CY Tech

Algèbre - Premier semestre 2021

Responsable CM : Didier Cransac (groups 5-6-7)
Bureau :CY 201
e-mail :didier.cransac@cyu.fr

Responsable TD : Didier Cransac (groupe 5)
Didier Cransac (groupe 6)
Jihan Khoder (groupe 7)

Évaluation :

- **DS 1 :** 28/10/21
- **DS 2 :** 09/12/21
- **DS 3 :** 20/01/22
- **Divers : à définir.**

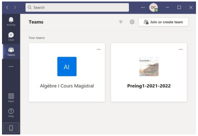
Algèbre-Premier semestre 2021

Accès aux documents

Comptes Teams :

Préing 1 (global)	n33vzum
Groupe Alèbre I CM DC	br01qzw
Groupe 5	4n9f431
Groupe 6	grwo6rf
Groupe 7	wp2pahr

En cas de difficulté : didier.cransac@cyu.fr



Les documents seront déposés sur

math.cransac.free.fr

Identifiant :

nom (7 lettres maximum) + initiale du prénom

Exemple :

Nom Prénom	a pour identifiant
Jean Fontaine	`fontainj`
Didier Cransac	`cransacd`

Mot de passe :

cytech

En cas de difficulté : didier.cransac@cyu.fr

Thèmes

Thèmes

- Logique et raisonnement
- Ensembles
- Relations binaires
- Applications
- Nombres complexes
- Polynômes
- Fractions rationnelles

Logique et raisonnement

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.
Nous allons donc apprendre à bien écrire et à bien argumenter en mathématiques.

Logique et raisonnement

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.
Nous allons donc apprendre à bien écrire et à bien argumenter en mathématiques.

Thèmes détaillés

Logique et raisonnement

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.
Nous allons donc apprendre à bien écrire et à bien argumenter en mathématiques.

Thèmes détaillés

- Rudiments de Logique
  - Propositions.
  - Quantificateurs.
  - Implication, contraposition, équivalence.

Logique et raisonnement

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.
Nous allons donc apprendre à bien écrire et à bien argumenter en mathématiques.

Thèmes détaillés

- Rudiments de Logique
  - Propositions.
  - Quantificateurs.
  - Implication, contraposition, équivalence.
- Modes de Raisonnement
  - Contraposition
  - Par l'absurde
  - Par analyse-synthèse
  - Récurrence

En Mathématiques on travaille avec des objets et des situations qui doivent être clairement décrits.
Pour cela on utilise des **Définitions**.
Une définition décrit donc une situation ou un objet et donne un **nom**.

Une définition n'est pas vraie ou fausse, elle ne peut pas se discuter.

L'enjeu d'une définition est de créer des objets qui auront des caractéristiques mathématiques intéressantes.

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Rudiments de Logique

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$$\ll \textbf{ P est-elle vraie ? } \gg$$

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$$\ll \textbf{ P est-elle vraie ? } \gg$$

Exemples :

- $\ll 3 \times 3 = 9 \gg$

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$$\ll \textbf{ P est-elle vraie ? } \gg$$

Exemples :

- $\ll 3 \times 3 = 9 \gg$est une proposition vraie.

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$$\ll \textbf{ P est-elle vraie ? } \gg$$

Exemples :

- $\ll 3 \times 3 = 9 \gg$est une proposition vraie.
- $\ll$ 7 est pair $\gg$

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$$\ll \textbf{ P est-elle vraie ? } \gg$$

Exemples :

- $\ll 3 \times 3 = 9 \gg$est une proposition vraie.
- $\ll$ 7 est pair $\gg$est une proposition fausse.
- $\ll 8 = 2 \gg$

Rudiments de Logique

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$$\ll \textbf{P est-elle vraie ?} \gg$$

Exemples :

- $\ll 3 \times 3 = 9 \gg$est une proposition vraie.
- $\ll$ 7 est pair $\gg$est une proposition fausse.
- $\ll 8 = 2 \gg$ est une proposition fausse.

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$\ll$ **P est-elle vraie ?** $\gg$

Exemples :

- $\ll 3 \times 3 = 9 \gg$est une proposition vraie.
- $\ll$ 7 est pair $\gg$est une proposition fausse.
- $\ll 8 = 2 \gg$ est une proposition fausse.
- $\ll$ l'entier 49 est un carré $\gg$

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$$\ll \textbf{P est-elle vraie ?} \gg$$

Exemples :

- $\ll 3 \times 3 = 9 \gg$est une proposition vraie.
- $\ll$ 7 est pair $\gg$est une proposition fausse.
- $\ll 8 = 2 \gg$ est une proposition fausse.
- $\ll$ l'entier 49 est un carré $\gg$ est une proposition vraie ($7^2 = 49$).

