L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel ev $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array} \right.$ *telles que :*

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel ev $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}\right.$ *telles que :*

- $(E, \star)$ *est un groupe abélien.*

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel ev $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}\right.$ *telles que :*

- $(E, \star)$ *est un groupe abélien.*
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, *on a* $(\lambda+\mu).x = \lambda.x \star \mu.x$

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel ev $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}\right.$ *telles que :*

- $(E, \star)$ *est un groupe abélien.*
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, *on a* $(\lambda+\mu).x = \lambda.x \star \mu.x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$, *on a* $\lambda.(x \star y) = \lambda.x \star \lambda.y$

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel ev $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}\right.$ *telles que :*

- $(E, \star)$ *est un groupe abélien.*
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, *on a* $(\lambda+\mu).x = \lambda.x \star \mu.x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, *on a* $\lambda.(x \star y) = \lambda.x \star \lambda.y$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, *on a* $\lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$.

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel ev $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array} \right.$ *telles que :*

- $(E, \star)$ *est un groupe abélien.*
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, *on a* $(\lambda + \mu).x = \lambda.x \star \mu.x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, *on a* $\lambda.(x \star y) = \lambda.x \star \lambda.y$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, *on a* $\lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$.
- $\forall x \in E$, *on a* $1.x = x$

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel ev $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}\right.$ *telles que :*

- $(E,\star)$ *est un groupe abélien.*
- $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\forall x\in E$, *on a* $(\lambda+\mu).x=\lambda.x\star\mu.x$
- $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall x,y\in E$, *on a* $\lambda.(x\star y)=\lambda.x\star\lambda.y$
- $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\forall x\in E$, *on a* $\lambda.(\mu.x)=(\lambda\times\mu).x$.
- $\forall x\in E$, *on a* $1.x=x$

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel ev $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}\right.$ *telles que :*

- $(E, \star)$ *est un groupe abélien.*
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, *on a* $(\lambda+\mu).x = \lambda.x \star \mu.x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, *on a* $\lambda.(x \star y) = \lambda.x \star \lambda.y$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, *on a* $\lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$.
- $\forall x \in E$, *on a* $1.x = x$

*Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.*

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel ev $\mathbb{K}$) tout ensemble non vide E muni d'une loi de composition interne notée $\star$ et d'une loi de composition externe notée . : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}\right.$ *telles que :*

- $(E, \star)$ *est un groupe abélien.*
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, *on a* $(\lambda+\mu).x = \lambda.x \star \mu.x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, *on a* $\lambda.(x\star y) = \lambda.x \star \lambda.y$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, *on a* $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\times\mu).x$.
- $\forall x \in E$, *on a* $1.x = x$

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés ***vecteurs*** *et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés* ***scalaires****.*

Lorsqu'il n'y a pas de confusion, on dira espace vectoriel au lieu de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple

- *L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.*

Exemple

- *L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.*
- $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Exemple

- *L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.*
- $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
- *Sur* $\mathbb{R}^2$*, on définit les deux lois suivantes : pour* $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } \lambda \otimes (x, y) = (\lambda \times x, \lambda \times y)$$

alors $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Exemple

- *L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.*
- $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
- *Sur* $\mathbb{R}^2$*, on définit les deux lois suivantes : pour* $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } \lambda \otimes (x, y) = (\lambda \times x, \lambda \times y)$$

  alors $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
- *Plus généralement :*
  Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *sont* n *espaces vectoriels, alors l'espace produit* $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *est un espace vectoriel pour les lois suivantes :*
  Pour tous $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*, on définit*
  $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
  $\lambda \otimes (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2, \ldots, \lambda \times x_n)$.

Exemple

- *L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.*
- $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
- *Sur* $\mathbb{R}^2$*, on définit les deux lois suivantes : pour* $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } \lambda \otimes (x, y) = (\lambda \times x, \lambda \times y)$$

  alors $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*
- *Plus généralement :*
  Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *sont* n *espaces vectoriels, alors l'espace produit* $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *est un espace vectoriel pour les lois suivantes :*
  Pour tous $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*, on définit*
  $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
  $\lambda \otimes (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2, \ldots, \lambda \times x_n)$.
- *L'ensemble* $(\mathbb{K}_n[X], +, \times)$ *des polynômes de degré inférieur ou égal à* n *additionné du polynôme nul est un espace vectoriel.*

Proposition

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ *et pour tout* $x \in E$*, on a :*

$$\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$$

Dans toute la suite l'ensemble $(E, \star, .)$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Dans toute la suite l'ensemble $(E, \star, .)$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soit F un sous-ensemble de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F possède les propriétés suivantes :*

Dans toute la suite l'ensemble $(E, \star, .)$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soit F un sous-ensemble de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F possède les propriétés suivantes :*

- $0_E \in F$.

Dans toute la suite l'ensemble $(E, \star, .)$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soit F un sous-ensemble de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F possède les propriétés suivantes :*

- $0_E \in F$.
- $\forall x, y \in F$, $x \star y \in F$.
  Autrement dit F est stable pour l'addition.

Dans toute la suite l'ensemble $(E, \star, .)$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soit F un sous-ensemble de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F possède les propriétés suivantes :*

- $0_E \in F$.
- $\forall x, y \in F,\ x \star y \in F$.
  Autrement dit F est stable pour l'addition.
- $\forall x \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F$.
  Autrement dit, F est stable pour la multiplication par un scalaire.

Dans toute la suite l'ensemble $(E, \star, .)$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soit F un sous-ensemble de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F possède les propriétés suivantes :*

- $0_E \in F$.
- $\forall x, y \in F,\ x \star y \in F$.
  Autrement dit F est stable pour l'addition.
- $\forall x \in F$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F$.
  Autrement dit, F est stable pour la multiplication par un scalaire.

Dans toute la suite l'ensemble $(E, \star, .)$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition

Soit F un sous-ensemble de E.
*On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F possède les propriétés suivantes :*

- $0_E \in F$.
- $\forall x, y \in F$, $x \star y \in F$.
  Autrement dit F est stable pour l'addition.
- $\forall x \in F$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F$.
  Autrement dit, F est stable pour la multiplication par un scalaire.

Remarque

Tout sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel pour les lois induites par E.

Exemple

- *Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriel de E.*

Exemple

- *Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriel de E.*
- *Si $E = \mathbb{R}^2$*

Exemple

- *Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriel de E.*
- *Si $E = \mathbb{R}^2$*
    - *$F = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemple

- *Si* E *est un espace vectoriel, alors* $\{0_E\}$ *et* E *sont des sous-espaces vectoriel de* E.
- *Si* $E = \mathbb{R}^2$
  - $F = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.
  - *Si* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, *alors* $F\{(\lambda x_0, \lambda y_0), \lambda \in \mathbb{R}\}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Exemple

- *Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriel de E.*
- *Si $E = \mathbb{R}^2$*
  - $F = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
  - *Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors $F\{(\lambda x_0, \lambda y_0), \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- *L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

Exemple

Soit

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet :

Exemple

Soit

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet :
$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de vecteur nul $0 = (0, \dots, 0)$.

Exemple

Soit

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet :
$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de vecteur nul $0 = (0, \dots, 0)$.
$H \subset \mathbb{R}^n$

Exemple

Soit

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet :
$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de vecteur nul $0 = (0, \ldots, 0)$.
$H \subset \mathbb{R}^n$

- $0 = (0, \ldots, 0) \in H$ *car* $0 + \cdots + 0 = 0$.

Exemple

Soit

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet :
$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de vecteur nul $0 = (0, \dots, 0)$.
$H \subset \mathbb{R}^n$

- $0 = (0, \dots, 0) \in H$ *car* $0 + \cdots + 0 = 0$.
- *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in H$.*
  On a $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$.

Exemple

Soit

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet :
$\mathbb{R}^n$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de vecteur nul* $0 = (0, \ldots, 0)$.
$H \subset \mathbb{R}^n$

- $0 = (0, \ldots, 0) \in H$ *car* $0 + \cdots + 0 = 0$.
- *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in H$.
  On a $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$.

Exemple

Soit

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet :
$\mathbb{R}^n$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de vecteur nul* $0 = (0, \dots, 0)$.
$H \subset \mathbb{R}^n$

- $0 = (0, \dots, 0) \in H$ *car* $0 + \dots + 0 = 0$.
- *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in H$.
  On a $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$. *Or*
  $(\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \dots + x_n) + \mu(y_1 + \dots + y_n) = 0$
  car $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n = 0$ *puisque* $x, y \in H$

Exemple

Soit

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

H *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.

En effet :
$\mathbb{R}^n$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de vecteur nul* $0 = (0, \dots, 0)$.
$H \subset \mathbb{R}^n$

- $0 = (0, \dots, 0) \in H$ *car* $0 + \dots + 0 = 0$.
- *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in H$.
  On a $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$. *Or* $(\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \dots + x_n) + \mu(y_1 + \dots + y_n) = 0$ *car* $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n = 0$ *puisque* $x, y \in H$ *donc* $\lambda x + \mu y \in H$.

Corollaire

Soit $(E, \star, .)$ un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E ($F \subset E$).

Corollaire

Soit $(E, \star, .)$ *un espace vectoriel et* F *un sous-ensemble de* E *(*$F \subset E$*).*
Si F *vérifie les propriétés suivantes alors* F *est un sous-espace vectoriel de* E *:*

Corollaire

Soit $(E, \star, .)$ *un espace vectoriel et* F *un sous-ensemble de* E $(F \subset E)$*.*
Si F *vérifie les propriétés suivantes alors* F *est un sous-espace vectoriel de* E *:*

- F *est non vide (*F *contient l'élément neutre de* E*).*

Corollaire

Soit $(E, \star, .)$ un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E ($F \subset E$). Si F vérifie les propriétés suivantes alors F est un sous-espace vectoriel de E :

- *F est non vide (F contient l'élément neutre de E).*
- $\forall (x, y) \in F \times F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, *alors* $\lambda.x \star y \in F$.

Exemple

Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ *:*

Exemple

Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

Exemple

Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

Exemple

Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ *:*

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *car ne contient par le vecteur nul.*
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

Exemple

Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ *:*

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *car ne contient par le vecteur nul.*
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$

Exemple

Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ *:*

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *car ne contient par le vecteur nul.*
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ *car non stable par addition.*
  En effet $(1, 0) + (0, 1) \notin F$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Z}\}$

Exemple

Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ *:*

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *car ne contient par le vecteur nul.*
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ *car non stable par addition.*
  En effet $(1, 0) + (0, 1) \notin F$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Z}\}$

Exemple

Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ *:*

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *car ne contient par le vecteur nul.*
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ *car non stable par addition.*
  En effet $(1, 0) + (0, 1) \notin F$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Z}\}$ *car non stable par produit extérieur.*

Exemple

Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ *:*

- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *car ne contient par le vecteur nul.*
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ *car non stable par addition.*
  En effet $(1, 0) + (0, 1) \notin F$
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \in \mathbb{Z}\}$ *car non stable par produit extérieur.*
  En effet $(0.1, 0.9) \in G$ *mais* $0.5(0.1, 0.9) = (0.05, 0.45) \notin G$

Proposition

Soient $(E, \star, .)$ un espace vectoriel et $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E, alors l'intersection $F = \bigcap_{k=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition

Soient $(E, \star, .)$ *un espace vectoriel et* $E_1, \ldots, E_n$ *des sous-espaces vectoriels de* E*, alors l'intersection* $F = \bigcap_{k=1}^{n} E_i$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Démonstration.

Pour tout i, on a $0 \in E_i$, donc $0 \in F$.

Proposition

Soient $(E, \star, .)$ un espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E, alors l'intersection $F = \bigcap_{k=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Pour tout i, on a $0 \in E_i$, donc $0 \in F$.
Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Proposition

Soient $(E, \star, .)$ un espace vectoriel et $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E, alors l'intersection $F = \bigcap_{k=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Pour tout i, on a $0 \in E_i$, donc $0 \in F$.
Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
alors $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda.x \star \mu.y \in E_i$

Proposition

Soient $(E, \star, .)$ un espace vectoriel et $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E, alors l'intersection $F = \bigcap_{k=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Pour tout i, on a $0 \in E_i$, donc $0 \in F$.
Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
alors $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda.x \star \mu.y \in E_i$ donc $\lambda.x \star \mu.y$ est dans l'intersection de tout les E_i. □

Remarque

Remarque
La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

Remarque

La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

En effet, si $(E, \star, .) = (\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$, les sous-ensembles :

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

et

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

Remarque

La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.

En effet, si $(E, \star, .) = (\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$, les sous-ensembles :

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

et

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

mais $E_1 \cup E_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Remarque

La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.
En effet, si $(E, \star, .) = (\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$, les sous-ensembles :

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

et

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$
mais $E_1 \cup E_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
En effet $(1, -1) \in E_1$ et $(1, 1) \in E_2$ mais $(1, -1) \oplus (1, 1) = (2, 0)$ n'appartient ni à E_1 ni à E_2.

Définition

Soit $\mathscr{F} = (a_1, \dots, a_n)$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* $(E, \star, .)$

Définition

Soit $\mathscr{F} = (a_1, \ldots, a_n)$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* $(E, \star, .)$
*On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille* $\mathscr{F}$ *tout vecteurs* x *de* E *pouvant s'écrire*

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \text{ avec } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Définition

Soit $\mathscr{F} = (a_1, \ldots, a_n)$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* $(E, \star, .)$
On appelle ***combinaison linéaire*** *des vecteurs de la famille* $\mathscr{F}$ *tout vecteurs* x *de* E *pouvant s'écrire*

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \text{ avec } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Remarque

Définition

Soit $\mathscr{F} = (a_1, \ldots, a_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$
*On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ tout vecteurs x de E pouvant s'écrire*

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \text{ avec } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Remarque

On peut généraliser cette notion à une famille infinie de vecteurs, mais dans ce cas il faut que la suite des scalaires soit à support fini (il y a un nombre fini de scalaires non nul).

Définition

Soit A un sous-ensemble non-vide de l'espace vectoriel $(E, \star, .)$.

Définition

Soit A un sous-ensemble non-vide de l'espace vectoriel $(E, \star, .)$.
On note $\mathrm{vect}(A)$*, l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.*

Définition

Soit A un sous-ensemble non-vide de l'espace vectoriel $(E, \star, .)$.
On note vect(A)*, l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.*
On a donc

$$\mathrm{vect}(A) = \left\{ \sum_{a \in A} \lambda_a . a \mid (\lambda_a) \textit{ est une famille de scalaires à support fini} \right\}.$$

Définition

Soit A un sous-ensemble non-vide de l'espace vectoriel $(E, \star, .)$.
On note vect(A), *l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.*
On a donc

$$\mathrm{vect}(A) = \left\{ \sum_{a \in A} \lambda_a . a \mid (\lambda_a) \textit{ est une famille de scalaires à support fini} \right\}.$$

Donc un élément x de E appartient à vect(A), si et seulement si, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tels que :

$$x = \lambda_1 . x_1 \star \cdots \star \lambda_n . x_n$$

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$*. Montrons que* $\text{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$*.*

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
    - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathrm{vect}(A)$.
      Ainsi $\mathbb{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$.

