Algèbre-Premier semestre 2021

Algèbre-Premier semestre 2021

Thèmes

- Logique et raisonnement
- Ensembles
- Relations binaires
- Applications
- Nombres complexes
- Polynômes
- Fractions rationnelles

Relations Binaires

Définition

Soient E et F deux ensembles. On appelle **relation** $\mathscr{R}$ *de E sur F la donnée d'une partie*

$$R \subset E \times F.$$

- *La partie R est appelé le graphe de la relation $\mathscr{R}$.*
- *On dit qu'un élément $x \in E$ est* **en relation avec** *un élément $y \in F$ si*

$$(x, y) \in R.$$

- *On exprime cette situation en écrivant $x\mathscr{R}y$. C'est-à-dire*

$$x\mathscr{R}y \Longleftrightarrow (x, y) \in R.$$

Finalement, si $E = F$ la relation $\mathscr{R}$ est appelée **relation binaire**.

Relations Binaires

Exemple :

- La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties de E

$$A \mathscr{R} B \iff A \subset B.$$

Ici donc
$$R = \{(A, B) \in P(E) \times P(E) \ : \ A \subset B\}.$$

- Sur tout ensemble E, on peut définir la relation égalité

$$x \mathscr{R} y \iff x = y.$$

Ici donc
$$R = \{(a, b) \in E \times E \ : \ a = b\}.$$

- Les relations $\leq$ et $<$ sur $\mathbb{R}$, sont aussi des relations binaires.

La relation de divisibilité sur les entiers relatifs

$$m\mathscr{R}n \Longleftrightarrow m|n \quad (m \text{ divise } n).$$

Ici donc

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ m|n \in \mathbb{Z}\}.$$

Cas particulier : si $A = \{1;2;3;4\}$ et $\{(m,n) \in A \times A \ : \ m|n \in \mathbb{Z}\}$.

m^n	1	2	3	4
1	R	R	R	R
2		R		R
3			R	
4				R

Remarque : Parce que le couple (x,y) n'est pas égal au couple (y,x), la relation $x\mathscr{R}y$ peut être vraie sans que la relation $y\mathscr{R}x$ le soit.

Relations Binaires

Relations Binaires

Etudions certaines propriétés éventuelles des relations binaires.

Définition

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- *On dit que $\mathscr{R}$ est* **réflexive** *si :*

$$\forall x \in E, \quad x \mathscr{R} x$$

- *On dit que $\mathscr{R}$ est* **transitive** *si :*

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \quad x \mathscr{R} y \quad \text{et} \quad y \mathscr{R} z \Longrightarrow x \mathscr{R} z$$

Examples :

- $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive mais $<$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas réflexive.
- $\neq$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas réflexive, n'est pas transitive.

Relations Binaires

Définition

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- *On dit que $\mathscr{R}$ est* **symétrique** *si :*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E, \quad x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$$

- *On dit que $\mathscr{R}$ est* **antisymétrique** *si :*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E, \quad x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x \Longrightarrow x = y.$$

Remarque : L'antisymetrie n'est pas le contraire de la symétrie. Par exemple, la relation **égalité** possède les deux propriétés.

Relations Binaires

Exemple :

- La relation d'égalité " $=$ " sur E est réflexive, transitive, symétrique et antisymétrique.
- La relation d'inclusion $\subset$ sur $P(E)$ est réflexive, transitive et antisymétrique.
- La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique. Elle n'est pas symétrique car par exemple : $2 \leq 5$ mais : $5 \nleq 2$.
- La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est transitive et antisymétrique, mais elle n'est ni réflexive, ni symétrique.
- La relation $|$ de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive, mais elle n'est ni symétrique, ni antisymétrique car par exemple : $5| - 5$ et $-5|5$ mais $5 \neq -5$.

Nous allons étudier deux importants types des relations binaires : **Les relations d'equivalence** et **les relations d'ordre**.
Commençons par étudier les relations d'equivalence.

Relation d'équivalence

Définition

On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une relation **d'équivalence** *si $\mathscr{R}$ est à la fois réflexive, transitive et symétrique.*

Pour $a \in E$, l'ensemble des éléments $x \in E$ en relation avec a est appelé la **classe d'équivalence** *de a, notée*

$$cl(a) \quad ou \quad [a] \quad ou \quad \bar{a}.$$

C'est-à-dire

$$cl(a) = \{x \in E : \ a\mathscr{R}x\}.$$

Exemple : Soit n un entier naturel. La relation sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$a\mathscr{R}b \iff n \ \text{divise} \ a - b$$

est une relation d'équivalence.
Si $a\mathscr{R}b$ on dit que a et b sont congrus modulo n.