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$$\ll \textbf{P est-elle vraie ?} \gg$$

Exemples :

- $\ll 3 \times 3 = 9 \gg$est une proposition vraie.
- $\ll$ 7 est pair $\gg$est une proposition fausse.
- $\ll 8 = 2 \gg$ est une proposition fausse.
- $\ll$ l'entier 49 est un carré $\gg$ est une proposition vraie ($7^2 = 49$).
- $\ll \dfrac{3}{0} = 5 \gg$

Définition (Proposition)

On appelle proposition (ou assertion) *toute phrase P dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).*

Autrement dit, on appelle proposition toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

$$\ll \textbf{P est-elle vraie ?} \gg$$

Exemples :

- $\ll 3 \times 3 = 9 \gg$est une proposition vraie.
- $\ll$ 7 est pair $\gg$est une proposition fausse.
- $\ll 8 = 2 \gg$ est une proposition fausse.
- $\ll$ l'entier 49 est un carré $\gg$ est une proposition vraie ($7^2 = 49$).
- $\ll \dfrac{3}{0} = 5 \gg$ n'est pas un proposition (l'écriture $\dfrac{3}{0}$ ne représente rien)

Remarque : La plupart des phrases grammaticalement correctes sont des propositions.

Remarque : La plupart des phrases grammaticalement correctes sont des propositions.
Mais par exemple :

- « Dis-le-moi ! » ,
- « Bonjour »
- « Quelle heure est-il ? » , ou
- « Comment vas-tu ? »

Remarque : La plupart des phrases grammaticalement correctes sont des propositions.
Mais par exemple :

- $\ll$ Dis-le-moi ! $\gg$,
- $\ll$ Bonjour $\gg$
- $\ll$ Quelle heure est-il ? $\gg$, ou
- $\ll$ Comment vas-tu ? $\gg$

ne sont pas des propositions.

Remarque : La plupart des phrases grammaticalement correctes sont des propositions.
Mais par exemple :

- « Dis-le-moi ! » ,
- « Bonjour »
- « Quelle heure est-il ? » , ou
- « Comment vas-tu ? »

ne sont pas des propositions.
La question :

Est-il vrai que « bonjour » ? , **n'a aucun sens.**

Remarque : Dans un cours de mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition, c'est pour affirmer qu'elle est vraie, et qu'on va la démontrer.

On a plusieurs types de propositions.

Remarque : Dans un cours de mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition, c'est pour affirmer qu'elle est vraie, et qu'on va la démontrer.

On a plusieurs types de propositions.

Définition

- *Un* **Axiome** *est une proposition qui n'est pas démontrable mais que l'on considère vraie*
  Exemple : *Axiomes d'Euclide, axiomes de Péano.*
- *Un* **Théorème** *est une proposition vraie particulièrement importante.*

Remarque : Dans un cours de mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition, c'est pour affirmer qu'elle est vraie, et qu'on va la démontrer.

On a plusieurs types de propositions.

Définition

- *Un* **Axiome** *est une proposition qui n'est pas démontrable mais que l'on considère vraie*
  Exemple : *Axiomes d'Euclide, axiomes de Péano.*
- *Un* **Théorème** *est une proposition vraie particulièrement importante.*
  Exemple : *Théorème Pythagore, Théorème de Fermat(-Wiles).*

Remarque : Dans un cours de mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition, c'est pour affirmer qu'elle est vraie, et qu'on va la démontrer.

On a plusieurs types de propositions.

Définition

- *Un* **Axiome** *est une proposition qui n'est pas démontrable mais que l'on considère vraie*
  Exemple : *Axiomes d'Euclide, axiomes de Péano.*
- *Un* **Théorème** *est une proposition vraie particulièrement importante.*
  Exemple : *Théorème Pythagore, Théorème de Fermat(-Wiles).*
- *Un* **Lemme** *est une proposition vraie, utile à la démonstration d'une proposition plus importante.*

Remarque : Dans un cours de mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition, c'est pour affirmer qu'elle est vraie, et qu'on va la démontrer.

On a plusieurs types de propositions.

Définition

- *Un* **Axiome** *est une proposition qui n'est pas démontrable mais que l'on considère vraie*
  Exemple : *Axiomes d'Euclide, axiomes de Péano.*
- *Un* **Théorème** *est une proposition vraie particulièrement importante.*
  Exemple : *Théorème Pythagore, Théorème de Fermat(-Wiles).*
- *Un* **Lemme** *est une proposition vraie, utile à la démonstration d'une proposition plus importante.*
  Exemple : *Lemme de Zorn.*

Remarque : Dans un cours de mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition, c'est pour affirmer qu'elle est vraie, et qu'on va la démontrer.

On a plusieurs types de propositions.

Définition

- *Un* **Axiome** *est une proposition qui n'est pas démontrable mais que l'on considère vraie*
  Exemple : *Axiomes d'Euclide, axiomes de Péano.*
- *Un* **Théorème** *est une proposition vraie particulièrement importante.*
  Exemple : *Théorème Pythagore, Théorème de Fermat(-Wiles).*
- *Un* **Lemme** *est une proposition vraie, utile à la démonstration d'une proposition plus importante.*
  Exemple : *Lemme de Zorn.*
- *Un* **Corollaire** *est une proposition vraie, conséquence immédiate d'une autre proposition vraie.*

Remarque : Dans un cours de mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition, c'est pour affirmer qu'elle est vraie, et qu'on va la démontrer.