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$*. Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$*.*
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$*, on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathrm{vect}(A)$*.*
    Ainsi $\mathbb{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$*.*

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\text{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
  - *Comme* $\text{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \text{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \text{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u \subset \text{vect}\{u\}$.
  - *Soit* $x \in \text{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\text{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathrm{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$.
  - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\mathrm{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
    - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathrm{vect}(A)$.
      Ainsi $\mathbb{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$.
    - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\mathrm{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

Donc $\mathbb{K}u = \mathrm{vect}\{u\}$

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\text{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
  - *Comme* $\text{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \text{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \text{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u \subset \text{vect}\{u\}$.
  - *Soit* $x \in \text{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\text{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

  Donc $\mathbb{K}u = \text{vect}\{u\}$

- *Soit* $A = \{u, v\}$.
  Montrons que $\text{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
    - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathrm{vect}(A)$.
      Ainsi $\mathbb{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$.
    - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\mathrm{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

  Donc $\mathbb{K}u = \mathrm{vect}\{u\}$

- *Soit* $A = \{u, v\}$.
  Montrons que $\mathrm{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.
    - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$ *et* $v \in \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in \mathrm{vect}(A)$.

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathrm{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$.
  - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\mathrm{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

  Donc $\mathbb{K}u = \mathrm{vect}\{u\}$

- *Soit* $A = \{u, v\}$.
  Montrons que $\mathrm{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$ *et* $v \in \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in \mathrm{vect}(A)$.

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathrm{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$.
  - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\mathrm{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

  Donc $\mathbb{K}u = \mathrm{vect}\{u\}$

- *Soit* $A = \{u, v\}$.
  Montrons que $\mathrm{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$ *et* $v \in \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in \mathrm{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u + \mathbb{K}v \subset \mathrm{vect}\{u, v\}$.
  - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u, v)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u, v\}$

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\text{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
    - *Comme* $\text{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \text{vect}(A)$*, on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \text{vect}(A)$.
      Ainsi $\mathbb{K}u \subset \text{vect}\{u\}$.
    - *Soit* $x \in \text{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\text{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

  Donc $\mathbb{K}u = \text{vect}\{u\}$

- *Soit* $A = \{u, v\}$.
  Montrons que $\text{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.
    - *Comme* $\text{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \text{vect}(A)$ *et* $v \in \text{vect}(A)$*, on a* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in \text{vect}(A)$.
      Ainsi $\mathbb{K}u + \mathbb{K}v \subset \text{vect}\{u, v\}$.
    - *Soit* $x \in \text{vect}(u, v)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u, v\}$

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathrm{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$.
  - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\mathrm{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

  Donc $\mathbb{K}u = \mathrm{vect}\{u\}$

- *Soit* $A = \{u, v\}$.
  Montrons que $\mathrm{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$ *et* $v \in \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in \mathrm{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u + \mathbb{K}v \subset \mathrm{vect}\{u, v\}$.
  - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u, v)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u, v\}$ *donc* $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, x = \lambda u + \mu v$

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \mathrm{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$.
  - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\mathrm{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

  Donc $\mathbb{K}u = \mathrm{vect}\{u\}$

- *Soit* $A = \{u, v\}$.
  Montrons que $\mathrm{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.
  - *Comme* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$ *et* $v \in \mathrm{vect}(A)$, *on a* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in \mathrm{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u + \mathbb{K}v \subset \mathrm{vect}\{u, v\}$.
  - *Soit* $x \in \mathrm{vect}(u, v)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u, v\}$ *donc* $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, x = \lambda u + \mu v$ *donc* $\mathrm{vect}\{u, v\} \subset \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$

Exemple

- *Soit* $A = \{u\}$. *Montrons que* $\text{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$.
  - *Comme* $\text{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \text{vect}(A)$, *on a* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in \text{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u \subset \text{vect}\{u\}$.
  - *Soit* $x \in \text{vect}(u)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u\}$ *donc* $x = \lambda u$ *donc* $\text{vect}\{u\}u \subset \mathbb{K}u$

  Donc $\mathbb{K}u = \text{vect}\{u\}$

- *Soit* $A = \{u, v\}$.
  Montrons que $\text{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$.
  - *Comme* $\text{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel et* $u \in A \subset \text{vect}(A)$ *et* $v \in \text{vect}(A)$, *on a* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in \text{vect}(A)$.
    Ainsi $\mathbb{K}u + \mathbb{K}v \subset \text{vect}\{u, v\}$.
  - *Soit* $x \in \text{vect}(u, v)$ *alors* x *est combinaison linéaire d'éléments de* $\{u, v\}$ *donc* $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, x = \lambda u + \mu v$ *donc* $\text{vect}\{u, v\} \subset \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$

  Donc
  $$\text{vect}\{u, v\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$*, considérons* $u = (1, 1, 1), v = (0, -1, 2)$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, *considérons* $u = (1,1,1), v = (0,-1,2)$.
On a

$$\text{vect}(u,v) \quad =$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, *considérons* $u = (1, 1, 1), v = (0, -1, 2)$.
On a

$$\mathrm{vect}(u, v) \quad = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, *considérons* $u = (1,1,1), v = (0,-1,2)$.
On a

$$\begin{aligned} \text{vect}(u,v) &= \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(\lambda(1,1,1) + \mu(0,-1,2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, *considérons* $u = (1, 1, 1), v = (0, -1, 2)$.
On a

$$\begin{aligned} \text{vect}(u, v) &= \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(\lambda(1, 1, 1) + \mu(0, -1, 2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(\lambda, \lambda, \lambda) + (0, -\mu, 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, *considérons* $u = (1, 1, 1), v = (0, -1, 2)$.
On a

$$\begin{aligned} \mathrm{vect}(u, v) &= \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(\lambda(1, 1, 1) + \mu(0, -1, 2) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(\lambda, \lambda, \lambda) + (0, -\mu, 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(\lambda, \lambda + \mu, 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Théorème

Soit A une partie d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$.

$\text{vect}(A)$ *est l'unique sous-espace vectoriel de E vérifiant :*

- $A \subset \text{vect}(A)$,

Théorème

Soit A une partie d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$.

$\mathrm{vect}(A)$ *est l'unique sous-espace vectoriel de E vérifiant :*

- $A \subset \mathrm{vect}(A)$,
- $\mathrm{vect}(A)$ *est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A.*

Théorème

Soit A une partie d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$.

$\mathrm{vect}(A)$ *est l'unique sous-espace vectoriel de E vérifiant :*

- $A \subset \mathrm{vect}(A)$,
- $\mathrm{vect}(A)$ *est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A.*

Théorème

Soit A une partie d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$.

$\mathrm{vect}(A)$ *est l'unique sous-espace vectoriel de E vérifiant :*

- $A \subset \mathrm{vect}(A)$,
- $\mathrm{vect}(A)$ *est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A.*

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(A)$ *se comprend donc comme étant* ***le plus petit sous-espace vectoriel contenant*** A,

Théorème

Soit A une partie d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$.

$\mathrm{vect}(A)$ *est l'unique sous-espace vectoriel de E vérifiant :*

- $A \subset \mathrm{vect}(A)$,
- $\mathrm{vect}(A)$ *est inclus dans tout sous-espace vectoriel contenant A.*

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(A)$ se comprend donc comme étant ***le plus petit sous-espace vectoriel contenant*** *A, on l'appelle espace vectoriel* ***engendré*** *par A.*

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *contenant* A.

Corollaire

$\mathrm{vect}(A)$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *contenant* A.

Corollaire

A *est un sous-espace vectoriel, si et seulement si,* $\mathrm{vect}\,(A) = A$.

Corollaire

$\text{vect}(A)$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *contenant* A.

Corollaire

A *est un sous-espace vectoriel, si et seulement si,* $\text{vect}\,(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

Corollaire

$\mathrm{vect}(A)$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *contenant* A.

Corollaire

A *est un sous-espace vectoriel, si et seulement si,* $\mathrm{vect}\,(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \mathrm{vect}(A)$

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

Corollaire

A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $\text{vect}\,(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \text{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

Corollaire

A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $\text{vect}\,(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \text{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un espace vectoriel.

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

Corollaire

A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $\mathrm{vect}\,(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \mathrm{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un espace vectoriel. Alors tout élément x de A est combinaison linéaire d'un élément de A car

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

Corollaire

A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $\text{vect}\,(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \text{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un espace vectoriel. Alors tout élément x de A est combinaison linéaire d'un élément de A car $x = 1.x$ donc $A \subset \text{vect}(A)$.

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

Corollaire

A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $\text{vect}\,(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \text{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un espace vectoriel. Alors tout élément x de A est combinaison linéaire d'un élément de A car $x = 1.x$ donc $A \subset \text{vect}(A)$.

Soit $x \in \text{vect}(A)$

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

Corollaire

A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $\text{vect}(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \text{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un espace vectoriel. Alors tout élément x de A est combinaison linéaire d'un élément de A car $x = 1.x$ donc $A \subset \text{vect}(A)$.

Soit $x \in \text{vect}(A)$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A$

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *contenant* A.

Corollaire

A *est un sous-espace vectoriel, si et seulement si,* $\text{vect}(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \text{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un espace vectoriel. Alors tout élément x de A est combinaison linéaire d'un élément de A car $x = 1.x$ donc $A \subset \text{vect}(A)$.

Soit $x \in \text{vect}(A)$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A$ or comme A est un espace vectoriel,

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de* E *contenant* A.

Corollaire

A *est un sous-espace vectoriel, si et seulement si,* $\operatorname{vect}(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \operatorname{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un espace vectoriel. Alors tout élément x de A est combinaison linéaire d'un élément de A car $x = 1.x$ donc $A \subset \operatorname{vect}(A)$.

Soit $x \in \operatorname{vect}(A)$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A$ or comme A est un espace vectoriel, $x \in A$

Corollaire

vect(A) *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

Corollaire

A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $\text{vect}\,(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \text{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un espace vectoriel. Alors tout élément x de A est combinaison linéaire d'un élément de A car $x = 1.x$ donc $A \subset \text{vect}(A)$.

Soit $x \in \text{vect}(A)$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A$ or comme A est un espace vectoriel, $x \in A$ donc $\text{vect}(A) \subset A$

Corollaire

$\mathrm{vect}(A)$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

Corollaire

A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, $\mathrm{vect}\,(A) = A$.

Démonstration.

$\Leftarrow$

La réciproque est assez claire : si $A = \mathrm{vect}(A)$ alors A est un espace vectoriel.

$\Rightarrow$

Supposons que A est un espace vectoriel. Alors tout élément x de A est combinaison linéaire d'un élément de A car $x = 1.x$ donc $A \subset \mathrm{vect}(A)$.

Soit $x \in \mathrm{vect}(A)$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in A$ or comme A est un espace vectoriel, $x \in A$ donc $\mathrm{vect}(A) \subset A$

donc

$$A = \mathrm{vect}(A)$$

$\square$

Exemple

- $\mathrm{vect}\{$*ensemble vide*$\} = \{0_E\}$ *car l'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de* E.
- $\mathrm{vect}(E) = E$ *car* $\mathrm{vect}\, E$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant* E.

Proposition

Si A et B deux parties de E alors $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$.

Proposition

Si A et B deux parties de E alors $A \subset B \Longrightarrow \text{vect}(A) \subset \text{vect}(B)$.

Démonstration.

Supposons que $A \subset B$.

Proposition

Si A et B deux parties de E alors $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$.

Démonstration.

Supposons que $A \subset B$.
Alors $A \subset \mathrm{vect}(B)$

Proposition

Si A et B deux parties de E alors $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$.

Démonstration.

Supposons que $A \subset B$.
Alors $A \subset \mathrm{vect}(B)$ or $\mathrm{vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel

Proposition

Si A et B deux parties de E alors $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$.

Démonstration.

Supposons que $A \subset B$.
Alors $A \subset \mathrm{vect}(B)$ or $\mathrm{vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel
et vect A est le plus petit espace vectoriel contenant A

Proposition

Si A et B deux parties de E alors $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$.

Démonstration.

Supposons que $A \subset B$.
Alors $A \subset \mathrm{vect}(B)$ or $\mathrm{vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel
et vect A est le plus petit espace vectoriel contenant A
donc $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$. $\square$

Proposition

Si A et B sont deux parties de E alors $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

Proposition

Si A et B sont deux parties de E alors $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

Démonstration.

$z \in \mathrm{vect}(A \cup B)$

Proposition

Si A et B sont deux parties de E alors $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

Démonstration.

$z \in \mathrm{vect}(A \cup B)$
$\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \exists(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n, \exists(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^m, \exists(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in B^m$ tels que

Proposition

Si A et B sont deux parties de E alors $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

Démonstration.

$z \in \mathrm{vect}(A \cup B)$
$\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \exists (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n, \exists (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^m, \exists (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in B^m$ tels que

$$z = \sum_i^m \lambda_i x_i + \mu_i y_i = \sum_i^m \lambda_i x_i + \sum_i^m \mu_i y_i$$

Proposition

Si A et B sont deux parties de E alors $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

Démonstration.

$z \in \mathrm{vect}(A \cup B)$
$\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \exists(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n, \exists(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^m, \exists(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in B^m$ tels que

$$z = \sum_i^m \lambda_i x_i + \mu_i y_i = \sum_i^m \lambda_i x_i + \sum_i^m \mu_i y_i$$

$\Leftrightarrow z \in \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

$\square$

Exemple

Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Exemple

Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\mathrm{vect}(F \cup G) = F + G$$

Exemple

Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\mathrm{vect}(F \cup G) = F + G$$

Ainsi $F + G$ apparaît comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E.

Définition (rappel)

Soit $\mathscr{F} = (a_1, \dots, a_n)$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* $(E, \star, .)$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E.

Définition (rappel)

Soit $\mathscr{F} = (a_1, \dots, a_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$
*On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ tout vecteurs x de E pouvant s'écrire*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E.

Définition (rappel)

Soit $\mathscr{F} = (a_1, \ldots, a_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$
*On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ tout vecteurs x de E pouvant s'écrire*

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \text{ avec } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E.

Définition (rappel)

Soit $\mathscr{F} = (a_1, \ldots, a_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, \star, .)$
*On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ tout vecteurs x de E pouvant s'écrire*

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \text{ avec } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

.

Définition (rappel)

*On appelle espace vectoriel **engendré** par la famille $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, le sous-espace vectoriel des combinaisons linéaires des éléments de $\{e_1, \ldots, e_n\}$.*
On le note $\operatorname{vect} \mathscr{F}$, $\operatorname{vect}(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *ou* $\operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_n)$.

Remarque

Il est efficace d'établir qu'une partie est un sous-espace vectoriel en observant que celle-ci est engendré par une famille de vecteurs.

