Algèbre-Premier semestre 2021

Algèbre-Premier semestre 2021

Thèmes

- Logique et raisonnement
- Ensembles
- Relations binaires
- Applications
- Nombres complexes
- Polynômes
- Fractions rationnelles

Ensembles

- Introduction à la théorie des ensembles :
  - Définition et exemples.
  - Inclusion, Égalité.
  - Ensemble des parties
- Opération sur les ensembles :
  - Intersection, Union.
  - Différence, Complémentaire.
  - Partition d'un ensemble.
  - Produit Cartésien.

Ensembles

Définition (Ensemble)

Un **ensemble** *E est une* **collection** *ou un groupement d'objets distincts. Les objets x de E s'appellent* **les éléments** *de E.*

- *Si E est un ensemble et si x est un élément de E, on dit que x appartient à E ou que x est dans E et on écrit*

$$x \in E.$$

- *Dans le cas contraire, si x n'est pas un élément de E, on dit que x n'appartient pas à E ou que x n'est pas dans E et on écrit*

$$x \notin E.$$

Remarque :

- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément. C'est **l'ensemble vide** noté $\emptyset$.
- Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément est appelé **singleton**.

Ensembles

Pour définir un ensemble, on peut le décrire :

- Par **extension :** en donnant la liste complète explicite de tous ses éléments. On note cette liste entre accolades, l'ordre des éléments listés n'ayant aucune importance.

  Exemple :

  - $\{1\}$, $\{1,4\}$, $\{1,4,9\}$ et
  $$\{1,4,9,11\} = \{9,4,11,1\}.$$
  - $2\mathbb{N} = \{0,2,4,\cdots\}$: L'ensemble des entiers naturels pairs.
  - $2\mathbb{N}+1 = \{1,3,5,\cdots\}$: L'ensemble des entiers naturels impairs.

Ensembles

- Par **compréhension** : en donnant une propriété P que ses éléments vérifient et sont seuls à vérifier. On note

$$\{x \in E \ : \ P(x)\} \quad \text{ou} \quad \{x \in E \mid P(x)\}$$

l'ensemble des éléments de E qui vérifient P.

Exemple :

- $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$: L'ensemble des entiers naturels pairs.
- $2\mathbb{N} + 1 = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k + 1\}$: L'ensemble des entiers naturels impairs.
- $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}^*, x = \dfrac{p}{q}\right\}$: L'ensemble des rationnels.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\}$: l'intervalle semi-ouvert à droite.

Ensembles

Définition (Inclusion)

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** *dans F , ou que F contient E, ou que E est une partie de F, ce qu'on note*

$$E \subset F$$

si tout élément de E est élément de F, c'est-à-dire

$$\forall x, \quad (x \in E \implies x \in F)$$

Exemple :

- On a la suite d'inclusions
$$\{1\} \subset \{1, 4\} \subset \{1, 4, 9\} \subset \{1, 4, 9, 11\}.$$
- On a
$$2\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 2\mathbb{N} + 1 \subset \mathbb{N}.$$
- On a la suite d'inclusions
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$
- On a
$$[a, b[\quad \subset \quad \mathbb{R}.$$

Ensembles

Attention ! : Ne pas confondre appartenance et inclusion.

- On a bien
$$0 \in \mathbb{N}$$
mais
$$0 \not\subset \mathbb{N}.$$
Néanmoins
$$\{0\} \subset \mathbb{N}.$$
Un élément appartient à un ensemble.
Par rapport à $\mathbb{N}$, 0 est donc une bille dans un sac et non un sac dans un sac.
- On a bien
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$
mais
$$\mathbb{N} \notin \mathbb{Z}.$$
Un ensemble est contenu dans un ensemble.
Par rapport à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ est donc un sac dans un sac et non une bille dans un sac.

Ensembles

Quand on veut montrer une inclusion :

$$E \subset F,$$

on écrit **sans réfléchir :**

$$\text{Soit } x \in E. \text{ Montrons que } x \in F \text{ est vraie.}$$

$$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right\} \text{ Preuve que } x \in F.$$

Exemple : Montrer que

$$\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}_+,\ x \geq y\} \subset \mathbb{R}_+.$$

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $x \geq y$. Montrons que $x \in \mathbb{R}_+$. Or $y \geq 0$ par hypothèse et $x \geq y$, donc

$$x \geq 0.$$

Ainsi, $\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}_+,\ x \geq y\} \subset \mathbb{R}_+$.