On a plusieurs types de propositions.

Définition

- *Un* **Axiome** *est une proposition qui n'est pas démontrable mais que l'on considère vraie*
  Exemple : *Axiomes d'Euclide, axiomes de Péano.*
- *Un* **Théorème** *est une proposition vraie particulièrement importante.*
  Exemple : *Théorème Pythagore, Théorème de Fermat(-Wiles).*
- *Un* **Lemme** *est une proposition vraie, utile à la démonstration d'une proposition plus importante.*
  Exemple : *Lemme de Zorn.*
- *Un* **Corollaire** *est une proposition vraie, conséquence immédiate d'une autre proposition vraie.*
- *Une* **Conjecture** *est une proposition qu'on pense généralement vraie, sans en avoir la preuve.*

Remarque : Dans un cours de mathématiques, lorsqu'on énonce une proposition, c'est pour affirmer qu'elle est vraie, et qu'on va la démontrer.

On a plusieurs types de propositions.

Définition

- *Un* **Axiome** *est une proposition qui n'est pas démontrable mais que l'on considère vraie*
  Exemple : *Axiomes d'Euclide, axiomes de Péano.*
- *Un* **Théorème** *est une proposition vraie particulièrement importante.*
  Exemple : *Théorème Pythagore, Théorème de Fermat(-Wiles).*
- *Un* **Lemme** *est une proposition vraie, utile à la démonstration d'une proposition plus importante.*
  Exemple : *Lemme de Zorn.*
- *Un* **Corollaire** *est une proposition vraie, conséquence immédiate d'une autre proposition vraie.*
- *Une* **Conjecture** *est une proposition qu'on pense généralement vraie, sans en avoir la preuve.*
  Exemple : *Conjecture de Goldbach.*

Théorème de Fermat-Wiles :

Il n'existe pas de nombres entiers strictement positifs x, y et z tels que :
$x^n + y^n = z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Lemme de Zorn :

si un ensemble ordonné est tel que toute chaîne (sous-ensemble totalement ordonné) possède un majorant, alors il possède un élément maximal.

Conjecture de Goldbach :

Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Rudiments de Logique

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$

Rudiments de Logique

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$P(2) : 2 \geq 1$$

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$P(2) : 2 \geq 1 \quad \text{est vraie}$$

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} P(2) : 2 \geq 1 &\quad \text{est vraie} \\ P(-1) : -1 \geq 1 & \end{aligned}$$

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} P(2) : 2 \geq 1 &\quad \text{est vraie} \\ P(-1) : -1 \geq 1 &\quad \text{est fausse.} \end{aligned}$$

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$\begin{array}{rl} P(2) : 2 \geq 1 & \text{est vraie} \\ P(-1) : -1 \geq 1 & \text{est fausse.} \end{array}$$

- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui même.

Rudiments de Logique

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} P(2) : 2 \geq 1 &\quad \text{est vraie} \\ P(-1) : -1 \geq 1 &\quad \text{est fausse.} \end{aligned}$$

- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui même.
  Si on pose

$$P(n) : \quad \ll \text{n est un nombre premier} \gg$$

Rudiments de Logique

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} P(2) : 2 \geq 1 \quad & \text{est vraie} \\ P(-1) : -1 \geq 1 \quad & \text{est fausse.} \end{aligned}$$

- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui même.
  Si on pose

$$P(n) : \quad \ll \text{n est un nombre premier} \gg$$

  alors

$$P(7)$$

.

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} P(2) : 2 \geq 1 & \quad \text{est vraie} \\ P(-1) : -1 \geq 1 & \quad \text{est fausse.} \end{aligned}$$

- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui même.
  Si on pose

$$P(n) : \quad \ll \text{n est un nombre premier} \gg$$

  alors

$$P(7) \quad \text{est vraie}$$

.

Rudiments de Logique

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} P(2) : 2 \geq 1 \quad & \text{est vraie} \\ P(-1) : -1 \geq 1 \quad & \text{est fausse.} \end{aligned}$$

- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui même.
  Si on pose

$$P(n) : \quad \ll \text{n est un nombre premier} \gg$$

  alors

$$\begin{aligned} & P(7) \quad \text{est vraie} \\ & P(8) \end{aligned}$$

.