Relation d'équivalence

Proposition (Partition d'un ensemble en classes d'équivalence)

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Alors les classes d'équivalences forment une partition de E, c'est-à-dire que

- *toute classe d'équivalence est non vide :* $\forall x \in E, \quad cl(x) \neq \emptyset,$
- *deux classes d'équivalence sont soit disjointes soit égales :*

$$\forall x,\ y \in E \quad \text{tel que} \quad cl(x) \neq cl(y) \quad \text{on a} \quad cl(x) \cap cl(y) = \emptyset,$$

- *la réunion des classes d'équivalence est égale à E :*

$$E = \bigcup_{x \in E} cl(x).$$

- $E = \bigcup_{x\in E} cl(x)$?
  - L'inclusion $\bigcup_{x\in E} cl(x) \subset E$ est évidente ;
  - Soit $x \in E$ alors $x \in cl(x)$ donc $x \in \bigcup_{x\in E} cl(x)$
- $\forall x \in E, cl(x) \neq \emptyset$?
  On a $x \in cl(x)$ donc $cl(x) \neq \emptyset$
- $\forall (x,y) \in E^2, cl(x) \neq cl(y) \Longrightarrow cl(x) \cap cl(y) = \emptyset$?
  On montre la contraposée :
  Supposons $cl(x) \cap cl(y) \neq \emptyset$.
  On choisit $z \in cl(x) \cap cl(y)$ (il existe !).

  Alors $z\mathscr{R}x$ et $z\mathscr{R}y$ et par transitivité, $x\mathscr{R}y$.

  Par transitivité encore, tous les éléments de $cl(x)$, en relation avec x sont donc en relation avec y donc appartiennent à $cl(y)$. On en déduit $cl(x) \subset cl(y)$.
  On raisonne de même pour montrer que $cl(y) \subset cl(x)$
  On conclut : $cl(x) = cl(y)$.

Relation d'ordre

Passons à étudier les relations d'ordre.

Définition

On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une **relation d'ordre** *si $\mathscr{R}$ est à la fois réflexive, transitive et antisymétrique.*

- *Les relations d'ordre sont généralement notées $\leq$ ou $\preccurlyeq$ ou $\lesssim$.*
- *Soit $\leq$ une relation d'ordre sur E, on dit alors que $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné.*

Définition (Ordre total ou ordre partiel)

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur E.

- *Deux éléments x et y de E sont dits comparables (pour $\leq$) si*

$$x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x.$$

- *Si deux éléments quelconques sont toujours comparables, on dit que $\leq$ est une relation d'***ordre total***. E est dit* **totalement ordonné** *par $\leq$.*
- *Sinon, on dit que $\leq$ est une relation d'***ordre partiel***. E est dit partiellement ordonné par $\leq$.*

Relation d'ordre

Exemple :

- Sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ on a une relation d'ordre total, notée $\leq$.
- Sur $P(E)$, la relation
$$A \leq B \Longleftrightarrow A \subset B$$
c'est une relation d'ordre partiel (sauf si $E = \emptyset$ ou $E = \{a\}$). En effet, si $a \in E$, $b \in E$, $\{a\}$ et $\{b\}$ non comparables.
- Sur $\mathbb{R}^2$
$$(x, y) \leq (x', y') \iff (x \leq x') \quad \text{et} \quad (y \leq y')$$
est un ordre partiel. Par exemple $(1, 2)$ et $(4, 0)$ non comparables.

Relation d'ordre

Définition (Relation stricte associée à une relation d'ordre)

Soit $\leq$ une relation d'ordre sur E. On définit alors une nouvelle relation sur E par

$$\forall x,\ y \in E, \quad x < y \Longleftrightarrow x \leq y \quad \text{et} \quad x \neq y.$$

La relation $<$ on l'appelle la **relation stricte** *associée à $\leq$.*

Exemple : Naturellement, la relation usuelle $<$ sur $\mathbb{R}$ est la relation stricte de la relation $\leq$.

Attention ! La relation stricte n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive :

On ne peut avoir $x < y$, $y < x$ et $x = y$

Relation d'ordre

Proposition

La relation $<$ est transitive et antisymétrique.

Démonstration.