Ensembles

Exemple :
Montrer que

$$E = \{k(k+1) : k \in \mathbb{N}\} \subset 2\mathbb{N}.$$

Preuve : Soit $n \in E$, alors

$$n = k(k+1) \quad \text{pour un certain } k \in \mathbb{N}.$$

Montrons que $n \in 2\mathbb{N}$. On peut affirmer que k est pair ou impair, et si k est impair alors $k+1$ est pair.Dans tous les cas

$$k \quad \text{ou} \quad k+1 \quad \text{est pair.}$$

Par produit, $n = k(k+1)$ l'est aussi, donc $n \in 2\mathbb{N}$.

À faire chez soi :

- Soit E l'ensemble des entiers naturels multiples de 6 et F l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que $E \subset F$.
- Soit $E = [2,3]$ et $F = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 10 < 0\}$. Montrer que $E \subset F$.

Ensembles

Définition (Égalité)

Soient E et F deux ensembles. Les ensembles E et F sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments, i.e. si :

$$\forall x, \quad (x \in E \iff x \in F).$$

Exemples :

- Nous avons
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x - 10 < 0\} \; =]-2, 5[.$$
- Nous avons
$$\{0, 1\} \; = \; \{n \in \mathbb{N} : n^2 = n\}.$$

Théorème

Soient E et F deux ensembles. Alors :

$$E = F \quad \text{si et seulement si} \quad E \subset F \;\; \text{et} \;\; F \subset E.$$

Ensembles

Pour montrer une égalité d'ensembles :

$$E = F,$$

on a deux possibilités :

- Soit on raisonne par double inclusion :
  En montrant d'abord $E \subset F$:

$$\text{Soit } x \in E. \text{ Montrons que } x \in F \text{ est vraie.}$$
$$\left.\vdots \quad\quad\right\} \text{Preuve que } x \in F.$$

  Puis, en montrant $F \subset E$:

$$\text{Soit } x \in F. \text{ Montrons que } x \in E \text{ est vraie.}$$
$$\left.\vdots \quad\quad\right\} \text{Preuve que } x \in E.$$

- Soit on raisonne directement par équivalence :

$$\forall x : \quad x \in E \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow x \in F.$$

Ensembles

Exemple : Montrer que

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad x \leq y\}.$$

Preuve : On raisonne par double inclusion

- Montrons
$$\mathbb{R}_- \subset \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad x \leq y\}.$$
Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Nous devons montrer que $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $x \leq y$ soit $y \in \mathbb{R}_+$ on a $y \geq 0$ mais par hypothèse $x \leq 0$. Donc
$$x \leq 0 \leq y \text{ et } x \leq y$$

- Montrons
$$\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad x \leq y\} \subset \mathbb{R}_-.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y$. Alors en particulier, pour $y = 0$ on a $x \leq 0$. C'est-à-dire $x \in \mathbb{R}_-$.

Ensembles

Définition (Ensemble des parties d'un ensemble)

Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E

$$\mathscr{P}(E) = \{A : A \subset E\}.$$

Remarque : Pour tout ensemble A :

$A \in \mathscr{P}(E) \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset E$. i.e. la notation $A \subset E$ a la même signification que la notation $A \in P(E)$.

$a \in E \Longleftrightarrow \{a\} \subset E \Longleftrightarrow \{a\} \in \mathscr{P}(E)$.

$\emptyset \in \mathscr{P}(E) \quad$ et $\quad E \in \mathscr{P}(E)$.

Exemple : Déterminer l'ensemble des parties de E lorsque $E = \{a, b\}$

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Ensembles

Exemple : Déterminer l'ensemble des parties de E lorsque $E = \{a, b, c\}$:

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Opérations sur les ensembles

Étudions certaines opérations sur les ensembles.

Définition (Intersection)

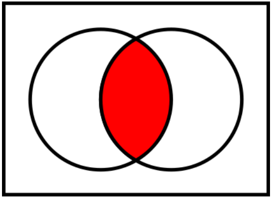
Soit E un ensemble, et soient A et B deux sous-ensembles de E.