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$P(2) : 2 \geq 1 \quad \text{est vraie}$$
$$P(-1) : -1 \geq 1 \quad \text{est fausse.}$$

- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui même.
  Si on pose

$$P(n) : \quad \ll \text{n est un nombre premier} \gg$$

  alors

$$P(7) \quad \text{est vraie}$$
$$P(8) \quad \text{est fausse}$$

Rudiments de Logique

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} P(2) : 2 \geq 1 &\quad \text{est vraie} \\ P(-1) : -1 \geq 1 &\quad \text{est fausse.} \end{aligned}$$

- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui même.
  Si on pose

$$P(n) : \quad \ll \text{n est un nombre premier} \gg$$

  alors

$$\begin{aligned} P(7) &\quad \text{est vraie} \\ P(8) &\quad \text{est fausse} \\ P(6700417) &\quad . \end{aligned}$$

Notation : Lorsque qu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E, on pourra la noter $P(x)$.
L'ensemble E sera, la plupart du temps, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples :

- Si on pose $P(x) : x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} P(2) : 2 \geq 1 & \quad \text{est vraie} \\ P(-1) : -1 \geq 1 & \quad \text{est fausse.} \end{aligned}$$

- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui même.
  Si on pose

  $$P(n) : \quad \ll \text{n est un nombre premier} \gg$$

  alors

  $$\begin{aligned} P(7) & \quad \text{est vraie} \\ P(8) & \quad \text{est fausse} \\ P(6700417) & \quad \text{est vraie} \quad \text{(Prouvé par L. Euler (1732)).} \end{aligned}$$

Nous disposons de deux types d'outils pour construire de nouvelles propositions :

- **les opérations sur les propositions :**

- **les quantificateurs :**

Nous disposons de deux types d'outils pour construire de nouvelles propositions :

- **les opérations sur les propositions :**
  - Négation (non)
  - Conjonction (et)
  - Disjonction (ou)
  - Implication ($\Rightarrow$)
  - Équivalence ($\Leftrightarrow$)
- **les quantificateurs :**

Rudiments de Logique

Nous disposons de deux types d'outils pour construire de nouvelles propositions :

- **les opérations sur les propositions :**
  - Négation (non)
  - Conjonction (et)
  - Disjonction (ou)
  - Implication ($\Rightarrow$)
  - Équivalence ($\Leftrightarrow$)
- **les quantificateurs :**
  - Pour tout ($\forall$)
  - Il existe ($\exists$)

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est*

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	

Rudiments de Logique

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	
F	

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

Rudiments de Logique

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

- La négation de ≪ mon chat est noir ≫

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

- La négation de « mon chat est noir » est « mon chat n'est pas noir » .

Rudiments de Logique

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

- La négation de « mon chat est noir » est « mon chat n'est pas noir » .
- La négation de « tous les chats sont noirs »

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

- La négation de « mon chat est noir » est « mon chat n'est pas noir » .
- La négation de « tous les chats sont noirs » est « il existe un chat qui n'est pas noir » .

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

- La négation de « mon chat est noir » est « mon chat n'est pas noir » .
- La négation de « tous les chats sont noirs » est « il existe un chat qui n'est pas noir » .
- La negation de « $x \leq 0$ »

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

- La négation de « mon chat est noir » est « mon chat n'est pas noir » .
- La négation de « tous les chats sont noirs » est « il existe un chat qui n'est pas noir » .
- La negation de « $x \leq 0$ » est « $x > 0$ »

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

- La négation de « mon chat est noir » est « mon chat n'est pas noir » .
- La négation de « tous les chats sont noirs » est « il existe un chat qui n'est pas noir » .
- La negation de « $x \leq 0$ » est « $x > 0$ » (et non pas « $x \geq 0$ »).

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

- La négation de « mon chat est noir » est « mon chat n'est pas noir » .
- La négation de « tous les chats sont noirs » est « il existe un chat qui n'est pas noir » .
- La negation de « $x \leq 0$ » est « $x > 0$ » (et non pas « $x \geq 0$ »).
- La negation de « f est la fonction nulle »

Définition (Négation)

La proposition contraire de P, notée non(P) ou $\overline{P}$ ou $\neg P$, et appelée négation *de P, est la proposition définie comme étant vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.*

On peut résumer cette définition avec une **table de vérité**

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple :

- La négation de « mon chat est noir » est « mon chat n'est pas noir » .
- La négation de « tous les chats sont noirs » est « il existe un chat qui n'est pas noir » .
- La negation de « $x \leq 0$ » est « $x > 0$ » (et non pas « $x \geq 0$ »).
- La negation de « f est la fonction nulle » est « f n'est pas la fonction nulle » ou encore « f ne s'annule pas en au moins un point »

Définition (Équivalence)

Soient P et Q deux propositions. On définit « *la proposition P est* équivalente *à Q* », *notée*

$$P \iff Q,$$

comme la proposition étant

Définition (Équivalence)

Soient P et Q deux propositions. On définit « *la proposition P est* équivalente *à Q* », *notée*

$$P \iff Q,$$

comme la proposition étant vraie si P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

Définition (Équivalence)

Soient P et Q deux propositions. On définit « la proposition P est équivalente *à Q », notée*

$$P \Longleftrightarrow Q,$$

comme la proposition étant vraie si P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Définition (Équivalence)

