\phi(a)$ et $\phi(b)$.

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

1. *si f est périodique de période T, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:*
$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt, \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_b^{b+T} f(t)dt$$
2. *si f est une fonction paire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$:* $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$
3. *si f est une fonction impaire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$:* $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$

Recherche de primitives

Rappelons au cas où que nous savons primitiver aisément un certain nombre de fonctions classiques :

- les fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$ avec $a, b \in \mathbb{R}^*$ grâce à l'exponentielle complexe,
- les fonctions de la forme $x \longmapsto \sin^m x \cos^n x$ avec $m, n \in \mathbb{N}$ par linéarisation,
- les fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples.

Les tableaux ci-dessous donnent enfin la liste des quelques primitives qu'il faut connaitre à tout prix.

Fonction	Primitive
e^x	e^x
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Intégration des éléments simples

Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où $P(x), Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels.
Alors la fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme $E(x) \in \mathbb{R}[x]$ (la partie entière) et d'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} \text{ avec } b^2-4ac<0$$

où $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1. Intégration du polynôme $E(x)$. On sait faire.
2. Intégration de l'élément simple $\dfrac{\gamma}{(x-x_0)^x}$
3. Intégration de l'élément simple $\dfrac{ax+\beta}{(ax^2+bx+c)^x}$.

Intégration des éléments simples

2. Intégration de l'élément simple $\dfrac{\gamma}{(x-x_0)^x}$.
    1. Si $k=1$ alors $\displaystyle\int \frac{\gamma dx}{x-x_0} = \gamma \ln|x-x_0| + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).
    2. Si $k \geqslant 2$ alors $\displaystyle\int \frac{\gamma dx}{(x-x_0)^k} = \gamma \int (x-x_0)^{-k}\,dx = \frac{\gamma}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1} + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).

Intégration des éléments simples

3. Intégration de l'élément simple $\dfrac{ax+\beta}{(ax^2+bx+c)^x}$. On écrit cette fraction sous la forme

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}=\gamma\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}+\delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$

   a) Pour le terme $\dfrac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}$

      1. Si $k=1$, calcul de $\displaystyle\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=$ $\ln|u(x)|+c_0=\ln\left|ax^2+bx+c\right|+c_0$.
      2. Si $k\geqslant 2$, calcul de $\displaystyle\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^2}dx=\int\frac{u'(x)}{u(x)^k}dx=$ $\dfrac{1}{-k+1}u(x)^{-k+1}+c_0=\dfrac{1}{-k+1}\left(ax^2+bx+c\right)^{-k+1}+c_0$.

Intégration des éléments simples

b) Pour le terme $\dfrac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$

1. Si $k=1$, calcul de $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$. Par un changement de variable $u=px+q$ on se ramène à calculer une primitive du type $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c_0$.
2. Si $k \geqslant 2$, calcul de $\displaystyle\int_{(ax^2+bx+c)^k} dx$. On effectue le changement de variable $u=px+q$ pour se ramener au calcul de $I_k = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$. Une intégration par parties permet de passer de I_k à I_{k-1}.

Exemple Calculons I_2. Partant de $I_1 = \int \frac{du}{u^2+1}$ on pose $f = \frac{1}{u^2+1}$ et $g' = 1$. La formule d'intégration par parties $\int fg' = [fg] - \int' f'g$ donne (avec $f' = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}$ et $g = u$)

$$I_1 = \int \frac{du}{u^2+1} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + \int \frac{2u^2 du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2} du$$
$$= \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{du}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2I_1 - 2I_2$$

On en déduit $I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c_0$. Mais comme $I_1 = \arctan u$ alors

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c_0$$

Intégration des fonctions trigonométriques

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\displaystyle\int P(\cos x, \sin x)dx$ ou de la forme $\displaystyle\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}dx$ quand P et Q sont des polynômes, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle. Il existe deux méthodes :

- les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours ;
- le changement de variable $t = \tan \dfrac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

Intégration des fonctions trigonométriques

Les règles de Bioche.
On note $\omega(x) = f(x)dx$. On a alors $\omega(-x) = f(-x)d(-x) = -f(-x)dx$ et $\omega(\pi - x) = f(\pi - x)d(\pi - x) = -f(\pi - x)dx$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

Exemple

Calcul de la primitive $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{2-\cos^2 x}$ On note $\omega(x) = \dfrac{\cos x dx}{2-\cos^2 x}$.