- **L'intersection** *de A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, défini par :*

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}.$$

En d'autres termes, l'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

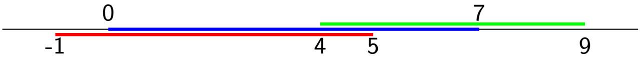
Diagramme de Venn :



Opérations sur les ensembles

Exemple :

- $\{1,4,7\} \cap \{3,5,7,11\} = \{7\}$.
- $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.
- $([-1,5] \cap\,]0,7[) \cap\,]4,9[\; = \,]0,5] \cap\,]4,9[\, = \,]4,5]$.



- On a

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} = \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

- $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.
- $2\mathbb{N} \cap (2\mathbb{N}+1) = \emptyset$.

Opérations sur les ensembles

Définition (Ensembles disjoints)

Soient A et B deux ensembles. On dit que A et B sont **disjoints** *si*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Autrement dit si A et B n'ont aucun élément commun.

Opérations sur les ensembles

Définition (Union)

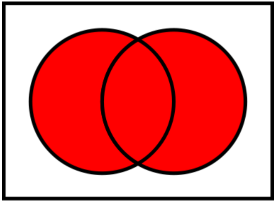
Soit E un ensemble, et soient A et B deux sous-ensembles de E.

- **L'union** *de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, défini par :*

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \quad \textit{ou} \quad x \in B\}.$$

En d'autres termes, l'union de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B. Le "ou" utilisé ici est inclusif : x est un élément de A ou un élément de B ou un élément de A et de B.

Diagramme de Venn :



Opérations sur les ensembles

Exemple :

- $\{3, 4, 7, 9\} \cup \{2, 7, 9, 10, 21, 84\} = \{2, 3, 4, 7, 9, 10, 21, 84\}$.
- $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.
- $\{1, -1\} \cup]1, -1[= [-1, 1]$.

Remarque :

- Si $A \subset B$. Alors
$$A \cap B = A \quad \text{et} \quad A \cup B = B.$$
- Soient A et B deux ensembles. Alors on a toujours les inclusions suivantes :
$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

Opérations sur les ensembles

Remarque : L'union et l'intersection se généralisent facilement au cas de plus de deux ensembles : Soit E un ensemble, et considérons

$$\{A_i : i \in I\}$$

une famille de sous-ensembles de E, cela veut dire que I est un ensemble (on l'appelle ensemble d'indices), et que

$$\forall i \in I, \quad A_i \text{ est un sous-ensemble de } E.$$

- **Union :**
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E : \exists i \in I,\ x \in A_i\}.$$
i.e. l'ensemble des objets qui appartiennent à l'un des A_i.
- **Intersection :**
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E : \forall i \in I,\ x \in A_i\}.$$
i.e. l'ensemble des objets qui appartiennent à tous les A_i.

Opérations sur les ensembles

L'union et l'intersection satisfont les propriétés suivantes.

Théorème

Soit E un ensemble, et considérons trois sous-ensembles A, B, C de E.

- *L'intersection et l'union sont* **commutatives** *:*

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

- *L'intersection et l'union sont* **associatives** *:*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C.$$

- *Pour tout sous-ensemble A de E on a*

$$A \cap E = A.$$

- *Pour tout sous-ensemble A de E on a*

$$A \cup \emptyset = A.$$

Opérations sur les ensembles

Théorème

Soit E un ensemble, et considérons trois sous-ensembles A, B, C de E.

- *L'intersection et la réunion sont* **distributives** *l'une par rapport à l'autre :*

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Démonstration.

Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. On a :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ et } B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } C) \\ &\iff (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C) \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

On montre de même l'égalité $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\square$

Opérations sur les ensembles

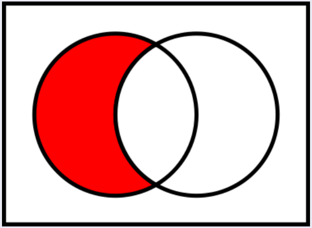
Définition (Différence)

Soit E un ensemble, et soient A et B deux sous-ensembles de E.