Soient P et Q deux propositions. On définit « la proposition P est équivalente *à Q », notée*

$$P \iff Q,$$

comme la proposition étant vraie si P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Définition (Équivalence)

Soient P et Q deux propositions. On définit « la proposition P est équivalente à Q », notée

$$P \iff Q,$$

comme la proposition étant vraie si P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

Définition (Équivalence)

Soient P et Q deux propositions. On définit « la proposition P est équivalente à Q », notée

$$P \iff Q,$$

comme la proposition étant vraie si P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	

Définition (Équivalence)

Soient P et Q deux propositions. On définit « *la proposition P est* équivalente *à Q* », *notée*

$$P \iff Q,$$

comme la proposition étant vraie si P et Q ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La deuxième opération sur les propositions est la conjonction.

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ et } Q \gg \quad (\text{ou } P \wedge Q)$$

qui est

La deuxième opération sur les propositions est la conjonction.

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ et } Q \gg \quad (ou\ P \wedge Q)$$

qui est

- *vraie si les deux propositions P et Q sont vraies ;*

La deuxième opération sur les propositions est la conjonction.

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ et } Q \gg \quad (ou\ P \wedge Q)$$

qui est

- *vraie si les deux propositions P et Q sont vraies ;*
- *fausse si l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.*

La deuxième opération sur les propositions est la conjonction.

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ et } Q \gg \qquad (\text{ou } P \wedge Q)$$

qui est

- *vraie si les deux propositions P et Q sont vraies ;*
- *fausse si l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.*

On résume ceci par la table de vérité suivante :

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

La deuxième opération sur les propositions est la conjonction.

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ et } Q \gg \qquad (ou\ P \wedge Q)$$

qui est

- *vraie si les deux propositions P et Q sont vraies ;*
- *fausse si l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.*

On résume ceci par la table de vérité suivante :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

La deuxième opération sur les propositions est la conjonction.

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ et } Q \gg \quad (\text{ou } P \wedge Q)$$

qui est

- *vraie si les deux propositions P et Q sont vraies ;*
- *fausse si l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.*

On résume ceci par la table de vérité suivante :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

La deuxième opération sur les propositions est la conjonction.

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ et } Q \gg \quad (ou\ P \wedge Q)$$

qui est

- *vraie si les deux propositions P et Q sont vraies ;*
- *fausse si l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.*

On résume ceci par la table de vérité suivante :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	

La deuxième opération sur les propositions est la conjonction.

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la conjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ et } Q \gg \qquad (\text{ou } P \wedge Q)$$

qui est

- *vraie si les deux propositions P et Q sont vraies ;*
- *fausse si l'une au moins des deux propositions P ou Q est fausse.*

On résume ceci par la table de vérité suivante :

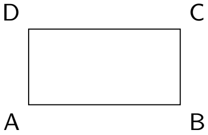
P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples :

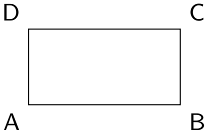
- Soit $ABCD$ un rectangle. La proposition

  ≪ L'angle $\widehat{ABC}$ est droit et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu ≫

  est vraie ou fausse ?



Exemples :



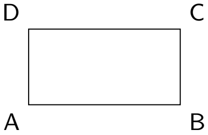
- Soit $ABCD$ un rectangle. La proposition

  ≪ L'angle $\widehat{ABC}$ est droit et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu ≫

  est vraie ou fausse ?
- Elle est vraie.

  En effet
  - ≪ L'angle $\widehat{ABC}$ est droit ≫

Exemples :



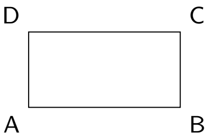
- Soit $ABCD$ un rectangle. La proposition

  « L'angle $\widehat{ABC}$ est droit et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu »

  est vraie ou fausse ?
- Elle est vraie.

  En effet
  - « L'angle $\widehat{ABC}$ est droit » est une proposition vraie.

Exemples :



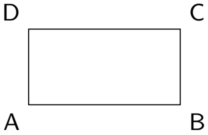
- Soit $ABCD$ un rectangle. La proposition

  ≪ L'angle $\widehat{ABC}$ est droit et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu ≫

  est vraie ou fausse ?
- Elle est vraie.

  En effet
  - ≪ L'angle $\widehat{ABC}$ est droit ≫est une proposition vraie.
  - ≪ Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu ≫

Exemples :



- Soit $ABCD$ un rectangle. La proposition

  ≪ L'angle $\widehat{ABC}$ est droit et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu ≫

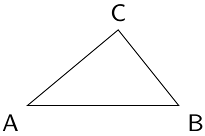
  est vraie ou fausse ?
- Elle est vraie.

  En effet
  - ≪ L'angle $\widehat{ABC}$ est droit ≫est une proposition vraie.
  - ≪ Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu ≫ est une proposition vraie.