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) \quad = (a, a, 0) + (b, -b, 2b)$

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) \begin{aligned}[t] &= (a, a, 0) + (b, -b, 2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2) \end{aligned}$$

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$*, considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) \begin{aligned}[t] &= (a,a,0) + (b,-b,2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2) \end{aligned}$$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$*, alors* $P = \mathrm{vect}(u,v)$,

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$*, considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) \begin{aligned}[t] &= (a,a,0) + (b,-b,2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2)\end{aligned}$$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$*, alors* $P = \mathrm{vect}(u,v)$*,*

  donc P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$*, considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) \begin{aligned}[t] &= (a,a,0) + (b,-b,2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2)\end{aligned}$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$*, alors* $P = \mathrm{vect}(u,v)$,

  donc P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
- *Dans* $\mathbb{R}^3$*, considérons* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$*, considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $\begin{aligned} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) &= (a, a, 0) + (b, -b, 2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2) \end{aligned}$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$*, alors* $P = \mathrm{vect}(u, v)$,

  donc P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
- *Dans* $\mathbb{R}^3$*, considérons* $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) \begin{aligned}[t] &= (a,a,0) + (b,-b,2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2)\end{aligned}$$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$, *alors* $P = \mathrm{vect}(u,v)$,

  donc P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$.
  On a $x+y-z=0 \Leftrightarrow z = x+y$,

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $$\begin{aligned} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) &= (a,a,0) + (b,-b,2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2) \end{aligned}$$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$, *alors* $P = \mathrm{vect}(u,v)$,

  donc P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0\}$.
  On a $x+y-z=0 \Leftrightarrow z = x+y$,
  donc
  $$P = \{(x, y, x+y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $$\begin{aligned} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) &= (a,a,0) + (b,-b,2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2) \end{aligned}$$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$, *alors* $P = \mathrm{vect}(u,v)$,

  donc P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$.
  On a $x+y-z=0 \Leftrightarrow z = x+y$,
  donc
  $$\begin{aligned} P &= \{(x,y,x+y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x,0,x) + (0,y,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $\quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) \begin{aligned}[t] &= (a,a,0) + (b,-b,2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2)\end{aligned}$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$, *alors* $P = \mathrm{vect}(u,v)$,

  donc P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$.
  On a $x+y-z=0 \Leftrightarrow z = x+y$,
  donc
  $$\begin{aligned} P &= \{(x,y,x+y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x,0,x) + (0,y,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) \begin{array}{l} = (a,a,0) + (b,-b,2b) \\ = a(1,1,0) + b(1,-1,2) \end{array}$$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$, *alors* $P = \mathrm{vect}(u,v)$,

  donc P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0\}$.
  On a $x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y$,
  donc
  $$\begin{aligned} P &= \{(x,y,x+y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x,0,x) + (0,y,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{vect}((1,0,1),(0,1,1)) \end{aligned}$$

Exemple

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

  On a $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a+b, a-b, 2b) \begin{aligned}[t] &= (a,a,0) + (b,-b,2b) \\ &= a(1,1,0) + b(1,-1,2)\end{aligned}$$

  Si on pose $u = (1,1,0)$ *et* $v = (1,-1,2)$, *alors* $P = \mathrm{vect}(u,v)$,

  donc P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

- *Dans* $\mathbb{R}^3$, *considérons* $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z = 0\}$.
  On a $x+y-z=0 \Leftrightarrow z = x+y$,
  donc
  $$\begin{aligned} P &= \{(x,y,x+y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x,0,x) + (0,y,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,1) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{vect}((1,0,1),(0,1,1)) \end{aligned}$$
  Ainsi P *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de vecteurs de* E *est* ***génératrice*** *de* E, *si tout vecteur* x *de* E *s'écrit comme* ***combinaison linéaire*** *des vecteurs de la famille* $\mathscr{F}$, *c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de vecteurs de E est ***génératrice*** *de E, si tout vecteur x de E s'écrit comme* ***combinaison linéaire*** *des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Remarque

Définition

*On dit qu'une famille $\mathscr{F} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de vecteurs de E est **génératrice** de E, si tout vecteur x de E s'écrit comme **combinaison linéaire** des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Remarque

La famille $\mathscr{F}$ est **génératrice** de E, si et seulement si, $\mathrm{vect}(\mathscr{F}) = E$.

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$*, on pose* $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$*, on pose* $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en* i*ème position.*

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$, *on pose* $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en* *ième position.*
  La famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$, *on pose* $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*
  La famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.
  En effet, $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$, *on pose* $e_i = (0, \dots, 1, 0 \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en* i*ème position.*
  La famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.
  En effet, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *on peut écrire*
  $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$, *on pose* $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en* i*ème position.*
  La famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$*.*
  En effet, $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, on peut écrire*
  $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
- *Dans* $E = \mathbb{R}$*, la famille* $\{1\}$ *est génératrice.*

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$, *on pose* $e_i = (0, \dots, 1, 0 \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*
  La famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.
  En effet, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *on peut écrire*
  $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
- *Dans* $E = \mathbb{R}$, *la famille* $\{1\}$ *est génératrice.*

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$, *on pose* $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*
  La famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.
  En effet, $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *on peut écrire*
  $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
- *Dans* $E = \mathbb{R}$, *la famille* $\{1\}$ *est génératrice.*
  En effet, $x \in \mathbb{R}$, $x = x.1$.

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$, *on pose* $e_i = (0, \dots, 1, 0 \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en* i*ème position.*
  La famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.
  En effet, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *on peut écrire*
  $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
- *Dans* $E = \mathbb{R}$, *la famille* $\{1\}$ *est génératrice.*
  En effet, $x \in \mathbb{R}$, $x = x.1$.
- *Dans* $E = \mathbb{C}$ *vu comme* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, la famille* $\mathscr{F} = (1, i)$ *est génératrice.*

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$, *on pose* $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en* i*ème position.*
  La famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.
  En effet, $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *on peut écrire*
  $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
- *Dans* $E = \mathbb{R}$, *la famille* $\{1\}$ *est génératrice.*
  En effet, $x \in \mathbb{R}$, $x = x.1$.
- *Dans* $E = \mathbb{C}$ *vu comme* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, la famille* $\mathscr{F} = (1, i)$ *est génératrice.*

Exemple

- *Dans* $E = \mathbb{R}^n$, *on pose* $e_i = (0, \dots, 1, 0 \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *où* 1 *se situe en* i*ème position.*
  La famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.
  En effet, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *on peut écrire*
  $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
- *Dans* $E = \mathbb{R}$, *la famille* $\{1\}$ *est génératrice.*
  En effet, $x \in \mathbb{R}$, $x = x.1$.
- *Dans* $E = \mathbb{C}$ *vu comme* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, la famille* $\mathscr{F} = (1, i)$ *est génératrice.*
  En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, *on peut écrire* $z = a.1 + b.i$, *avec*
  $a = Re(z)$ *et* $b = Im(z)$.

Proposition

Si $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ *est une famille génératrice et si* $e_{n+1} \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *alors la sous-famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est génératrice.*

Proposition

Si $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ *est une famille génératrice et si* $e_{n+1} \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n)$ *alors la sous-famille* $(e_1, \dots, e_n)$ *est génératrice.*

Démonstration.

Soit $x \in E$, comme $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ est génératrice, on a $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i$ avec $\forall i \in [\![1, n+1]\!], \lambda_i \in \mathbb{K}$.

Si $e_{n+1} \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors $e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ avec $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i \in \mathbb{K}$.

Donc $x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_{n+1}\mu_i) e_i$

donc $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice.

$\square$

Définition

- *On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E est* ***libre*** *si elle vérifie*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Définition

- *On dit que la famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de vecteurs de* E *est* ***libre*** *si elle vérifie*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Définition

- *On dit que la famille* $(e_1, \dots, e_n)$ *de vecteurs de* E *est* ***libre*** *si elle vérifie*

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

On dit que les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ *sont* ***linéairement indépendants****.*

Définition

- *On dit que la famille* $(e_1, \dots, e_n)$ *de vecteurs de* E *est* ***libre*** *si elle vérifie*

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

  On dit que les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ *sont* ***linéairement indépendants****.*

- *On dit que la famille* $(e_1, \dots, e_n)$ *est* ***liée*** *si elle n'est pas libre ce qui signifie*

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n = 0 \ et \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$$

Définition

- *On dit que la famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de vecteurs de* E *est* ***libre*** *si elle vérifie*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

On dit que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ *sont* ***linéairement indépendants****.*

- *On dit que la famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est* ***liée*** *si elle n'est pas libre ce qui signifie*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0 \textit{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

Définition

- *On dit que la famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de vecteurs de* E *est* ***libre*** *si elle vérifie*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

On dit que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ *sont* ***linéairement indépendants****.*

- *On dit que la famille* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est* ***liée*** *si elle n'est pas libre ce qui signifie*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0 \text{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

Une égalité $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ *avec* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *non tous nuls est appelée* ***relation linéaire*** *sur les vecteurs* $e_1, \ldots, e_n$*.*

Exemple

Soit $u(1,0), v(0,1)$ *et* $w(1,1) \in \mathbb{R}^2$*, étudions la liberté de la famille* (u, v, w).

Exemple

Soit $u(1,0), v(0,1)$ *et* $w(1,1) \in \mathbb{R}^2$, *étudions la liberté de la famille* (u, v, w).
On remarque que $w = u + v$.
Donc

Exemple

Soit $u(1,0), v(0,1)$ *et* $w(1,1) \in \mathbb{R}^2$*, étudions la liberté de la famille* (u, v, w).
On remarque que $w = u + v$.
Donc
$1.u + 1.v - 1.w = 0$

Exemple

Soit $u(1,0), v(0,1)$ *et* $w(1,1) \in \mathbb{R}^2$, *étudions la liberté de la famille* (u, v, w).
On remarque que $w = u + v$.
Donc
$1.u + 1.v - 1.w = 0$ *donc* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ *la famille est donc liée.*

Exemple

Soit $u(1,0), v(0,1)$ *et* $w(1,1) \in \mathbb{R}^2$*, étudions la liberté de la famille* (u, v, w).
On remarque que $w = u + v$.
Donc
$1.u + 1.v - 1.w = 0$ *donc* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ *la famille est donc liée.*

Proposition

Soient $n \geqslant 2$ *et* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une famille de vecteurs de* E.
On a une équivalence entre :

- $(e_1, \ldots, e_n)$ *est liée.*
- *L'un des vecteurs* $e_1, \ldots, e_n$ *est combinaison linéaire des autres.*

Démonstration.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.

Démonstration.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.

Démonstration.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0$.

Démonstration.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n = 0$.
  Soit k tel que $\lambda_k \neq 0$.

Démonstration.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0$.
  Soit k tel que $\lambda_k \neq 0$.
  On a

$$-\lambda_k e_k = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n$$

Démonstration.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0$.
  Soit k tel que $\lambda_k \neq 0$.
  On a

$$-\lambda_k e_k = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n$$

alors $e_k = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_k} e_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} e_{k-1} + \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} e_{k+1} + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_k} e_n$

Démonstration.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n = 0$.
  Soit k tel que $\lambda_k \neq 0$.
  On a

$$-\lambda_k e_k = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$$

alors $e_k = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_k} e_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} e_{k-1} + \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} e_{k+1} + \dots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_k} e_n$
donc e_k est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Démonstration.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0$.
  Soit k tel que $\lambda_k \neq 0$.
  On a

$$-\lambda_k e_k = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n$$

  alors $e_k = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_k} e_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} e_{k-1} + \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} e_{k+1} + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_k} e_n$
  donc e_k est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Supposons qu'un vecteur soit une combinaison linéaires des autres vecteurs.

Démonstration.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n = 0$.
  Soit k tel que $\lambda_k \neq 0$.
  On a

  $$-\lambda_k e_k = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$$

  alors $e_k = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_k} e_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} e_{k-1} + \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} e_{k+1} + \dots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_k} e_n$
  donc e_k est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Supposons qu'un vecteur soit une combinaison linéaires des autres vecteurs.

Démonstration.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n = 0$.
  Soit k tel que $\lambda_k \neq 0$.
  On a

$$-\lambda_k e_k = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$$

  alors $e_k = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_k} e_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} e_{k-1} + \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} e_{k+1} + \dots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_k} e_n$
  donc e_k est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Supposons qu'un vecteur soit une combinaison linéaires des autres vecteurs. Alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$, tel que

$$e_k = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$$

Démonstration.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n = 0$.
  Soit k tel que $\lambda_k \neq 0$.
  On a

$$-\lambda_k e_k = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$$

  alors $e_k = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_k} e_1 + \dots + \dfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} e_{k-1} + \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} e_{k+1} + \dots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_k} e_n$
  donc e_k est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Supposons qu'un vecteur soit une combinaison linéaires des autres vecteurs. Alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$, tel que

$$e_k = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n$$

  Il vient $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + (-1) e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n = 0$

Démonstration.

- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est liée.
  Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n = 0$.
  Soit k tel que $\lambda_k \neq 0$.
  On a

$$-\lambda_k e_k = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n$$

  alors $e_k = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_k} e_1 + \cdots + \dfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} e_{k-1} + \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} e_{k+1} + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{\lambda_k} e_n$
  donc e_k est une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Supposons qu'un vecteur soit une combinaison linéaires des autres vecteurs. Alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$, tel que

$$e_k = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n$$

  Il vient $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e_{k-1} + (-1) e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n = 0$
  En remarquant que $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, -1, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, on peut conclure que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est liée.

Exemple

Soit $u \in E$, *étudions la liberté de la famille* (u).

- *Si* $u \neq 0$ *alors* $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

Exemple

Soit $u \in E$*, étudions la liberté de la famille* (u).

- *Si* $u \neq 0$ *alors* $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

Exemple

Soit $u \in E$*, étudions la liberté de la famille* (u)*.*

- *Si* $u \neq 0$ *alors* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = 0$*.*
  Par suite, la famille (u) *est libre.*
- *Si* $u = 0_E$ *alors on peut écrire* $\lambda u = 0$ *avec* $\lambda = 1 \neq 0$*.*
  Par suite, la famillle (0_E) *est liée.*

Définition (Cas particulier de deux vecteurs liés)

- *Un vecteur u est dit* ***colinéaire*** *à un autre vecteur v de E s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha v$.*

Définition (Cas particulier de deux vecteurs liés)

- *Un vecteur u est dit* ***colinéaire*** *à un autre vecteur v de E s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha v$.*
- *Deux vecteurs u et v sont dits* ***colinéaires*** *si l'un des deux est colinéaire à l'autre.*

Définition (Cas particulier de deux vecteurs liés)

- *Un vecteur u est dit **colinéaire** à un autre vecteur v de E s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha v$.*
- *Deux vecteurs u et v sont dits **colinéaires** si l'un des deux est colinéaire à l'autre.*

Définition (Cas particulier de deux vecteurs liés)

- *Un vecteur u est dit* ***colinéaire*** *à un autre vecteur v de E s'il existe* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tel que* $u = \alpha v$.
- *Deux vecteurs u et v sont dits* ***colinéaires*** *si l'un des deux est colinéaire à l'autre.*

Attention

Définition (Cas particulier de deux vecteurs liés)

- *Un vecteur u est dit **colinéaire** à un autre vecteur v de E s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha v$.*
- *Deux vecteurs u et v sont dits **colinéaires** si l'un des deux est colinéaire à l'autre.*

Attention

u est colinéaire à v n'équivaut pas à v est colinéaire à u.

Définition (Cas particulier de deux vecteurs liés)

- *Un vecteur u est dit* ***colinéaire*** *à un autre vecteur v de E s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u = \alpha v$.*
- *Deux vecteurs u et v sont dits* ***colinéaires*** *si l'un des deux est colinéaire à l'autre.*

Attention

u est colinéaire à v n'équivaut pas à v est colinéaire à u.
En effet, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur mais tout vecteur n'est pas colinéaire au vecteur nul.
En effet $\forall u \in E, 0 = 0u$ donc 0 est colinéaire à u.
Mais $\forall u \in E, u \neq 0$ on a $u \neq \alpha 0$ donc u n'est pas colinéaire à 0.