- *La* **différence** *de A avec B, noté $A \setminus B$, est l'ensemble de tous les éléments de A qui ne sont pas dans B.*

$$A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Diagramme de Venn :



Opérations sur les ensembles

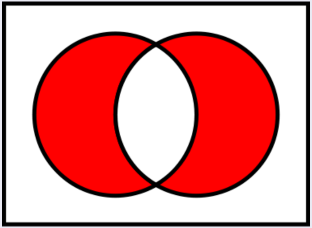
Définition (Différence Symétrique)

Soit E un ensemble, et soient A et B deux sous-ensembles de E.

- *La* **différence symétrique** *de A avec B, noté $A\Delta B$, est l'ensemble des élements qui sont dans un et un seul des 2 ensembles A et B.*

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Diagramme de Venn :



Opérations sur les ensembles

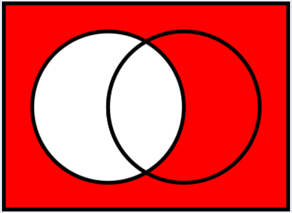
Définition (Complément)

Soient E un ensemble et A une partie de E.

- *Le* **complémentaire** *de A dans E est l'ensemble, noté C_A^E, de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A.*

$$C_A^E = \{x : x \in E \text{ et } x \notin A\} = E \setminus A.$$

Diagramme de Venn :



Remarque : S'il n'y a pas d'ambigüité sur l'ensemble E, on privilégiera la notation A^c pour C_A^E.

Opérations sur les ensembles

La différence et le complémentaire satisfont les propriétés suivantes.

Théorème

Soient A et B deux parties de E.

1. $(A^c)^c = A \quad et \quad \emptyset^c = E \quad et \quad E^c = \emptyset.$
2. *Si $A \subset B$, alors $B^c \subset A^c$.*
3. **Lois de Morgan :**

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad et \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Démonstration.

1. Par définition

$$x \in A^c \iff x \notin A.$$

Il en résulte donc par négation :

$$x \in (A^c)^c \iff x \notin A^c \iff x \in A.$$

□

Opérations sur les ensembles

Démonstration.

2. Supposons que $A \subset B$. Alors par définition

$$x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

Cette proposition est équivalente à sa contraposée :

$$x \notin B \Longrightarrow x \notin A,$$

qui est équivalente à

$$x \in B^c \Longrightarrow x \in A^c.$$

On a ainsi montré que si $A \subset B$, alors $B^c \subset A^c$.

□

Opérations sur les ensembles

Démonstration.

3. Montrons $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. On a, par définition,

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \text{ et } (x \in B).$$

Il en résulte par négation

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c \iff x \notin A \cap B & \iff (x \notin A) \text{ ou } (x \notin B) \\ & \iff (x \in A^c) \text{ ou } (x \in B^c), \end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$x \in (A \cap B)^c \iff x \in A^c \cup B^c.$$

Pour montrer $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
on pose $C = A^c$, $D = B^c$. D'après la première égalité :

$$(C \cap D)^c = C^c \cup D^c \iff C \cap D = (C^c \cup D^c)^c .$$

D'où en remplaçant

$$A^c \cap B^c = ((A^c)^c \cup (B^c)^c)^c = (A \cup B)^c.$$

□

Partition d'un ensemble

Définition (Partition)

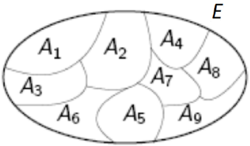
Une **partition d'un ensemble** E *est un ensemble*

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$$

constitué de parties de E *vérifiant :*

- *Pour tout* $k \in \{1, \cdots, n\}$, $A_k \neq \emptyset$, *i.e.* **aucun** A_k **ne doit être vide**
- $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$, *i.e.* **la réunion des** A_k **est égale à** E.
- *Pour tout couple* A_i, A_j *avec* $A_i \neq A_j$ *on a* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *i.e. les* A_i *sont* **deux à deux disjoints**.

Diagramme de Venn :



Partition d'un ensemble

Exemples :

- L'ensemble $\{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1\}$ définit une partition de $\mathbb{N}$.
- L'ensemble $\{\mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$ définit une partition de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\left\{\left[0, \frac{1}{2}\right], \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \left]\frac{3}{2}, 2\right]\right\}$ définit une partition de $[0, 2]$.
- L'ensemble $\{2\mathbb{N}, 3\mathbb{N}\}$ n'est pas une partition de $\mathbb{N}$.