Rudiments de Logique

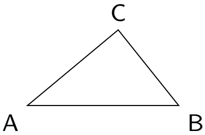
Exemples :

- Soit ABC un triangle. La proposition
  $\ll AB > AC + CB \quad \text{et} \quad \widehat{ABC}+\widehat{CAB}+\widehat{BCA} = \pi \gg$
  est-elle vraie ou fausse ?



Exemples :

- Soit ABC un triangle. La proposition
  $\ll AB > AC + CB$ et $\widehat{ABC}+\widehat{CAB}+\widehat{BCA} = \pi \gg$
  est-elle vraie ou fausse ?



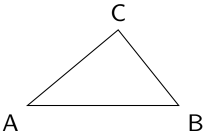
- Elle est fausse.

  En effet

  - $\ll AB > AC + CB \gg$

Exemples :

- Soit ABC un triangle. La proposition
  $\ll AB > AC + CB \quad \text{et} \quad \widehat{ABC}+\widehat{CAB}+\widehat{BCA} = \pi \gg$
  est-elle vraie ou fausse ?



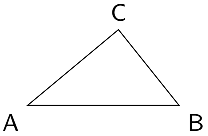
- Elle est fausse.

  En effet

  - $\ll AB > AC + CB \gg$ est une proposition fausse.

Exemples :

- Soit ABC un triangle. La proposition
  $\ll AB > AC + CB \quad \text{et} \quad \widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA} = \pi \gg$
  est-elle vraie ou fausse ?



- Elle est fausse.

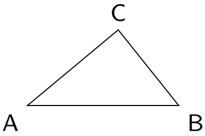
  En effet

  - $\ll AB > AC + CB \gg$ est une proposition fausse.
  - $\ll \widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA} = \pi \gg$

Rudiments de Logique

Exemples :

- Soit ABC un triangle. La proposition
  « $AB > AC + CB$ et $\widehat{ABC}+\widehat{CAB}+\widehat{BCA} = \pi$ »
  est-elle vraie ou fausse ?



- Elle est fausse.

  En effet

  - « $AB > AC + CB$ » est une proposition fausse.
  - « $\widehat{ABC}+\widehat{CAB}+\widehat{BCA} = \pi$ » est une proposition vraie.

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \qquad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \qquad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

- *vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie ;*

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \qquad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

- *vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie ;*
- *fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.*

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \qquad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

- *vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie ;*
- *fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.*

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \quad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

- *vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie ;*
- *fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.*

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \quad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

- *vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie ;*
- *fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.*

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	
F	F	

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \quad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

- *vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie ;*
- *fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.*

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \quad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

- *vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie ;*
- *fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.*

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \quad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

- *vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie ;*
- *fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.*

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple :

Définition

A deux propositions P et Q, on peut associer la disjonction *de P et Q notée*

$$\ll P \text{ ou } Q \gg \qquad (\text{ou } P \vee Q)$$

qui est

- *vraie lorsque l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie ;*
- *fausse si les deux propositions P et Q sont fausses.*

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple : Propriété vraie :
Pour tout triangle ABC, $AB > AC + CB$ **ou** $\ll \widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA} = \pi \gg$

Remarque : On prendra garde au fait que le ≪ ou ≫ logique est un ≪ ou **inclusif** ≫, contrairement au ≪ ou ≫ du langage courant qui lui est très souvent un ≪ ou **exclusif** ≫

Remarque : On prendra garde au fait que le ≪ ou ≫ logique est un ≪ **ou inclusif** ≫, contrairement au ≪ ou ≫ du langage courant qui lui est très souvent un ≪ ou **exclusif** ≫

Distinguer :

1. le ≪ ou ≫ **exclusif** de la langue française : ≪Fromage ou Dessert≫
   On ne peut pas avoir les deux.

Remarque : On prendra garde au fait que le ≪ ou ≫ logique est un ≪ ou **inclusif** ≫, contrairement au ≪ ou ≫ du langage courant qui lui est très souvent un ≪ ou **exclusif** ≫

Distinguer :

1. le ≪ ou ≫ **exclusif** de la langue française : ≪Fromage ou Dessert≫
   On ne peut pas avoir les deux.
2. le ≪ ou ≫ **logique ou inclusif** : ≪On recrute un informaticien qui sait coder en C++ ou en Python≫
   On peut avoir les deux.