Exemple

Soient $(u, v) \in E^2$.

$$(u, v) \textit{ est liée, }$$
$$\textit{si et seulement si, }$$
$$(\exists \alpha \in \mathbb{K}^*, u = \alpha v) \textit{ ou } (\exists \beta \in \mathbb{K}^*, v = \beta u).$$

Exemple

Soient $(u, v) \in E^2$.

$$(u, v) \text{ est liée, }$$
$$\text{si et seulement si, }$$
$$(\exists \alpha \in \mathbb{K}^*, u = \alpha v) \text{ ou } (\exists \beta \in \mathbb{K}^*, v = \beta u).$$

Ainsi, la famille (u, v) *est liée, si et seulement si,* u *et* v *sont* ***colinéaires***.

Exemple (famille libre)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, *considérons les vecteurs*

$$u = (1, 2, 1), v = (1, -1, 1), w = (1, 1, 0)$$

et la famille

$$\mathscr{F} = (u, v, w)$$

Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Exemple (famille libre)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, *considérons les vecteurs*

$$u = (1, 2, 1), v = (1, -1, 1), w = (1, 1, 0)$$

et la famille

$$\mathscr{F} = (u, v, w)$$

Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 & (2) \\ \alpha + \beta = 0 & (3) \end{array} \right.$$

Exemple (famille libre)

Dans $E = \mathbb{R}^3$*, considérons les vecteurs*

$$u = (1, 2, 1), v = (1, -1, 1), w = (1, 1, 0)$$

et la famille

$$\mathscr{F} = (u, v, w)$$

Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$*.*

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*.*

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 & (2) \\ \alpha + \beta = 0 & (3) \end{array} \right.$$

L'équation $(1) - (3)$ *implique* $\gamma = 0$*.*

Exemple (famille libre)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, *considérons les vecteurs*

$$u = (1, 2, 1), v = (1, -1, 1), w = (1, 1, 0)$$

et la famille

$$\mathscr{F} = (u, v, w)$$

Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 & (2) \\ \alpha + \beta = 0 & (3) \end{array} \right.$$

L'équation $(1) - (3)$ *implique* $\gamma = 0$.
L'équation $(2) + (3)$ *permet de conclure que* $\alpha = 0$ *donc* $\beta = 0$

Exemple (famille libre)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs

$$u = (1,2,1), v = (1,-1,1), w = (1,1,0)$$

et la famille

$$\mathscr{F} = (u,v,w)$$

Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 & (2) \\ \alpha + \beta = 0 & (3) \end{array} \right.$$

L'équation $(1) - (3)$ implique $\gamma = 0$.
L'équation $(2) + (3)$ permet de conclure que $\alpha = 0$ donc $\beta = 0$
On obtient donc $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$,

Exemple (famille libre)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs

$$u = (1,2,1), v = (1,-1,1), w = (1,1,0)$$

et la famille

$$\mathscr{F} = (u, v, w)$$

Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} \alpha + \beta + \gamma = 0 & (1) \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 & (2) \\ \alpha + \beta = 0 & (3) \end{array} \right.$$

L'équation $(1) - (3)$ implique $\gamma = 0$.
L'équation $(2) + (3)$ permet de conclure que $\alpha = 0$ donc $\beta = 0$
On obtient donc $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, la famille $\mathscr{F}$ est donc libre.

Exemple (famille liée)

Dans $E = \mathbb{R}^3$*, considérons les vecteurs*
$u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$
et la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$.
Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution

Exemple (famille liée)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs
$u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$
et la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$.
Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 \quad (1) \\ -\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \quad (2) \\ \beta & + & \gamma & & & = & 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

Exemple (famille liée)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs
$u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$
et la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$.
Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 \quad (1) \\ -\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \quad (2) \\ \beta & + & \gamma & & & = & 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

L'équation (1) permet de déduire que $\alpha = -2\beta$

Exemple (famille liée)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs
$u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$
et la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$.
Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 & (1) \\ -\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 & (2) \\ \beta & + & \gamma & & & = & 0 & (3) \end{array} \right.$$

L'équation (1) permet de déduire que $\alpha = -2\beta$ L'équation (3) permet de déduire que $\gamma = -\beta$

Exemple (famille liée)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs
$u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$
et la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$.
Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 & (1) \\ -\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 & (2) \\ \beta & + & \gamma & & & = & 0 & (3) \end{array} \right.$$

L'équation (1) permet de déduire que $\alpha = -2\beta$ L'équation (3) permet de déduire que $\gamma = -\beta$ L'équation (2) revient $2\beta - \beta - \beta = 0$ qui est toujours vraie.

Exemple (famille liée)

Dans $E = \mathbb{R}^3$*, considérons les vecteurs*
$u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$
et la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$.
Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 & (1) \\ -\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 & (2) \\ \beta & + & \gamma & & & = & 0 & (3) \end{array} \right.$$

L'équation (1) permet de déduire que $\alpha = -2\beta$ *L'équation (3) permet de déduire que* $\gamma = -\beta$ *L'équation (2) revient* $2\beta - \beta - \beta = 0$ *qui est toujours vraie. Le système est donc compatible.*

Exemple (famille liée)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs
$u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$
et la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$.
Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 & (1) \\ -\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 & (2) \\ \beta & + & \gamma & & & = & 0 & (3) \end{array} \right.$$

L'équation (1) permet de déduire que $\alpha = -2\beta$ L'équation (3) permet de déduire que $\gamma = -\beta$ L'équation (2) revient $2\beta - \beta - \beta = 0$ qui est toujours vraie. Le système est donc compatible.

On a donc $\forall \beta \in \mathbb{R}, -2\beta u + \beta v - \beta w = 0$ donc, pour $\beta = 1$,

$$-2u + v - w = 0$$

Exemple (famille liée)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs
$u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$
et la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$.
Etudions la liberté de la famille $\mathscr{F}$.

Solution
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 & (1) \\ -\alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 & (2) \\ \beta & + & \gamma & & & = & 0 & (3) \end{array} \right.$$

L'équation (1) permet de déduire que $\alpha = -2\beta$ *L'équation (3) permet de déduire que* $\gamma = -\beta$ *L'équation (2) revient* $2\beta - \beta - \beta = 0$ *qui est toujours vraie. Le système est donc compatible.*

On a donc $\forall \beta \in \mathbb{R}, -2\beta u + \beta v - \beta w = 0$ *donc, pour* $\beta = 1$,

$$-2u + v - w = 0$$

On en déduit que la famille $\mathscr{F}$ *est liée.*

Exemple

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, considérons les fonctions*

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto cos(x), \quad h : x \mapsto sin(x)$$

et montrons que la famille (f, g, h) *est libre.*
Solution

Exemple

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *considérons les fonctions*

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto cos(x), \quad h : x \mapsto sin(x)$$

et montrons que la famille (f, g, h) *est libre.*

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Exemple

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, considérons les fonctions*

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto cos(x), \quad h : x \mapsto sin(x)$$

et montrons que la famille (f, g, h) *est libre.*

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Supposons $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$.

Exemple

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *considérons les fonctions*

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto cos(x), \quad h : x \mapsto sin(x)$$

et montrons que la famille (f, g, h) *est libre.*

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Supposons $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\alpha + \beta cosx + \gamma sinx = 0$.

- *Pour* $x = 0$, *on obtient l'équation* $\alpha + \beta = 0(1)$.

Exemple

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *considérons les fonctions*

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto cos(x), \quad h : x \mapsto sin(x)$$

et montrons que la famille (f, g, h) *est libre.*

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Supposons $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\alpha + \beta cosx + \gamma sinx = 0$.

- *Pour* $x = 0$, *on obtient l'équation* $\alpha + \beta = 0(1)$.
- *Pour* $x = \dfrac{\pi}{2}$, *on obtient l'équation* $\alpha + \gamma = 0(2)$.

Exemple

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, considérons les fonctions*

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto cos(x), \quad h : x \mapsto sin(x)$$

et montrons que la famille (f, g, h) *est libre.*

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Supposons $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on a :* $\alpha + \beta cosx + \gamma sinx = 0$.

- *Pour* $x = 0$*, on obtient l'équation* $\alpha + \beta = 0(1)$.
- *Pour* $x = \dfrac{\pi}{2}$*, on obtient l'équation* $\alpha + \gamma = 0(2)$.
- *Pour* $x = \pi$*, on obtient l'équation* $\alpha - \beta = 0(3)$.

Exemple

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *considérons les fonctions*

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto cos(x), \quad h : x \mapsto sin(x)$$

et montrons que la famille (f, g, h) *est libre.*

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Supposons $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\alpha + \beta cosx + \gamma sinx = 0$.

- *Pour* $x = 0$, *on obtient l'équation* $\alpha + \beta = 0(1)$.
- *Pour* $x = \dfrac{\pi}{2}$, *on obtient l'équation* $\alpha + \gamma = 0(2)$.
- *Pour* $x = \pi$, *on obtient l'équation* $\alpha - \beta = 0(3)$.

Exemple

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *considérons les fonctions*

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto cos(x), \quad h : x \mapsto sin(x)$$

et montrons que la famille (f, g, h) *est libre.*

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Supposons $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\alpha + \beta cosx + \gamma sinx = 0$.

- *Pour* $x = 0$, *on obtient l'équation* $\alpha + \beta = 0(1)$.
- *Pour* $x = \dfrac{\pi}{2}$, *on obtient l'équation* $\alpha + \gamma = 0(2)$.
- *Pour* $x = \pi$, *on obtient l'équation* $\alpha - \beta = 0(3)$.

(1) *et* (3) *(somme et différence) donnent* $\alpha = \beta = 0$ *et par* (2) *on obtient* $\gamma = 0$.

Exemple

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *considérons les fonctions*

$$f : x \mapsto 1, \quad g : x \mapsto cos(x), \quad h : x \mapsto sin(x)$$

et montrons que la famille (f, g, h) *est libre.*

Solution

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Supposons $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\alpha + \beta cosx + \gamma sinx = 0$.

- *Pour* $x = 0$, *on obtient l'équation* $\alpha + \beta = 0(1)$.
- *Pour* $x = \dfrac{\pi}{2}$, *on obtient l'équation* $\alpha + \gamma = 0(2)$.
- *Pour* $x = \pi$, *on obtient l'équation* $\alpha - \beta = 0(3)$.

(1) *et* (3) *(somme et différence) donnent* $\alpha = \beta = 0$ *et par* (2) *on obtient* $\gamma = 0$.

Finalement la famille (f, g, h) *est libre.*

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul, est liée.

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul, est liée.
- Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul, est liée.
- Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul, est liée.
- Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une famille libre et si* $e_{n+1} \notin \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *alors la sur-famille* $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ *est libre.*

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul, est liée.
- Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une famille libre et si* $e_{n+1} \notin \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *alors la sur-famille* $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ *est libre.*

Démonstration.

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul, est liée.
- Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une famille libre et si* $e_{n+1} \notin \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *alors la sur-famille* $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ *est libre.*

Démonstration.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_i e_i = 0$.

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul, est liée.
- Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre et si $e_{n+1} \notin \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ alors la sur-famille $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est libre.

Démonstration.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_i e_i = 0$.

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, on peut écrire $e_{n+1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} e_i$ ce qui signifierait que $e_{n+1} \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ ce qui est faux donc $\lambda_{n+1} = 0$

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul, est liée.
- Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre et si $e_{n+1} \notin \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ alors la sur-famille $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est libre.

Démonstration.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_i e_i = 0$.

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, on peut écrire $e_{n+1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} e_i$ ce qui signifierait que $e_{n+1} \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ ce qui est faux donc $\lambda_{n+1} = 0$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ et comme la famille est libre $\forall \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$.

Remarque

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul, est liée.
- Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre et si $e_{n+1} \notin \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ alors la sur-famille $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est libre.

Démonstration.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_i e_i = 0$.

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, on peut écrire $e_{n+1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} e_i$ ce qui signifierait que $e_{n+1} \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ ce qui est faux donc $\lambda_{n+1} = 0$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ et comme la famille est libre $\forall \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$.

Donc la famille $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est libre. $\square$

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que E est de ***dimension finie*** *s'il existe une* ***famille génératrice finie*** *de E.*

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que E est de ***dimension finie*** *s'il existe une* ***famille génératrice finie*** *de E.*
Dans le cas contraire, E est de ***dimension infinie****.*

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \dots, e_n)$ *de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est une* ***base*** *de* E *si celle-ci est* ***libre*** *et* ***génératrice****.*

Définition

*On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une **base** de E si celle-ci est **libre** et **génératrice**.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une ***base*** *de E si celle-ci est* ***libre*** *et* ***génératrice****.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$

- *Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors*
  $u = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est une* ***base*** *de* E *si celle-ci est* ***libre*** *et* ***génératrice****.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$.

On pose $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$

- *Soit* $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*, alors*
  $u = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

Définition

*On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une **base** de E si celle-ci est **libre** et **génératrice**.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$

- *Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors*
  $u = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ donc (e_1, e_2, e_3) est génératrice.

Définition

*On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une **base** de E si celle-ci est **libre** et **génératrice**.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$

- *Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors* $u = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *donc (e_1, e_2, e_3) est génératrice.*
- *Supposons $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$*

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est une* ***base*** *de* E *si celle-ci est* ***libre*** *et* ***génératrice****.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$

- *Soit* $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *alors* $u = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *donc* (e_1, e_2, e_3) *est génératrice.*
- *Supposons* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \dots, e_n)$ *de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est une* ***base*** *de* E *si celle-ci est* ***libre*** *et* ***génératrice****.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$*.*
On pose $e_1 = (1, 0, 0)$*,* $e_2 = (0, 1, 0)$ *et* $e_3 = (0, 0, 1)$

- *Soit* $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, alors* $u = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *donc* (e_1, e_2, e_3) *est génératrice.*
- *Supposons* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ *alors* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est une **base** de* E *si celle-ci est **libre** et **génératrice**.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ *et* $e_3 = (0, 0, 1)$

- *Soit* $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *alors*
  $u = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *donc* (e_1, e_2, e_3) *est génératrice.*
- *Supposons* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ *alors* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$
  Donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ *et* $\lambda_3 = 0$

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une ***base*** *de E si celle-ci est* ***libre*** *et* ***génératrice****.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$

- *Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors*
  $u = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *donc (e_1, e_2, e_3) est génératrice.*
- *Supposons $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ alors $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$*
  Donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$
  Donc la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.
- *Comme la famille est libre et génératrice, c'est une base.*

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *est une* ***base*** *de* E *si celle-ci est* ***libre*** *et* ***génératrice****.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$*.*
On pose $e_1 = (1,0,0)$*,* $e_2 = (0,1,0)$ *et* $e_3 = (0,0,1)$

- *Soit* $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*, alors*
  $u = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *donc* (e_1, e_2, e_3) *est génératrice.*
- *Supposons* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ *alors* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$
  Donc $\lambda_1 = 0$*,* $\lambda_2 = 0$ *et* $\lambda_3 = 0$
  Donc la famille (e_1, e_2, e_3) *est libre.*
- *Comme la famille est libre et génératrice, c'est une base.*

Définition

On dit qu'une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une ***base*** *de E si celle-ci est* ***libre*** *et* ***génératrice****.*

Exemple

Dans $E = \mathbb{R}^3$.
On pose $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$

- *Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors*
  $u = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *donc (e_1, e_2, e_3) est génératrice.*
- *Supposons $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ alors $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$*
  Donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$
  Donc la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.
- *Comme la famille est libre et génératrice, c'est une base.*
  On appelle cette base la base ***canonique*** *de $\mathbb{R}^3$: c'est la base la plus simple qui vient à l'esprit.*

Exemple (Généralisation de l'exemple précédent)

Dans $E = \mathbb{K}^n$, *on pose* $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ *où* 1 *se situe en* i*ème position.*

- *On a déja vu que* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}^n$

Exemple (Généralisation de l'exemple précédent)

Dans $E = \mathbb{K}^n$, on pose $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ où 1 se situe en ième position.