- **Transitivité** : Soient $x, \ y, \ z \in E$. On suppose que :

$$x < y \quad \text{et} \quad y < z.$$

En particulier :

$$x \leq y \quad \text{et} \quad y \leq z.$$

Donc

$$x \leq z \quad \text{par transitivité de} \quad \leq .$$

Il nous reste à montrer que $x \neq z$.
En raisonnant par l'absurde : si $x = z$ alors $x \leq y$ et $y \leq z = x$ donc $x = y$ par antisymétrie de $\leq$. Or $x \neq y$ par hypothèse. **Contradiction !**
Finalement $x \leq z \quad \text{et} \quad x \neq z \quad (i.e. \ x < z)$.

□

Relations Binaires

Démonstration.

- **Antisymétrie** : Soient $x,\ y \in E$. On suppose que :

$$x < y \quad \text{et} \quad y < x.$$

En particulier :

$$x \leq y \quad \text{et} \quad y \leq x.$$

Donc $x = y$ par antisymétrie de $\leq$. Par conséquent $<$ est antisymétrique.

$\square$

Remarque : L'antisymétrie de $<$ est peu utile car on a obtenu une contradiction donc l'hypothèse de départ est toujours fausse ! Car si $x < y$, $x \neq y$ et on conclut que $x = y$ donc la condition de départ ne se réalise jamais.

Relation d'ordre

Définition (Majorant, minorant)

Soit A une partie d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preceq$. Soit $m \in E$.

- *On dit que m est un* **minorant** *de A si*

$$\forall x \in A, \quad m \preceq x.$$

  On dit alors que A est **minorée***.*
- *On dit que m est un* **majorant** *de A si*

$$\forall x \in A, \quad x \preceq m.$$

  On dit alors que A est **majorée***.*
- *On dit que A est* **bornée** *si elle est minorée et majorée.*

Relation d'ordre

Exemple :

- L'ensemble $\{8, 10, 12\}$ est minoré par 2 et majoré par 120 pour la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$.
- $P(E)$ est minoré par $\emptyset$ et majoré par E pour la relation d'inclusion $\subset$.
- Tout réel inférieur ou égal à 0 est un minorant de l'intervalle $]0, 1[$. Tout réel supérieur ou égal à 1 est un majorant de l'intervalle $]0, 1[$.

Relation d'ordre

Définition (Plus petit élément, plus grand élément)

Soit A une partie d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre.

- *On appelle* **plus petit élément** *ou un* **minimum** *de A tout élement de A qui minore A.* **S'il en existe un**, *un tel plus petit élément est* **unique** *et donc appelé* **le** *plus petit élément de A, noté $\mathrm{Min}A$.*
- *On appelle* **plus grands élément** *ou un* **maximum** *de A tout élement de A qui majore A.* **S'il en existe un**, *un tel plus grand élément est* **unique** *et donc appelé* **le** *plus grand élément de A, noté $\mathrm{Max}A$.*

Exemple : On travaille dans cette série d'exemples avec l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

- 0 est le plus petit élément de $\mathbb{R}_+$ et le plus grand élément de $\mathbb{R}_-$.
- $]0, 1[$ ne possède ni plus petit élément ni plus grand élément.
- 0 est le plus petit élément de $[0, 1]$, et 1 est le plus grand élément de $[0, 1]$.

Relation d'ordre

Exemple : On travaille dans cette série d'exemples avec la relation de divisibilité $|$ sur $\mathbb{N}$.

- L'ensemble $\{2, 3, 6\}$ possède un plus grand élément, c'est 6, mais pas de plus petit élément.
- 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ et 1 est son plus petit élément.
- L'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ne possède ni plus petit élément ni plus grand élément.

Définition

Soit A une partie de un ensemble E muni d'une relation d'ordre.

- *Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, on l'appelle* **borne inférieure** *de A et on le note $\mathrm{Inf} A$.*
- *Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, on l'appelle* **borne supérieure** *de A et on le note $\mathrm{Sup} A$.*

Remarque : La différence essentielle entre les plus grands éléments et les bornes supérieures d'une partie A, c'est que les bornes supérieures n'appartiennent pas forcément à A.
Exemple : Avec l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, 0 est le Inf de $]0,1[$, et 1 est le Sup de $]0,1[$.

Relation d'ordre

Théorème (Lien entre les plus grands/petits éléments et les bornes supérieures/inférieures)

Soient $\leq$ une relation d'ordre et A une partie de E. Si A possède un plus grand (resp. petit) élément pour $\leq$, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) pour $\leq$ et

$$\mathrm{Max}A = \mathrm{Sup}A \quad (\textit{resp. } \mathrm{Inf}A = \mathrm{Min}A)$$

Exemple : Avec l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\mathrm{Inf}[0,1] = \mathrm{Min}[0,1] = 0 \quad \text{et } \mathrm{Sup}[0,1] = \mathrm{Max}[0,1] = 1.$$