Rudiments de Logique

Propriétés de "et" et "ou"

Théorème (et)

$P \text{ et } Q \Leftrightarrow Q \text{ et } P$

Propriétés de "et" et "ou"

Théorème (et)

P *et* $Q \Leftrightarrow Q$ *et* P *Commutativité*

Propriétés de "et" et "ou"

Théorème (et)

P *et* $Q \Leftrightarrow Q$ *et* P *Commutativité*

$(P$ *et* $Q)$ *et* $R \Leftrightarrow P$ *et* $(Q$ *et* $R)$

Propriétés de "et" et "ou"

Théorème (et)

P *et* $Q \Leftrightarrow Q$ *et* P — *Commutativité*

$(P$ *et* $Q)$ *et* $R \Leftrightarrow P$ *et* $(Q$ *et* $R)$ — *Associativité*

Propriétés de "et" et "ou"

Théorème (et)

P *et* $Q \Leftrightarrow Q$ *et* P	*Commutativité*
$(P$ *et* $Q)$ *et* $R \Leftrightarrow P$ *et* $(Q$ *et* $R)$	*Associativité*
$(P$ *et* $Q)$ *ou* $R \Leftrightarrow (P$ *ou* $R)$ *et* $(Q$ *ou* $R)$	

Rudiments de Logique

Propriétés de "et" et "ou"

Théorème (et)

P *et* $Q \Leftrightarrow Q$ *et* P	*Commutativité*
$(P$ *et* $Q)$ *et* $R \Leftrightarrow P$ *et* $(Q$ *et* $R)$	*Associativité*
$(P$ *et* $Q)$ *ou* $R \Leftrightarrow (P$ *ou* $R)$ *et* $(Q$ *ou* $R)$	*Distributivité de « ou » par rapport à « et »*

Propriétés de "et" et "ou"

Théorème (et)

P *et* $Q \Leftrightarrow Q$ *et* P	*Commutativité*
$(P$ *et* $Q)$ *et* $R \Leftrightarrow P$ *et* $(Q$ *et* $R)$	*Associativité*
$(P$ *et* $Q)$ *ou* $R \Leftrightarrow (P$ *ou* $R)$ *et* $(Q$ *ou* $R)$	*Distributivité de « ou » par rapport à « et »*

Théorème (ou)

Propriétés de "et" et "ou"

Théorème (et)

P *et* $Q \Leftrightarrow Q$ *et* P	*Commutativité*
$(P$ *et* $Q)$ *et* $R \Leftrightarrow P$ *et* $(Q$ *et* $R)$	*Associativité*
$(P$ *et* $Q)$ *ou* $R \Leftrightarrow (P$ *ou* $R)$ *et* $(Q$ *ou* $R)$	*Distributivité de « ou » par rapport à « et »*

Théorème (ou)

P *ou* $Q \Leftrightarrow Q$ *ou* P	*Commutativité*
$(P$ *ou* $Q)$ *ou* $R \Leftrightarrow P$ *ou* $(Q$ *ou* $R)$	*Associativité*
$(P$ *ou* $Q)$ *et* $R \Leftrightarrow (P$ *et* $R)$ *ou* $(Q$ *et* $R)$	*Distributivité de « et » par rapport à « ou »*

Remarque : Les propriétés sont symétriques pour les deux opérateurs "et" et "ou".

Définition (Implication)

Étant données deux propositions logiques P et Q, on définit la proposition « P implique Q » *notée*

$$P \Longrightarrow Q$$

comme la proposition étant fausse dans le seul cas où P est vraie et Q fausse.

Définition (Implication)

Étant données deux propositions logiques P et Q, on définit la proposition « P implique Q » *notée*

$$P \Longrightarrow Q$$

comme la proposition étant fausse dans le seul cas où P est vraie et Q fausse. On appelle P son antécédent et Q son conséquent.

Rudiments de Logique

Définition (Implication)

Étant données deux propositions logiques P et Q, on définit la proposition « P implique Q » *notée*

$$P \Longrightarrow Q$$

comme la proposition étant fausse dans le seul cas où P est vraie et Q fausse. On appelle P son antécédent et Q son conséquent.

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Définition (Implication)

Étant données deux propositions logiques P et Q, on définit la proposition « P implique Q » *notée*

$$P \Longrightarrow Q$$

comme la proposition étant fausse dans le seul cas où P est vraie et Q fausse. On appelle P son antécédent et Q son conséquent.

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Définition (Implication)

Étant données deux propositions logiques P *et* Q*, on définit la proposition* « P implique Q » *notée*

$$P \Longrightarrow Q$$

comme la proposition étant fausse dans le seul cas où P *est vraie et* Q *fausse. On appelle* P *son antécédent et* Q *son conséquent.*

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

Rudiments de Logique

Définition (Implication)

Étant données deux propositions logiques P et Q, on définit la proposition « P implique Q » *notée*

$$P \Longrightarrow Q$$

comme la proposition étant fausse dans le seul cas où P est vraie et Q fausse. On appelle P son antécédent et Q son conséquent.

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	

Définition (Implication)

Étant données deux propositions logiques P et Q, on définit la proposition « P implique Q » *notée*

$$P \Longrightarrow Q$$

comme la proposition étant fausse dans le seul cas où P est vraie et Q fausse. On appelle P son antécédent et Q son conséquent.

On résume ceci par la table de vérité suivante

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque : Contrairement à (P ou Q) et (P et Q), la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$ n'est pas totalement intuitive.

Remarque : Contrairement à (P ou Q) et (P et Q), la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$ n'est pas totalement intuitive.
En effet, si P est fausse, alors l'implication est nécessairement vraie.