- *On a déja vu que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$*
- *Montrons que $\mathscr{B}$ est libre.*

Exemple (Généralisation de l'exemple précédent)

Dans $E = \mathbb{K}^n$, *on pose* $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*

- *On a déja vu que* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}^n$
- *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre.*

Exemple (Généralisation de l'exemple précédent)

Dans $E = \mathbb{K}^n$, *on pose* $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*

- *On a déja vu que* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}^n$
- *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
  Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Exemple (Généralisation de l'exemple précédent)

Dans $E = \mathbb{K}^n$*, on pose* $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*

- *On a déja vu que* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}^n$
- *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
  Supposons que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$.

Exemple (Généralisation de l'exemple précédent)

Dans $E = \mathbb{K}^n$, *on pose* $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*

- *On a déja vu que* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}^n$
- *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
  Supposons que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$.
  C'est équivalent à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ *et donc* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Exemple (Généralisation de l'exemple précédent)

Dans $E = \mathbb{K}^n$, *on pose* $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*

- *On a déja vu que* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}^n$
- *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
  Supposons que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$.
  C'est équivalent à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ *et donc* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
  Finalement , la famille $\mathscr{B}$ *est libre et génératrice de* $\mathbb{K}^n$,

Exemple (Généralisation de l'exemple précédent)

Dans $E = \mathbb{K}^n$, *on pose* $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ *où* 1 *se situe en ième position.*

- *On a déja vu que* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}^n$
- *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
  Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
  Supposons que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$.
  C'est équivalent à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$ *et donc* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
  Finalement , la famille $\mathscr{B}$ *est libre et génératrice de* $\mathbb{K}^n$, *c'est une base de* $\mathbb{K}^n$.

Exemple (Généralisation de l'exemple précédent)

Dans $E = \mathbb{K}^n$, on pose $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ où 1 se situe en ième position.

- *On a déja vu que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$*
- *Montrons que $\mathscr{B}$ est libre.*
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
  Supposons que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$.
  C'est équivalent à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
  Finalement , la famille $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{K}^n$, c'est une base de $\mathbb{K}^n$.

On appelle cette base la base ***canonique*** *de $\mathbb{K}^n$*

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$*.*

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- *Montrons que cette famille est libre.*

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- *Montrons que cette famille est libre.*

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- *Montrons que cette famille est libre.*
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- *Montrons que cette famille est libre.*
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Supposons que $\lambda.1 + \mu.i = 0$.

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- *Montrons que cette famille est libre.*
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Supposons que $\lambda.1 + \mu.i = 0$.
  En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $\lambda = \mu = 0$.

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- *Montrons que cette famille est libre.*
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Supposons que $\lambda.1 + \mu.i = 0$.
  En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $\lambda = \mu = 0$.
  Donc la famille $\mathscr{B}$ *est libre.*

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- *Montrons que cette famille est libre.*
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Supposons que $\lambda.1 + \mu.i = 0$.
  En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $\lambda = \mu = 0$.
  Donc la famille $\mathscr{B}$ *est libre.*
- *Comme la famille* $\mathscr{B}$ *est libre et génératrice du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$,

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$*.*

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- *Montrons que cette famille est libre.*
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*.*
  Supposons que $\lambda.1 + \mu.i = 0$*.*
  En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $\lambda = \mu = 0$*.*
  Donc la famille $\mathscr{B}$ *est libre.*
- *Comme la famille* $\mathscr{B}$ *est libre et génératrice du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$*,*

Exemple

Considérons la famille $(1, i)$ *d'éléments du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$.

- *Cette famille est génératrice de* $\mathbb{C}$
  En effet, par définition de $\mathbb{C}$ *:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- *Montrons que cette famille est libre.*
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
  Supposons que $\lambda.1 + \mu.i = 0$.
  En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient $\lambda = \mu = 0$.
  Donc la famille $\mathscr{B}$ *est libre.*
- *Comme la famille* $\mathscr{B}$ *est libre et génératrice du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$, *c'est une base de* $\mathbb{C}$.

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

  (z_0) est libre

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$
  donc $\lambda = \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$
  donc $\lambda = \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$ donc (z_0) est génératrice

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$
  donc $\lambda = \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$ donc (z_0) est génératrice
- La famille $(1, i)$ est liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$
  donc $\lambda = \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$ donc (z_0) est génératrice
- La famille $(1, i)$ est liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$
  donc $\lambda = \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$ donc (z_0) est génératrice
- La famille $(1, i)$ est liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet $1(1) + i(i) = 0$

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$
  donc $\lambda = \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$ donc (z_0) est génératrice
- La famille $(1, i)$ est liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet $1(1) + i(i) = 0$
  Elle n'est pas donc une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$
  donc $\lambda = \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$ donc (z_0) est génératrice
- La famille $(1, i)$ est liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet $1(1) + i(i) = 0$
  Elle n'est pas donc une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  (une base de $\mathbb{C}$ est (1) par exemple.)

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$
  donc $\lambda = \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$ donc (z_0) est génératrice
- La famille $(1, i)$ est liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet $1(1) + i(i) = 0$
  Elle n'est pas donc une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  (une base de $\mathbb{C}$ est (1) par exemple.)

Remarque

- Tout complexe non nul est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
  (z_0) est libre car $\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, z = \left(\dfrac{z}{z_0}\right) z_0 = \lambda z_0$
  donc $\lambda = \dfrac{z}{z_0} \in \mathbb{C}$ donc (z_0) est génératrice
- La famille $(1, i)$ est liée dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  En effet $1(1) + i(i) = 0$
  Elle n'est pas donc une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
  (une base de $\mathbb{C}$ est (1) par exemple.)

La nature du corps $\mathbb{K}$ peut donc avoir une importance fondamentale sur la structure du $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Théorème

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots e_n$.

Théorème

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots e_n$.

Démonstration.

Soit $x \in E$, comme $\mathscr{B}$ est génératrice,

Théorème

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots e_n$.

Démonstration.

Soit $x \in E$, comme $\mathscr{B}$ est génératrice,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Théorème

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots e_n$.

Démonstration.

Soit $x \in E$, comme $\mathscr{B}$ est génératrice,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Supposons que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ avec $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$

Théorème

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots e_n$.

Démonstration.

Soit $x \in E$, comme $\mathscr{B}$ est génératrice,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Supposons que $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ avec $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$

En effectuant la différence, $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0$

Théorème

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots e_n$.

Démonstration.

Soit $x \in E$, comme $\mathscr{B}$ est génératrice,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Supposons que $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ avec $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$

En effectuant la différence, $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0$

Comme la famille est libre, $\forall \in [\![1, n]\!] \lambda_i - \mu_i = 0$ donc

Théorème

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots e_n$.

Démonstration.

Soit $x \in E$, comme $\mathscr{B}$ est génératrice,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Supposons que $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ avec $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$

En effectuant la différence, $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0$

Comme la famille est libre, $\forall \in [\![1, n]\!] \lambda_i - \mu_i = 0$ donc $\forall \in [\![1, n]\!] \lambda_i = \mu_i$

Théorème

Soit E, un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ une base de E. Alors tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \dots e_n$.

Démonstration.

Soit $x \in E$, comme $\mathscr{B}$ est génératrice,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

Supposons que $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ avec $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$

En effectuant la différence, $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0$

Comme la famille est libre, $\forall \in [\![1, n]\!] \lambda_i - \mu_i = 0$ donc $\forall \in [\![1, n]\!] \lambda_i = \mu_i$

La décomposition est bien unique. □

Théorème (Théorème de la base incomplète)

Si E est de dimension finie, alors toute famille libre de E peut-être complétée en une base de E.
Pour la compléter, il suffit de considérer certains vecteurs d'une famille génératrice de E.

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est génératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est gératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.
On choisit une famille $\mathscr{H}$, de cardinal minimum, génératrice de E. On note son cardinal k.

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est génératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.
On choisit une famille $\mathscr{H}$, de cardinal minimum, génératrice de E. On note son cardinal k.
Montrons que cette famille est libre.

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est génératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.
On choisit une famille $\mathscr{H}$, de cardinal minimum, génératrice de E. On note son cardinal k.
Montrons que cette famille est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{K}^n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{m} \mu_i g_i = 0$

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est génératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.
On choisit une famille $\mathscr{H}$, de cardinal minimum, génératrice de E. On note son cardinal k.
Montrons que cette famille est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{m} \mu_i g_i = 0$

Si $\forall i \in [\![1, m]\!], \mu_i = 0$, comme $\mathscr{F}$ est libre, $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$ et

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \dots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est génératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.
On choisit une famille $\mathscr{H}$, de cardinal minimum, génératrice de E. On note son cardinal k.
Montrons que cette famille est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{K}^n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{m} \mu_i g_i = 0$

Si $\forall i \in [\![1, m]\!], \mu_i = 0$, comme $\mathscr{F}$ est libre, $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$ et donc la famille est libre.

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est gératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.
On choisit une famille $\mathscr{H}$, de cardinal minimum, génératrice de E. On note son cardinal k.
Montrons que cette famille est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{K}^n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{m} \mu_i g_i = 0$
Si $\forall i \in [\![1, m]\!], \mu_i = 0$, comme $\mathscr{F}$ est libre, $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$ et donc la famille est libre.

Sinon, il existe $k \in [\![1, m]\!], \mu_k \neq 0$.

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \dots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est génératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.
On choisit une famille $\mathscr{H}$, de cardinal minimum, génératrice de E. On note son cardinal k.
Montrons que cette famille est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{K}^n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{m} \mu_i g_i = 0$
Si $\forall i \in [\![1, m]\!], \mu_i = 0$, comme $\mathscr{F}$ est libre, $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$ et donc la famille est libre.
Sinon, il existe $k \in [\![1, m]\!], \mu_k \neq 0$. Donc $\displaystyle g_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_k} e_i - \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu_k} g_i$

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est génératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.
On choisit une famille $\mathscr{H}$, de cardinal minimum, génératrice de E. On note son cardinal k.
Montrons que cette famille est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{K}^n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{m} \mu_i g_i = 0$

Si $\forall i \in [\![1, m]\!], \mu_i = 0$, comme $\mathscr{F}$ est libre, $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$ et donc la famille est libre.

Sinon, il existe $k \in [\![1, m]\!], \mu_k \neq 0$. Donc $\displaystyle g_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_k} e_i - \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu_k} g_i$

on pourrait exprimer g_k comme combinaison linéaire des autres vecteurs donc en enlevant ce vecteur à cette famille, on obtiendrait une nouvelle famille contenant $k-1$ vecteurs qui serait génératrice, ce qui contredit la définition de k.

Démonstration.

Soit $\mathscr{F}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et $\mathscr{G}(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ une famille génératrice de E.

On s'intéresse à l'ensemble des familles $\mathscr{H}$ telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{H} \subset (\mathscr{F} \cup \mathscr{G})$

Comme $\mathscr{G}$ est génératice, $\mathscr{H} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ l'est aussi. Donc il existe une famille de $\mathscr{H}$ qui est génératrice.
On choisit une famille $\mathscr{H}$, de cardinal minimum, génératrice de E. On note son cardinal k.
Montrons que cette famille est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{K}^n$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{m} \mu_i g_i = 0$

Si $\forall i \in [\![1, m]\!], \mu_i = 0$, comme $\mathscr{F}$ est libre, $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$ et donc la famille est libre.

Sinon, il existe $k \in [\![1, m]\!], \mu_k \neq 0$. Donc $g_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_k} e_i - \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_i}{\mu_k} g_i$

on pourrait exprimer g_k comme combinaison linéaire des autres vecteurs donc en enlevant ce vecteur à cette famille, on obtiendrait une nouvelle famille contenant $k-1$ vecteurs qui serait génératrice, ce qui contredit la définition de k. Donc $\mathcal{H}$ est libre. $\square$

Théorème (Théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E. En particulier, un espace de dimension finie admet une base.

Théorème (Théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.
En particulier, un espace de dimension finie admet une base.

Démonstration.

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E.

Théorème (Théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E. En particulier, un espace de dimension finie admet une base.

Démonstration.

Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E.
D'après le théorème précédent, on peut compléter la famille $\{e_1\}$ qui est évidemment libre par des éléments de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ pour produire une base. $\square$

Théorème (Théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E. En particulier, un espace de dimension finie admet une base.

Démonstration.

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E.
D'après le théorème précédent, on peut compléter la famille $\{e_1\}$ qui est évidemment libre par des éléments de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ pour produire une base. $\square$

En particulier, on déduit des résultats précédents que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.

Théorème (Théorème et définition)

Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre s'appelle la dimension de E et est noté $\dim(E)$.

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié".

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié".

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$:

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$:

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$: "2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée".

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$: "2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée".
  Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors (v_0, v_1) est liée :
  - Si $\lambda_0 \neq 0$,

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$: "2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée".
  Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors (v_0, v_1) est liée :
  - Si $\lambda_0 \neq 0$,

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$: "2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée".
  Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors (v_0, v_1) est liée :
  - Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $v_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} v_0$.

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$: "2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée".
  Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors (v_0, v_1) est liée :
  - Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $v_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} v_0$.
  - Sinon $v_0 = 0_E$.

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$: "2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée".
  Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors (v_0, v_1) est liée :
  - Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $v_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} v_0$.
  - Sinon $v_0 = 0_E$.

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$: "2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée".
  Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors (v_0, v_1) est liée :
  - Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $v_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} v_0$.
  - Sinon $v_0 = 0_E$. Donc v_0 et v_1 sont colinéaires.
- Soit $n \geqslant 2$, supposons le résultat vrai pour $n-1$.

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$: "2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée".
  Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors (v_0, v_1) est liée :
    - Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $v_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} v_0$.
    - Sinon $v_0 = 0_E$. Donc v_0 et v_1 sont colinéaires.
- Soit $n \geqslant 2$, supposons le résultat vrai pour $n - 1$.

Lemme

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de n vecteurs de E forment toujours une famille liée.

Démonstration.

Montrons ce lemme par récurrence sur n :

- Pour $n = 0$: "1 vecteur combinaison linéaire de 0 vecteur est lié". C'est vrai car une combinaison linéaire de 0 vecteurs, c'est 0_E.
- Pour $n = 1$: "2 vecteurs combinaison linéaire de 1 vecteur forment une famille liée".
  Si $v_0 = \lambda_0 u_1$ et $v_1 = \lambda_1 u_1$, alors (v_0, v_1) est liée :
    - Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $v_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} v_0$.
    - Sinon $v_0 = 0_E$. Donc v_0 et v_1 sont colinéaires.
- Soit $n \geqslant 2$, supposons le résultat vrai pour $n-1$.
  Considérons $n+1$ vecteurs $v_1, v_2, \ldots v_{n+1}$, combinaisons linéaires de n vecteurs $u_1, u_2, \ldots u_n$.

□

Démonstration.