Comme $\omega(\pi - x) = \dfrac{\cos(n-x)d(\pi-x)}{2-\cos^2(\pi-x)} = \dfrac{(-\cos x)(-dx)}{2-\cos^2 x} = \omega(x)$ alors le changement de variable qui convient est $u = \sin x$ pour lequel $du = \cos x dx$. Ainsi :

$$\int \frac{\cos x dx}{2-\cos^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{2-\left(1-\sin^2 x\right)} = \int \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u] = \arctan(\sin x) + c.$$

Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. Les formules de la « tangente de l'arc moitié " permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de tan $\frac{x}{2}$.

$$\left|\begin{array}{c} \text{Avec} \quad t = \tan\dfrac{x}{2} \quad \text{on a} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \quad \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\ \text{et} \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}. \end{array}\right|$$

Exemple

Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}$.

Le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$ définit une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ vers $[-1, 0]$ (pour $x = -\dfrac{\pi}{2}, t = -1$ et pour $x = 0,\ t = 0$). De plus on a $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

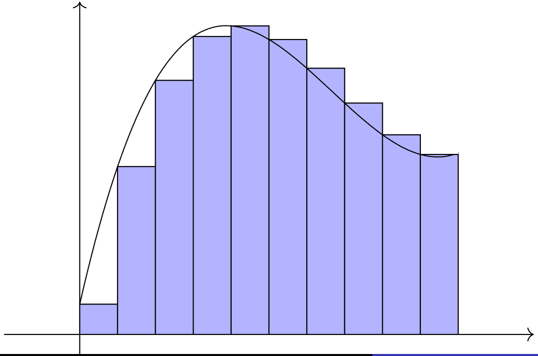
$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} &= \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2-2t} \\ &= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1\end{aligned}$$

Recherche de primitives

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle somme de Riemann d'ordre n associée à f la somme :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\underbrace{a + k\frac{b-a}{n}}_{=a_k})$$



Démonstration.

On fait la preuve dans le cas où f est lipschitzienne (ce qui est en particulier le cas si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur$[a,b]$). Notons K la constante de lipschitz associée à f sur $[a,b]$. $\left|\int_a^b f(x)dx - R_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)\right|$ $= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f(a_k)\,dx\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) - f(a_k)\,dx\right|$ par inégalité triangulaire $\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - f(a_k)|\,dx \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} K|x-a_k|\,dx$ car f est lipschitzienne $\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} K(a_{k+1}-a_k)\,dx$ car f est lipschitzienne $\leqslant K\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2 = K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{n^2} = K\frac{(b-a)^2}{n}$ Comme enfin lim $K\frac{(b-a)^2}{n} = 0$, on obtient par théorème d'encadrement lim $R_n = \int_a^b f(x)dx.$ □

Remarque :

- On reconnait la méthode des rectangles. En particulier, ce résultat signifie qu'une somme de Riemann constitue une bonne approximation de l'intégrale pourvu que le pas soit petit.
- On a le même résultat avec $R'_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$.

Remarque. Méthode des trapèzes. La vitesse de convergence de la somme de Riemann vers l'intégrale est en $\frac{1}{n}$. On peut améliorer la précision en utilisant la méthode des trapèzes.

On approche alors $\int_{[a,b]} f$ par

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$$

On obtient alors une approximation en $\frac{1}{n^2}$: Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, on peut montrer que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_n(f) \right| \leqslant M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

où $M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.