Exercice : Donner toutes les partitions de l'ensemble

$$E = \{a, b, c\}.$$

Solution :

- $P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$
- $P_{2a} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ et $P_{2b} = \{\{b\}, \{a, c\}\}$ et $P_{2c} = \{\{a, b\}, \{c\}\}$.
- $P_3 = \{\{a, b, c\}\} = \{E\}$

Produit Cartésien

Définition

Soient A et B deux parties de E. Le **produit cartésien** *de A et B est l'ensemble, noté*

$$A \times B,$$

constitué de tous les couples (x, y) où

$$x \in A \quad \text{et} \quad y \in B.$$

On a donc :

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Exemple : Soit $A = \{a, b\}$ et $B = \{1, 2\}$, alors

$$A \times B \; = \; \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

Produit Cartésien

Exemple :

- Avec
$$C = \{1, 2\} \qquad \text{et} \qquad D = \{1, 2, 3\}$$
on a
$$C \times D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Remarque : On ne confond pas les couples (a, b) et (b, a) qui désignent **deux objets différents**, alors que $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ désignent le **même ensemble**.

L'exemple montre que le premier et le deuxième terme du couple n'appartiennent pas au même ensemble.

Produit Cartésien

Remarque :

- La définition précédente se généralise. Soient n un entier supérieur ou égale à 2 et

  $$A_1,\ A_2, \cdots,\ A_n \quad \text{une famille de n sous-ensembles de } E.$$

  Alors le produit cartésien de $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ est l'ensemble défini par

  $$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \Big\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) :\ \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ x_i \in A_i\Big\}.$$

  L'élement $(x_1, x_2,\ \cdots\ , x_n)$ est appelé un n-tuple de composants x_1, x_2, $\cdots$, x_n.

- Lorsque $A = B$, on note

  $$A \times A = A^2.$$

  et on généralise cette notation pour l'ensemble

  $$A^n = A \times A \times \cdots \times A.$$

  (produit cartésien de n facteurs égaux à A).

Produit Cartésien

Le produit cartésien satisfait les propriétés suivantes.

Proposition

Soient A, B, C, D des parties d'un ensemble E.

- $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.
- $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

Démonstration.

On montre le premier point

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times C) \cup (A \times D) &\iff (x,y) \in A \times C \text{ ou } (x,y) \in A \times D \\
&\iff (x \in A \text{ et } y \in C) \text{ ou } (x \in A \text{ et } y \in D) \\
&\iff x \in A \text{ et } (y \in C \text{ ou } y \in D) \\
&\iff (x,y) \in A \times (C \cup D).
\end{aligned}$$

Le deuxième point se montre de la même façon (remplacer "et" par "ou") $\square$

Cardinal d'un ensemble fini

Définition

On dit qu'un ensemble fini E est de cardinal (ou taille) $n \in \mathbb{N}$ s'il a n éléments.

Proposition

Le cardinal d'un ensemble fini est unique.

Définition

Pour ensemble tout ensemble fini E de cardinal n, on note

$$Card(E) = \#(E) = |E|$$

Cardinal d'un ensemble

Proposition

Pour deux ensembles A et B finis.

- $A \subset B \Rightarrow \ card(A) \leq card(B) \quad \not\Leftarrow$
- $A \subset B$ *et* $card(A) = card(B) \Leftrightarrow A = B$
- $card(A \cup B) + card(A \cap B) = card(A) + card(B)$

Remarque : Cela revient aux formules

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$$

ou

$$\mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cup B)$$

Cardinal d'un ensemble fini

Proposition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

$$card(\mathscr{P}(E)) = 2^n$$

Exemple

$$A = \{a, b, c, \}$$

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

On a bien

$$\text{card}(\mathscr{P}(A)) = 2^3$$

Cardinal d'un ensemble

Proposition

Soient E et F deux ensembles finis,

$$card(E \times F) = card(E) \times card(F)$$

Fonction caractéristique d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E.
La fonction caractérstique de A, notée $\mathbb{1}_A$ est la fonction définie sur E dans $\{0,1\}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : & E \to & \{0;1\} \\ & x \to & \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.

- $A = \{x \in E, \mathbb{1}_A(x) = 1\}$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$