On a donc des scalaires $\alpha_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{lll} v_1 & = \alpha_{1,1} u_1 + \alpha_{1,2} u_2 + \ldots + \alpha_{1,n} u_n & (L_1) \\ v_2 & = \alpha_{2,1} u_1 + \alpha_{2,2} u_2 + \ldots + \alpha_{2,n} u_n & (L_2) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n+1} & = \alpha_{n+1,1} u_1 + \alpha_{n+1,2} u_2 + \ldots + \alpha_{n+1,n} u_n & (L_{n+1}) \end{array}\right.$$

Démonstration.

On a donc des scalaires $\alpha_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ tels que :

$$\begin{cases} v_1 & = \alpha_{1,1}u_1 + \alpha_{1,2}u_2 + \ldots + \alpha_{1,n}u_n & (L_1) \\ v_2 & = \alpha_{2,1}u_1 + \alpha_{2,2}u_2 + \ldots + \alpha_{2,n}u_n & (L_2) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n+1} & = \alpha_{n+1,1}u_1 + \alpha_{n+1,2}u_2 + \ldots + \alpha_{n+1,n}u_n & (L_{n+1}) \end{cases}$$

Si $\forall i \in [\![1, n+1]\!], \alpha_{i,n} = 0$, alors $v_1, v_2, \ldots v_n$ sont combinaisons linéaires des $n-1$ vecteurs $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$.

Démonstration.

On a donc des scalaires $\alpha_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{lll} v_1 & = \alpha_{1,1}u_1 + \alpha_{1,2}u_2 + \ldots + \alpha_{1,n}u_n & (L_1) \\ v_2 & = \alpha_{2,1}u_1 + \alpha_{2,2}u_2 + \ldots + \alpha_{2,n}u_n & (L_2) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n+1} & = \alpha_{n+1,1}u_1 + \alpha_{n+1,2}u_2 + \ldots + \alpha_{n+1,n}u_n & (L_{n+1}) \end{array}\right.$$

Si $\forall i \in [\![1, n+1]\!], \alpha_{i,n} = 0$, alors $v_1, v_2, \ldots v_n$ sont combinaisons linéaires des $n-1$ vecteurs $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$.
Par hypothèse de récurrence, $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ est liée.

Démonstration.

On a donc des scalaires $\alpha_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{lll} v_1 & = \alpha_{1,1}u_1 + \alpha_{1,2}u_2 + \ldots + \alpha_{1,n}u_n & (L_1) \\ v_2 & = \alpha_{2,1}u_1 + \alpha_{2,2}u_2 + \ldots + \alpha_{2,n}u_n & (L_2) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n+1} & = \alpha_{n+1,1}u_1 + \alpha_{n+1,2}u_2 + \ldots + \alpha_{n+1,n}u_n & (L_{n+1}) \end{array}\right.$$

Si $\forall i \in [\![1, n+1]\!], \alpha_{i,n} = 0$, alors $v_1, v_2, \ldots v_n$ sont combinaisons linéaires des $n-1$ vecteurs $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$.
Par hypothèse de récurrence, $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ est liée. Donc $(v_1, v_1, v_2, \ldots v_{n+1})$ l'est aussi.

Démonstration.

On a donc des scalaires $\alpha_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ tels que :

$$\begin{cases} v_1 & = \alpha_{1,1} u_1 + \alpha_{1,2} u_2 + \ldots + \alpha_{1,n} u_n & (L_1) \\ v_2 & = \alpha_{2,1} u_1 + \alpha_{2,2} u_2 + \ldots + \alpha_{2,n} u_n & (L_2) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n+1} & = \alpha_{n+1,1} u_1 + \alpha_{n+1,2} u_2 + \ldots + \alpha_{n+1,n} u_n & (L_{n+1}) \end{cases}$$

Si $\forall i \in [\![1, n+1]\!], \alpha_{i,n} = 0$, alors $v_1, v_2, \ldots v_n$ sont combinaisons linéaires des $n-1$ vecteurs $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$.
Par hypothèse de récurrence, $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ est liée. Donc $(v_1, v_1, v_2, \ldots v_{n+1})$ l'est aussi.

$\square$

Démonstration.

Si l'un des $\alpha_{i,n}$, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ n'est pas nul, disons $\alpha_{n+1,n}$ (sinon on échange les lignes),

Démonstration.

Si l'un des $\alpha_{i,n}$, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ n'est pas nul, disons $\alpha_{n+1,n}$ (sinon on échange les lignes), alors les transformations $L_i \leftarrow L_i - \underbrace{\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}}}_{\lambda_i} L_{n+1}$ pour

$i \in [\![1, n]\!]$

Démonstration.

Si l'un des $\alpha_{i,n}$, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ n'est pas nul, disons $\alpha_{n+1,n}$ (sinon on échange les lignes), alors les transformations $L_i \leftarrow L_i - \underbrace{\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}}}_{\lambda_i} L_{n+1}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ (c'est un pivot de Gauss !) donnent :

Démonstration.

Si l'un des $\alpha_{i,n}$, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ n'est pas nul, disons $\alpha_{n+1,n}$ (sinon on échange les lignes), alors les transformations $L_i \leftarrow L_i - \underbrace{\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}}}_{\lambda_i} L_{n+1}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ (c'est un pivot de Gauss !) donnent :

$$\left\{\begin{array}{rl} v_1 - \lambda_1 v_{n+1} = & \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \ldots u_{n-1} \\ v_2 - \lambda_2 v_{n+1} = & \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \ldots u_{n-1} \\ & \vdots \\ v_n - \lambda_n v_{n+1} = & \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \ldots u_{n-1} \end{array}\right.$$

Démonstration.

Si l'un des $\alpha_{i,n}$, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ n'est pas nul, disons $\alpha_{n+1,n}$ (sinon on échange les lignes), alors les transformations $L_i \leftarrow L_i - \underbrace{\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}}}_{\lambda_i} L_{n+1}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ (c'est un pivot de Gauss !) donnent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_1 - \lambda_1 v_{n+1} &=& \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \ldots u_{n-1} \\ v_2 - \lambda_2 v_{n+1} &=& \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \ldots u_{n-1} \\ && \vdots \\ v_n - \lambda_n v_{n+1} &=& \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \ldots u_{n-1} \end{array}\right.$$

Les vecteurs $v_i - \lambda_i v_{n+1}, i \in [\![1, n]\!]$ forment donc une famille liée puisque ce sont n vecteurs combinaisons linéaires de $n-1$ (hypothèse de récurrence).

Démonstration.

Si l'un des $\alpha_{i,n}$, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ n'est pas nul, disons $\alpha_{n+1,n}$ (sinon on échange les lignes), alors les transformations $L_i \leftarrow L_i - \underbrace{\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}}}_{\lambda_i} L_{n+1}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ (c'est un pivot de Gauss !) donnent :

$$\begin{cases} v_1 - \lambda_1 v_{n+1} = & \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \dots u_{n-1} \\ v_2 - \lambda_2 v_{n+1} = & \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \dots u_{n-1} \\ & \vdots \\ v_n - \lambda_n v_{n+1} = & \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \dots u_{n-1} \end{cases}$$

Les vecteurs $v_i - \lambda_i v_{n+1}, i \in [\![1, n]\!]$ forment donc une famille liée puisque ce sont n vecteurs combinaisons linéaires de $n-1$ (hypothèse de récurrence).
Il existe donc des scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ non tous nuls tels que
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i (v_i - \lambda_i v_{n+1}) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i\right) v_{n+1} = 0$

Démonstration.

Si l'un des $\alpha_{i,n}$, pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ n'est pas nul, disons $\alpha_{n+1,n}$ (sinon on échange les lignes), alors les transformations $L_i \leftarrow L_i - \underbrace{\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{n+1,n}}}_{\lambda_i} L_{n+1}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ (c'est un pivot de Gauss !) donnent :

$$\begin{cases} v_1 - \lambda_1 v_{n+1} = & \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \dots u_{n-1} \\ v_2 - \lambda_2 v_{n+1} = & \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \dots u_{n-1} \\ & \vdots \\ v_n - \lambda_n v_{n+1} = & \text{Combinaison linéaire de } u_1, u_2, \dots u_{n-1} \end{cases}$$

Les vecteurs $v_i - \lambda_i v_{n+1}, i \in [\![1, n]\!]$ forment donc une famille liée puisque ce sont n vecteurs combinaisons linéaires de $n-1$ (hypothèse de récurrence).

Il existe donc des scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (v_i - \lambda_i v_{n+1}) = 0 \text{ donc } \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i \right) v_{n+1} = 0$$

Donc la famille $(v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ est liée.

Corollaire

Si E est de dimension n et si $(x_1 \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $(x_1, \ldots, x_n)$ *est une famille libre de E.*

Corollaire

Si E est de dimension n et si $(x_1 \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $(x_1, \dots, x_n)$ *est une famille libre de* E.
- $(x_1, \dots, x_n)$ *est une famille génératrice de* E.

Corollaire

Si E est de dimension n et si $(x_1 \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- $(x_1, \dots, x_n)$ *est une famille libre de* E.
- $(x_1, \dots, x_n)$ *est une famille génératrice de* E.
- $(x_1, \dots, x_n)$ *est une base de* E.

Remarque

- En particulier, dans un espace de dimension n, une famille libre a toujours au plus n éléments, et une famille génératrice a toujours au moins n éléments.

Remarque

- En particulier, dans un espace de dimension n, une famille libre a toujours au plus n éléments, et une famille génératrice a toujours au moins n éléments.
- Si E et F sont de dimension finie, alors

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

En particulier, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Remarque

- En particulier, dans un espace de dimension n, une famille libre a toujours au plus n éléments, et une famille génératrice a toujours au moins n éléments.
- Si E et F sont de dimension finie, alors

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

  En particulier, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- Si E et F sont de dimension finie, alors

$$\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(E) \times dim(F)$$

Remarque

- En particulier, dans un espace de dimension n, une famille libre a toujours au plus n éléments, et une famille génératrice a toujours au moins n éléments.
- Si E et F sont de dimension finie, alors
$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$
En particulier, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- Si E et F sont de dimension finie, alors
$$\dim(\mathscr{L}(E, F)) = \dim(E) \times dim(F)$$
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

Définition

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, on appelle* ***rang*** *de* $(x_1, \ldots, x_n)$ *la dimension de* $F = \mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_n)$*.*

Définition

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, on appelle* ***rang*** *de* $(x_1, \dots, x_n)$ *la dimension de* $F = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$*.*

Lemme

Dans un espace engendré par n *vecteurs* $(u_1, \dots, u_n)$*, toute famille* $(v_1, \dots, v_{n+1})$ *de* $n+1$ *vecteurs est liée.*

Définition

*Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on appelle **rang** de $(x_1, \dots, x_n)$ la dimension de $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$.*

Lemme

Dans un espace engendré par n vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$, toute famille $(v_1, \dots, v_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration.

Cette propriété, sous une autre forme, a déjà été démontrée sous une autre forme. $\square$

Lemme

Le cardinal d'une famille libre est plus petit que celui d'une famille génératrice.

Définition

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ *une famille finie de vecteurs d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, on appelle* ***rang*** *de* $(x_1, \dots, x_n)$ *la dimension de* $F = \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$*.*

Lemme

Dans un espace engendré par n *vecteurs* $(u_1, \dots, u_n)$*, toute famille* $(v_1, \dots, v_{n+1})$ *de* $n+1$ *vecteurs est liée.*

Démonstration.

Cette propriété, sous une autre forme, a déjà été démontrée sous une autre forme. $\square$

Lemme

Le cardinal d'une famille libre est plus petit que celui d'une famille génératrice.
Si $\mathscr{F}_1$ *est une famille libre et* $\mathscr{F}_2$ *une famille génératrice de* E*, on a*

$$\mathrm{Card}(\mathscr{F}_1) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{F}_2)$$

Remarque

Soit E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $E = \{0_E\}$, on a $\dim E = 0$.

Remarque

Soit E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $E = \{0_E\}$, on a $\dim E = 0$.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, on a : $\operatorname{Card} \mathscr{F} \leqslant \dim E$

Remarque

Soit E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $E = \{0_E\}$, on a $\dim E = 0$.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, on a : $\operatorname{Card} \mathscr{F} \leqslant \dim E$
- Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, on a : $\operatorname{Card} \mathscr{F} \geqslant \dim E$

Remarque

Soit E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $E = \{0_E\}$, on a $\dim E = 0$.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, on a : $\operatorname{Card} \mathscr{F} \leqslant \dim E$
- Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, on a : $\operatorname{Card} \mathscr{F} \geqslant \dim E$

Remarque

Soit E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $E = \{0_E\}$, on a $\dim E = 0$.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, on a : $\operatorname{Card} \mathscr{F} \leqslant \dim E$
- Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, on a : $\operatorname{Card} \mathscr{F} \geqslant \dim E$

Proposition

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et on a $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, on a $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$.

Théorème (Rappel)

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une base d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de* E *alors*
$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n.$

Théorème (Rappel)

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une base d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de* E *alors* $\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n.$

Définition

Avec les notations ci-dessous, les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *sont appelés les composants de* x *dans la base* $\mathscr{B}$ *(ou encore les composantes de* x*).*

Théorème (Rappel)

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une base d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de* E *alors* $\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n.$

Définition

Avec les notations ci-dessous, les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont appelés les composants de* x *dans la base* $\mathscr{B}$ *(ou encore les composantes de* x*).*

Remarque

Les composantes d'un vecteur dépendent de la base dans laquelle on travaille.

Théorème (Rappel)

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E alors $\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n$.

Définition

Avec les notations ci-dessous, les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les composants de x dans la base $\mathscr{B}$ (ou encore les composantes de x).

Remarque

Les composantes d'un vecteur dépendent de la base dans laquelle on travaille.

Exemple

- *Dans $E = \mathbb{K}^n$, considérons la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$. Puisque $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, les composantes du vecteurs x dans la base $\mathscr{B}$ sont les scalaires $x_1, \dots, x_n$.*

Théorème (Rappel)

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E alors $\forall x \in E, \exists !(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n$.

Définition

Avec les notations ci-dessous, les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont appelés les composants de x dans la base $\mathscr{B}$ (ou encore les composantes de x).

Remarque

Les composantes d'un vecteur dépendent de la base dans laquelle on travaille.

Exemple

- *Dans $E = \mathbb{K}^n$, considérons la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et le vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Puisque $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, les composantes du vecteurs x dans la base $\mathscr{B}$ sont les scalaires $x_1, \ldots, x_n$.*
- *Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les composantes de $z \in \mathbb{C}$ dans la base canonique $(1, i)$ sont $Re(z)$ et $Im(z)$*

Théorème

Si $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une base de* E *alors pour tout vecteur* x *et* y *de composantes* $x_1, \ldots, x_n$ *et* $y_1, \ldots, y_n$ *dans* $\mathscr{B}$*, les composantes de* $x + y$ *sont* $x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n$ *et celle de* λx *sont* $\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n$*.*

La réunion de deux sous-espaces n'est pas en général un sous-espace, sauf cas très particulier.

La réunion de deux sous-espaces n'est pas en général un sous-espace, sauf cas très particulier.
L'opération d'addition permet de définir la somme de deux sous-espaces, cette somme s'avère être en fait le plus petit sous-espace contenant leur réunion.

La réunion de deux sous-espaces n'est pas en général un sous-espace, sauf cas très particulier.
L'opération d'addition permet de définir la somme de deux sous-espaces, cette somme s'avère être en fait le plus petit sous-espace contenant leur réunion.
La propriété d'unicité de l'écriture d'un vecteur comme somme de vecteurs appartenant à deux sous-espaces donnés conduit à la notion de **somme directe** et de **sous-espaces supplémentaires**.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :
On appelle ***somme*** *de F et de G l'ensemble, noté $F+G$ des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$F+G=\{u \in E \mid u=f+g, f \in F, g \in G\}.$$

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :
On appelle ***somme*** *de F et de G l'ensemble, noté $F+G$ des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$F+G=\{u\in E \mid u=f+g, f\in F, g\in G\}.$$

En d'autres termes, les vecteurs de la somme $F+G$ sont caractérisés par

$$u\in F+G \iff \exists f\in F, \exists g\in G \text{ tels que } u=f+g$$

Remarque

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :
*On appelle **somme** de F et de G l'ensemble, noté $F+G$ des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$F+G=\{u\in E \mid u=f+g, f\in F, g\in G\}.$$

En d'autres termes, les vecteurs de la somme $F+G$ sont caractérisés par

$$u\in F+G \iff \exists f\in F, \exists g\in G \textit{ tels que } u=f+g$$

Remarque
La somme $F+G$ des sous-espaces vectoriels F et G est donc est un ensemble. Cet ensemble contient F.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :
On appelle ***somme*** *de F et de G l'ensemble, noté $F+G$ des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$F+G=\{u\in E \mid u=f+g, f\in F, g\in G\}.$$

En d'autres termes, les vecteurs de la somme $F+G$ sont caractérisés par

$$u\in F+G \iff \exists f\in F, \exists g\in G \text{ tels que } u=f+g$$

Remarque

La somme $F+G$ des sous-espaces vectoriels F et G est donc est un ensemble. Cet ensemble contient F.
En effet, si $f\in F$, alors $f=f+0_E\in F+G$ car $0_E\in G$:

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :
On appelle ***somme*** *de F et de G l'ensemble, noté $F+G$ des vecteurs qui sont la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :*

$$F+G = \{u \in E \mid u = f+g, f \in F, g \in G\}.$$

En d'autres termes, les vecteurs de la somme $F+G$ sont caractérisés par

$$u \in F+G \iff \exists f \in F, \exists g \in G \text{ tels que } u = f+g$$

Remarque

La somme $F+G$ des sous-espaces vectoriels F et G est donc est un ensemble. Cet ensemble contient F.
En effet, si $f \in F$, alors $f = f + 0_E \in F+G$ car $0_E \in G$:
Ainsi $F \subset F+G$.

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F + G$

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F + G$

Théorème

La somme $F+G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F+G \subset E$ puisque tout élément h de $F+G$ s'écrit $h=f+g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F+G$
  En effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F + G$
  En effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$
  (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F + G$
  En effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$
  (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).
- Si u et v sont dans $E + F$ et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F + G$
  En effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$
  (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).
- Si u et v sont dans $E + F$ et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.

Théorème

La somme $F+G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F+G\subset E$ puisque tout élément h de $F+G$ s'écrit $h=f+g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F+G$
  En effet $0_E=0_E+0_E$ avec $0_E\in F$ et $0_E\in G$
  (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).
- Si u et v sont dans $E+F$ et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u=f_1+g_1$ et $v=f_2+g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $\lambda u+\mu v=(\lambda f_1+\mu f_2)+(\lambda g_1+\mu g_2)$.

Théorème

La somme $F+G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F+G \subset E$ puisque tout élément h de $F+G$ s'écrit $h=f+g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F+G$
  En effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$
  (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).
- Si u et v sont dans $E+F$ et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $\lambda u + \mu v = (\lambda f_1 + \mu f_2) + (\lambda g_1 + \mu g_2)$.
  Or F est un sous-espace vectoriel de E

Théorème

La somme $F+G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F+G\subset E$ puisque tout élément h de $F+G$ s'écrit $h=f+g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F+G$
  En effet $0_E=0_E+0_E$ avec $0_E\in F$ et $0_E\in G$
  (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).
- Si u et v sont dans $E+F$ et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u=f_1+g_1$ et $v=f_2+g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $\lambda u+\mu v=(\lambda f_1+\mu f_2)+(\lambda g_1+\mu g_2)$.
  Or F est un sous-espace vectoriel de E donc $\lambda f_1+\mu f_2\in F$.

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F + G$
  En effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$
  (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).
- Si u et v sont dans $E + F$ et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $\lambda u + \mu v = (\lambda f_1 + \mu f_2) + (\lambda g_1 + \mu g_2)$.
  Or F est un sous-espace vectoriel de E donc $\lambda f_1 + \mu f_2 \in F$.
  De même, $\lambda g_1 + \mu g_2 \in G$.

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F + G$
  En effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$
  (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).
- Si u et v sont dans $E + F$ et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $\lambda u + \mu v = (\lambda f_1 + \mu f_2) + (\lambda g_1 + \mu g_2)$.
  Or F est un sous-espace vectoriel de E donc $\lambda f_1 + \mu f_2 \in F$.
  De même, $\lambda g_1 + \mu g_2 \in G$. Ainsi $\lambda u + \mu v \in F + G$.

Théorème

La somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- $F + G \subset E$ puisque tout élément h de $F + G$ s'écrit $h = f + g$ avec f dans F (donc dans E) et g dans G (donc dans E), et que la somme de deux éléments de E est un élément de E.
- Le vecteur nul 0_E est dans $F + G$
  En effet $0_E = 0_E + 0_E$ avec $0_E \in F$ et $0_E \in G$
  (F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).
- Si u et v sont dans $E + F$ et si λ et μ sont des scalaires, on peut écrire $u = f_1 + g_1$ et $v = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $\lambda u + \mu v = (\lambda f_1 + \mu f_2) + (\lambda g_1 + \mu g_2)$.
  Or F est un sous-espace vectoriel de E donc $\lambda f_1 + \mu f_2 \in F$.
  De même, $\lambda g_1 + \mu g_2 \in G$. Ainsi $\lambda u + \mu v \in F + G$.

Donc $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$?
Solution

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E*.*
Que peut-on dire de la somme $\text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$?
Solution

On a
$u \in \text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E*.*
Que peut-on dire de la somme $\mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$?

Solution

On a
$u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$
$\iff \exists f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \mathrm{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$?
Solution

On a
$u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$
$\Longleftrightarrow \exists f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \mathrm{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Or, on sait que

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$?
Solution

On a
$u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$
$\Longleftrightarrow \exists f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \mathrm{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Or, on sait que
$f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2)$

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$?
Solution

On a
$u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$
$\iff \exists f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \mathrm{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Or, on sait que
$f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) \iff \exists (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$ *tel que* $f = a_1 u_1 + a_2 u_2$

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$?
Solution

On a
$u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$
$\iff \exists f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \mathrm{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Or, on sait que
$f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) \iff \exists (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$ *tel que* $f = a_1 u_1 + a_2 u_2$
et $g \in \mathrm{vect}(u_3)$

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$?
Solution

On a
$u \in \text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$
$\Longleftrightarrow \exists f \in \text{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \text{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Or, on sait que
$f \in \text{vect}(u_1, u_2) \iff \exists (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$ *tel que* $f = a_1 u_1 + a_2 u_2$
et $g \in \text{vect}(u_3) \iff \exists a_3 \in \mathbb{K}$ *tel que* $g = a_3 u_3$.

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$?

Solution

On a
$u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$
$\iff \exists f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \mathrm{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Or, on sait que
$f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) \iff \exists (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$ *tel que* $f = a_1 u_1 + a_2 u_2$
et $g \in \mathrm{vect}(u_3) \iff \exists a_3 \in \mathbb{K}$ *tel que* $g = a_3 u_3$.

On en déduit donc finalement que
$u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$?
Solution

On a
$u \in \text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$
$\iff \exists f \in \text{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \text{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Or, on sait que
$f \in \text{vect}(u_1, u_2) \iff \exists (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$ *tel que* $f = a_1 u_1 + a_2 u_2$
et $g \in \text{vect}(u_3) \iff \exists a_3 \in \mathbb{K}$ *tel que* $g = a_3 u_3$.

On en déduit donc finalement que
$u \in \text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$
$\iff \exists (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^3$ *tel que* $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$?

Solution

On a
$u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$
$\iff \exists f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \mathrm{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Or, on sait que
$f \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) \iff \exists (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$ *tel que* $f = a_1 u_1 + a_2 u_2$
et $g \in \mathrm{vect}(u_3) \iff \exists a_3 \in \mathbb{K}$ *tel que* $g = a_3 u_3$.

On en déduit donc finalement que
$u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) + \mathrm{vect}(u_3)$
$\iff \exists (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^3$ *tel que* $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$
$\iff u \in \mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3)$

Exemple

Soient u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de l'espace vectoriel* E.
Que peut-on dire de la somme $\text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$?
Solution

On a
$u \in \text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$
$\Longleftrightarrow \exists f \in \text{vect}(u_1, u_2), \exists g \in \text{vect}(u_3)$ *tels que* $u = f + g$

Or, on sait que
$f \in \text{vect}(u_1, u_2) \iff \exists (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$ *tel que* $f = a_1 u_1 + a_2 u_2$
et $g \in \text{vect}(u_3) \iff \exists a_3 \in \mathbb{K}$ *tel que* $g = a_3 u_3$.

On en déduit donc finalement que
$u \in \text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3)$
$\Longleftrightarrow \exists (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^3$ *tel que* $u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$
$\Longleftrightarrow u \in \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$

Ceci prouve que $\text{vect}(u_1, u_2) + \text{vect}(u_3) = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :
On dit que la somme $F+G$ est ***directe*** *si tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :
On dit que la somme $F+G$ est ***directe*** *si tout vecteur de $F+G$ se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Lorsque F et G sont en somme directe, on note $F+G=F\oplus G$.
Pratiquement, les sous-espaces vectoriels en somme directe sont caractérisés par le théorème suivant :

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E :
*On dit que la somme $F + G$ est **directe** si tout vecteur de $F + G$ se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Lorsque F et G sont en somme directe, on note $F + G = F \oplus G$.
Pratiquement, les sous-espaces vectoriels en somme directe sont caractérisés par le théorème suivant :

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :

$$F + G \text{ est directe } \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

Démonstration.

- **Supposons la somme $F + G$ directe.**

Démonstration.

- **Supposons la somme $F + G$ directe.**

Démonstration.

- **Supposons la somme $F + G$ directe.**
  - Soit $u \in F \cap G$.

Démonstration.

- **Supposons la somme $F + G$ directe.**
  - Soit $u \in F \cap G$.

Démonstration.

- **Supposons la somme $F+G$ directe.**
  - Soit $u \in F \cap G$.
    On peut alors écrire

$$u = 0_F + u = u + 0_G = f + g$$

avec $f \in F, u \in F$ et $g \in G, u \in G$

Démonstration.

- **Supposons la somme $F + G$ directe.**
  - Soit $u \in F \cap G$.
    On peut alors écrire
    $$u = 0_F + u = u + 0_G = f + g$$
    avec $f \in F, u \in F$ et $g \in G, u \in G$
    Puisque la somme $F + G$ est directe, la décomposition de u suivant F et G est unique et ainsi $f = u = 0_F = 0_E$.

Démonstration.

- **Supposons la somme $F + G$ directe.**
  - Soit $u \in F \cap G$.
    On peut alors écrire

$$u = 0_F + u = u + 0_G = f + g$$

avec $f \in F, u \in F$ et $g \in G, u \in G$
Puisque la somme $F + G$ est directe, la décomposition de u suivant F et G est unique et ainsi $f = u = 0_F = 0_E$.
Ceci prouve que le seul vecteur qu'on puisse trouver dans $F \cap G$ est le vecteur nul, c'est-à-dire que $F \cap G \subset \{0_E\}$.

Démonstration.

- **Supposons la somme $F + G$ directe.**
  - Soit $u \in F \cap G$.
    On peut alors écrire
    $$u = 0_F + u = u + 0_G = f + g$$
    avec $f \in F, u \in F$ et $g \in G, u \in G$
    Puisque la somme $F + G$ est directe, la décomposition de u suivant F et G est unique et ainsi $f = u = 0_F = 0_E$.
    Ceci prouve que le seul vecteur qu'on puisse trouver dans $F \cap G$ est le vecteur nul, c'est-à-dire que $F \cap G \subset \{0_E\}$.
  - Mais l'inclusion inverse
    $$\{0_E\} \subset F \cap G$$
    est vraie puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Démonstration.

- **Supposons la somme $F + G$ directe.**
  - Soit $u \in F \cap G$.
    On peut alors écrire
    $$u = 0_F + u = u + 0_G = f + g$$
    avec $f \in F, u \in F$ et $g \in G, u \in G$
    Puisque la somme $F + G$ est directe, la décomposition de u suivant F et G est unique et ainsi $f = u = 0_F = 0_E$.
    Ceci prouve que le seul vecteur qu'on puisse trouver dans $F \cap G$ est le vecteur nul, c'est-à-dire que $F \cap G \subset \{0_E\}$.
  - Mais l'inclusion inverse
    $$\{0_E\} \subset F \cap G$$
    est vraie puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Démonstration.

- **Supposons la somme $F + G$ directe.**
  - Soit $u \in F \cap G$.
    On peut alors écrire
    $$u = 0_F + u = u + 0_G = f + g$$
    avec $f \in F, u \in F$ et $g \in G, u \in G$
    Puisque la somme $F + G$ est directe, la décomposition de u suivant F et G est unique et ainsi $f = u = 0_F = 0_E$.
    Ceci prouve que le seul vecteur qu'on puisse trouver dans $F \cap G$ est le vecteur nul, c'est-à-dire que $F \cap G \subset \{0_E\}$.
  - Mais l'inclusion inverse
    $$\{0_E\} \subset F \cap G$$
    est vraie puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Démonstration.

- **Supposons la somme $F+G$ directe.**
  - Soit $u \in F \cap G$.
    On peut alors écrire
    $$u = 0_F + u = u + 0_G = f + g$$
    avec $f \in F, u \in F$ et $g \in G, u \in G$
    Puisque la somme $F+G$ est directe, la décomposition de u suivant F et G est unique et ainsi $f = u = 0_F = 0_E$.
    Ceci prouve que le seul vecteur qu'on puisse trouver dans $F \cap G$ est le vecteur nul, c'est-à-dire que $F \cap G \subset \{0_E\}$.
  - Mais l'inclusion inverse
    $$\{0_E\} \subset F \cap G$$
    est vraie puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration.

- **Réciproquement, supposons que** $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe.

Démonstration.

- **Réciproquement, supposons que** $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe.

Démonstration.

- **Réciproquement, supposons que** $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe.
  Supposons que l'on ait $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.

Démonstration.

- **Réciproquement, supposons que** $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe.
  Supposons que l'on ait $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$.

Démonstration.

- **Réciproquement, supposons que** $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe.
  Supposons que l'on ait $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$.
  Puisque $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, le vecteur $v = f_1 - f_2 = g_2 - g_1$ appartient à $F \cap G$.

Démonstration.

- **Réciproquement, supposons que** $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe.
  Supposons que l'on ait $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$.
  Puisque $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, le vecteur $v = f_1 - f_2 = g_2 - g_1$ appartient à $F \cap G$.
  Puisque $F \cap G = \{0_E\}$, on a donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 = 0_E$,

Démonstration.

- **Réciproquement, supposons que** $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe.
  Supposons que l'on ait $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$.
  Puisque $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, le vecteur $v = f_1 - f_2 = g_2 - g_1$ appartient à $F \cap G$.
  Puisque $F \cap G = \{0_E\}$, on a donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 = 0_E$, ce qui assure que $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$.

Démonstration.

- **Réciproquement, supposons que** $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que la somme $F + G$ est directe.
  Supposons que l'on ait $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ avec f_1 et f_2 dans F et g_1 et g_2 dans G.
  Alors $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$.
  Puisque $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$, le vecteur $v = f_1 - f_2 = g_2 - g_1$ appartient à $F \cap G$.
  Puisque $F \cap G = \{0_E\}$, on a donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 = 0_E$, ce qui assure que $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$.
  Ainsi, l'écriture de u comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique, ce qui signife que la somme $F + G$ est directe.

$\square$

Exemple

- *Deux droites sécantes du plan* $\mathbb{R}^2$ *ou de l'espace* $\mathbb{R}^3$ *sont en somme directe puisque leur intersection est réduite au vecteur nul.*

Exemple

- *Deux droites sécantes du plan* $\mathbb{R}^2$ *ou de l'espace* $\mathbb{R}^3$ *sont en somme directe puisque leur intersection est réduite au vecteur nul.*
- *Deux plans sécants de l'espace* $\mathbb{R}^3$ *ne peuvent être en somme directe puisque leur intersection est une droite et ne contient donc pas que le vecteur nul.*

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont ***supplémentaires*** *dans E si la somme $F+G$ est directe et si celle-ci vaut E.*
On a donc :

$$(F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E) \Leftrightarrow E = F \oplus G.$$

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont ***supplémentaires*** *dans E si la somme $F+G$ est directe et si celle-ci vaut E.*
On a donc :

$$(F \text{ et } G \text{ supplémentaires dans } E) \Leftrightarrow E = F \oplus G.$$

On dit aussi que G est un supplémentaire de F dans E.

La caractérisation des sous-espaces espaces vectoriels supplémentaires se traduit par le théorème suivant :

La caractérisation des sous-espaces espaces vectoriels supplémentaires se traduit par le théorème suivant :

Théorème

Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *F et G sont supplémentaires dans E.*

La caractérisation des sous-espaces espaces vectoriels supplémentaires se traduit par le théorème suivant :

Théorème

Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *F et G sont supplémentaires dans E.*
- *Pour tout $u \in E$ il existe un couple unique de vecteurs $f \in F$ et $g \in G$ et tels que $u = f + g$.*

La caractérisation des sous-espaces espaces vectoriels supplémentaires se traduit par le théorème suivant :

Théorème

Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *F et G sont supplémentaires dans E.*
- *Pour tout $u \in E$ il existe un couple unique de vecteurs $f \in F$ et $g \in G$ et tels que $u = f + g$.*
- $\dim F + \dim G = \dim E$ *et* $F \cap G = \{0_E\}$.

La caractérisation des sous-espaces espaces vectoriels supplémentaires se traduit par le théorème suivant :

Théorème

Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *F et G sont supplémentaires dans E.*
- *Pour tout $u \in E$ il existe un couple unique de vecteurs $f \in F$ et $g \in G$ et tels que $u = f + g$.*
- $\dim F + \dim G = \dim E$ *et* $F \cap G = \{0_E\}$.
- *Si B_F est une base de F et si B_G est une base de G alors $B = B_F \cup B_G$ est une base de E.*

Remarque

Remarque

Attention de ne pas confondre la notion d'espaces en somme directe avec la notion d'espaces supplémentaires dans un autre.

Remarque

Attention de ne pas confondre la notion d'espaces en somme directe avec la notion d'espaces supplémentaires dans un autre.
Par exemple, deux droites sécantes de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires dans le plan qui les contient, mais pas dans l'espace $\mathbb{R}^3$: en effet, leur somme est directe et vaut exactement le plan $P = D_1 \cup D_2$, et non l'espace tout entier.

Remarque

Remarque

Attention de ne pas confondre la notion d'espaces en somme directe avec la notion d'espaces supplémentaires dans un autre.

Par exemple, deux droites sécantes de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires dans le plan qui les contient, mais pas dans l'espace $\mathbb{R}^3$: en effet, leur somme est directe et vaut exactement le plan $P = D_1 \cup D_2$, et non l'espace tout entier.

Remarque

Un sous-espace possède plusieurs supplémentaires.

Remarque

Attention de ne pas confondre la notion d'espaces en somme directe avec la notion d'espaces supplémentaires dans un autre.
Par exemple, deux droites sécantes de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires dans le plan qui les contient, mais pas dans l'espace $\mathbb{R}^3$: en effet, leur somme est directe et vaut exactement le plan $P = D_1 \cup D_2$, et non l'espace tout entier.

Remarque

Un sous-espace possède plusieurs supplémentaires.
Par exemple, si D_1, D_2 et D_3 sont trois droites deux à deux sécantes en $\{(0,0)\}$ de $E = \mathbb{R}^2$, alors D_2 et D_3 sont chacune des supplémentaires de D_1 dans $\mathbb{R}^2$

Remarque
Attention de ne pas confondre la notion d'espaces en somme directe avec la notion d'espaces supplémentaires dans un autre.
Par exemple, deux droites sécantes de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires dans le plan qui les contient, mais pas dans l'espace $\mathbb{R}^3$: en effet, leur somme est directe et vaut exactement le plan $P = D_1 \cup D_2$, et non l'espace tout entier.

Remarque
Un sous-espace possède plusieurs supplémentaires.
Par exemple, si D_1, D_2 et D_3 sont trois droites deux à deux sécantes en $\{(0,0)\}$ de $E = \mathbb{R}^2$, alors D_2 et D_3 sont chacune des supplémentaires de D_1 dans $\mathbb{R}^2$ puisque $\dim D_1 + \dim D_2 = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ et $\dim D_1 + \dim D_3 = \dim \mathbb{R}^2$ et $D_1 \cap D_2 = D_1 \cap D_3 = \{(0,0)\}$.

Remarque

Attention de ne pas confondre la notion d'espaces en somme directe avec la notion d'espaces supplémentaires dans un autre.

Par exemple, deux droites sécantes de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires dans le plan qui les contient, mais pas dans l'espace $\mathbb{R}^3$: en effet, leur somme est directe et vaut exactement le plan $P = D_1 \cup D_2$, et non l'espace tout entier.

Remarque

Un sous-espace possède plusieurs supplémentaires.

Par exemple, si D_1, D_2 et D_3 sont trois droites deux à deux sécantes en $\{(0,0)\}$ de $E = \mathbb{R}^2$, alors D_2 et D_3 sont chacune des supplémentaires de D_1 dans $\mathbb{R}^2$ puisque $\dim D_1 + \dim D_2 = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ et $\dim D_1 + \dim D_3 = \dim \mathbb{R}^2$ et $D_1 \cap D_2 = D_1 \cap D_3 = \{(0,0)\}$.

Donc D_1 admet deux supplémentaire distincts.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$.
On demande de vérifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ *et* $G = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ *sont supplémentaires dans* E.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$.
On demande de vérifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ *et* $G = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ *sont supplémentaires dans* E.

Solution

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$.
On demande de vérifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ *et* $G = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ *sont supplémentaires dans* E.

Solution

On montre d'abord que $F = \mathrm{vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$.
On demande de vérifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ *et* $G = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ *sont supplémentaires dans* E.

Solution

On montre d'abord que $F = \text{vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$. F *est donc un plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et aussi un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$.
On demande de vérifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ *et* $G = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ *sont supplémentaires dans* E.

Solution

On montre d'abord que $F = \mathrm{vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$. F *est donc un plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et aussi un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
De même $G = vect((1, 1, 1))$ *est une droite vectorielle de* $\mathbb{R}^3$ *est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^3$.
On demande de vérifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ *et* $G = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ *sont supplémentaires dans* E.

Solution

On montre d'abord que $F = \text{vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$. F *est donc un plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et aussi un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.
De même $G = vect((1, 1, 1))$ *est une droite vectorielle de* $\mathbb{R}^3$ *est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.

Une méthode pour montrer que F *et* G *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$ *est de vérifier que tout vecteur* $u = (x_1, x_2, x_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur* $f = (f_1, f_2, f_3)$ *de* F *et d'un vecteur* $g = (g_1, g_2, g_3)$ *de* G.

Exemple

Nous résolvons l'équation $u = f + g$*, d'inconnues* f *et* g *et montrons qu'elle admet une solution unique.*

Exemple

Nous résolvons l'équation $u = f + g$, *d'inconnues* f *et* g *et montrons qu'elle admet une solution unique.*
Or, $f \in F \iff f_2 = f_1 + f_3 \iff f = (f_1, f_1 + f_3, f_3)$.

Exemple

Nous résolvons l'équation $u = f + g$*, d'inconnues* f *et* g *et montrons qu'elle admet une solution unique.*
Or, $f \in F \iff f_2 = f_1 + f_3 \iff f = (f_1, f_1 + f_3, f_3)$.
De même $g \in G \iff g = (g_1, g_1, g_1)$.
On a donc :

$x = f{+}g \iff$

Exemple

Nous résolvons l'équation $u = f + g$, d'inconnues f et g et montrons qu'elle admet une solution unique.
Or, $f \in F \iff f_2 = f_1 + f_3 \iff f = (f_1, f_1 + f_3, f_3)$.
De même $g \in G \iff g = (g_1, g_1, g_1)$.
On a donc :

$$x = f + g \iff \begin{cases} f_1 + g_1 = x_1 \\ f_1 + g_1 + f_3 = x_2 \\ f_3 + g_1 = x_3 \end{cases} \iff$$

Exemple

Nous résolvons l'équation $u = f + g$, d'inconnues f et g et montrons qu'elle admet une solution unique.
Or, $f \in F \iff f_2 = f_1 + f_3 \iff f = (f_1, f_1 + f_3, f_3)$.
De même $g \in G \iff g = (g_1, g_1, g_1)$.
On a donc :

$$x = f + g \iff \begin{cases} f_1 + g_1 = x_1 \\ f_1 + g_1 + f_3 = x_2 \\ f_3 + g_1 = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} f_1 + g_1 = x_1 \\ f_3 = x_2 - x_1 \\ g_1 = x_3 - f_3 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

Exemple

Nous résolvons l'équation $u = f + g$, d'inconnues f et g et montrons qu'elle admet une solution unique.
Or, $f \in F \iff f_2 = f_1 + f_3 \iff f = (f_1, f_1 + f_3, f_3)$.
De même $g \in G \iff g = (g_1, g_1, g_1)$.
On a donc :

$$x = f + g \iff \left\{ \begin{array}{l} f_1 + g_1 = x_1 \\ f_1 + g_1 + f_3 = x_2 \\ f_3 + g_1 = x_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} f_1 + g_1 = x_1 \\ f_3 = x_2 - x_1 \\ g_1 = x_3 - f_3 = x_1 - x_2 + x_3 \end{array} \right.$$

On voit donc que ce système admet une unique solution donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = x_1 - g_1 = x_2 - x_3 \\ f_3 = x_2 - x_1 \\ g_1 = x_1 - x_2 + x_3 \end{array} \right.$$

Ceci signifie donc que les vecteurs f et g recherchés existent et qu'ils sont uniques. On a bien prouvé que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exemple

On aurait également pu montrer que les trois vecteurs $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ sont libres.

Exemple

On aurait également pu montrer que les trois vecteurs $u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1)$ *et* $u_3 = (1, 1, 1)$ *sont libres.*
On remarque en effet que $u_3 - u_2 = (1, 0, 0)$*,* $u_3 - u_1 = (0, 0, 1)$ *et* $u_1 + y_2 - u_3 = (0, 1, 0)$

Exemple

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Vérifier que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *est paire et* $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *est impaire* $\}$
sont supplémentaires dans E.
Solution

Exemple

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Vérifier que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *est paire et* $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *est impaire* $\}$
sont supplémentaires dans E.
Solution
On a déjà vu que F *est un sous-espace vectoriel de* E

Exemple

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Vérifier que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *est paire et* $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *est impaire* $\}$ *sont supplémentaires dans* E.

Solution

On a déjà vu que F *est un sous-espace vectoriel de* E *On prouve de même que* G *est un sous-espace vectoriel de* E.

Exemple

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Vérifier que $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *est paire et* $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ *est impaire* $\}$ *sont supplémentaires dans* E*.*

Solution

On a déjà vu que F *est un sous-espace vectoriel de* E *On prouve de même que* G *est un sous-espace vectoriel de* E*. Il nous reste à vérifier que tout élément de* E *se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de* F *et d'un élément de* G*, ce qui revient à prouver que toute fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *peut s'écrire d'une seule façon comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Exemple

Nous allons ici procéder à l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse.

Exemple

Nous allons ici procéder à l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse.
Analyse du problème *: Supposons que l'on puisse écrire $f = p + i$ avec p paire et i impaire, et essayons d'exprimer p et i en fonction de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'abord $f(x) = p(x) + i(x)$.*

Exemple

Nous allons ici procéder à l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse.

Analyse du problème *: Supposons que l'on puisse écrire* $f = p + i$ *avec* p *paire et* i *impaire, et essayons d'exprimer* p *et* i *en fonction de* f*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a d'abord* $f(x) = p(x) + i(x)$*. Puisque* $p(-x) = p(x)$ *et* $i(-x) = -i(x)$ *on a aussi, pour tout réel* x*, on a*
$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$.

Exemple

Nous allons ici procéder à l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse.

***Analyse du problème** : Supposons que l'on puisse écrire* $f = p + i$ *avec* p *paire et* i *impaire, et essayons d'exprimer* p *et* i *en fonction de* f*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a d'abord* $f(x) = p(x) + i(x)$*. Puisque* $p(-x) = p(x)$ *et* $i(-x) = -i(x)$ *on a aussi, pour tout réel* x*, on a* $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$*.*
En ajoutant et soustrayant membre à membre $f(x)$ *et* $f(-x)$*, il vient*

$$p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \qquad\qquad i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Exemple

Nous allons ici procéder à l'aide d'un raisonnement par analyse et synthèse.
Analyse du problème *: Supposons que l'on puisse écrire $f = p + i$ avec p paire et i impaire, et essayons d'exprimer p et i en fonction de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'abord $f(x) = p(x) + i(x)$. Puisque $p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$ on a aussi, pour tout réel x, on a $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$.*
En ajoutant et soustrayant membre à membre $f(x)$ et $f(-x)$, il vient

$$p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \qquad\qquad i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Cette analyse du problème nous permet donc de conclure que, si la décomposition de f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est possible, alors celle-ci est unique puisqu'on a trouvé une seule valeur posible de $p(x)$ et de $i(x)$: Il nous reste simplement à vérifier que les fonctions données répondent bien aux exigences du problème posé, c'est-à-dire que p est paire, que i est impaire et que $p + i = f$:

Exemple

Synthèse du problème *:*
Partant de f *fonction quelconque de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soient* p *et* i *définies par :*

$$p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \qquad i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

On a bien $p(x) + i(x) = f(x)$, *c'est-à-dire* $f = p + i$. *De plus, on a* $p(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = p(x)$, *donc* p *est paire. On vérifie de même que* i *est impaire. Ainsi,* F *et* G *sont supplémentaires dans* E.

Proposition

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie admet un supplémentaire.

Proposition

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie admet un supplémentaire.

Théorème (Formule de Grassmann)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier, F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim(F+G) = \dim(F) + dim(G)$.