Remarque : Contrairement à (P ou Q) et (P et Q), la table de vérité de $P \implies Q$ n'est pas totalement intuitive.
En effet, si P est fausse, alors l'implication est nécessairement vraie.
En particulier, faux implique faux est considérée comme vraie en mathématique.

Remarque : Contrairement à (P ou Q) et (P et Q), la table de vérité de $P \implies Q$ n'est pas totalement intuitive.
En effet, si P est fausse, alors l'implication est nécessairement vraie.
En particulier, faux implique faux est considérée comme vraie en mathématique.
Ce choix est en fait raisonnable.

Remarque : Contrairement à (P ou Q) et (P et Q), la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$ n'est pas totalement intuitive.
En effet, si P est fausse, alors l'implication est nécessairement vraie.
En particulier, faux implique faux est considérée comme vraie en mathématique.
Ce choix est en fait raisonnable.
Imaginons par exemple l'assertion suivante :

Remarque : Contrairement à (P ou Q) et (P et Q), la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$ n'est pas totalement intuitive.
En effet, si P est fausse, alors l'implication est nécessairement vraie.
En particulier, faux implique faux est considérée comme vraie en mathématique.
Ce choix est en fait raisonnable.
Imaginons par exemple l'assertion suivante :

$P \Longrightarrow Q$: $\ll$**J'ai eu une discussion avec mon chien**$\gg$ **implique** $\ll$**mon chien parle**$\gg$.

Remarque : Contrairement à (P ou Q) et (P et Q), la table de vérité de $P \implies Q$ n'est pas totalement intuitive.
En effet, si P est fausse, alors l'implication est nécessairement vraie.
En particulier, faux implique faux est considérée comme vraie en mathématique.
Ce choix est en fait raisonnable.
Imaginons par exemple l'assertion suivante :

$P \implies Q$: ≪**J'ai eu une discussion avec mon chien**≫ **implique** ≪**mon chien parle**≫.

Bien entendu, cette implication est vraie

Remarque : Contrairement à (P ou Q) et (P et Q), la table de vérité de $P \Longrightarrow Q$ n'est pas totalement intuitive.
En effet, si P est fausse, alors l'implication est nécessairement vraie.
En particulier, faux implique faux est considérée comme vraie en mathématique.
Ce choix est en fait raisonnable.
Imaginons par exemple l'assertion suivante :

$P \Longrightarrow Q$: ≪**J'ai eu une discussion avec mon chien**≫ **implique** ≪**mon chien parle**≫.

Bien entendu, cette implication est vraie , mais ni

P : ≪**J'ai eu une discussion avec un chien**≫

ni

Q : ≪**mon chien parle**≫

ne le sont.

Exemples :

- $\ll n$ est pair $\gg \Longrightarrow \ll n$ est divisible par 2 $\gg$est une proposition vraie.

Exemples :

- « n est pair » $\Longrightarrow$ « n est divisible par 2 »est une proposition vraie.
- Soient a et b deux réels. Alors
  - $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$

Rudiments de Logique

Exemples :

- $\ll$ n est pair $\gg \Longrightarrow \ll$ n est divisible par 2 $\gg$est une proposition vraie.
- Soient a et b deux réels. Alors
  - $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ est vraie

Exemples :

- ≪ n est pair ≫ $\Longrightarrow$ ≪ n est divisible par 2 ≫est une proposition vraie.
- Soient a et b deux réels. Alors
  - $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ est vraie , mais
  - $a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b$ est fausse (on peut trouver un cas où c'est faux).

Exemples :

- ≪ n est pair ≫ $\Longrightarrow$ ≪ n est divisible par 2 ≫est une proposition vraie.
- Soient a et b deux réels. Alors
  - $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ est vraie , mais
  - $a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b$ est fausse (on peut trouver un cas où c'est faux).

Vocabulaire : Nous utiliserons souvent le vocabulaire suivant, si $P \Longrightarrow Q$ est **vraie** , nous dirons :

si P alors Q.

Exemples :

- « n est pair » $\Longrightarrow$ « n est divisible par 2 »est une proposition vraie.
- Soient a et b deux réels. Alors
  - $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$ est vraie , mais
  - $a^2 = b^2 \Longrightarrow a = b$ est fausse (on peut trouver un cas où c'est faux).

Vocabulaire : Nous utiliserons souvent le vocabulaire suivant, si $P \Longrightarrow Q$ est **vraie** , nous dirons :

si P alors Q.

L'assertion P est alors appelée une **condition suffisante** de Q :
Pour que Q soit vraie, il **suffit** que P soit vraie.

Exemples :

- $\ll n$ est pair $\gg \implies \ll n$ est divisible par 2 $\gg$est une proposition vraie.
- Soient a et b deux réels. Alors
  - $a = b \implies a^2 = b^2$ est vraie , mais
  - $a^2 = b^2 \implies a = b$ est fausse (on peut trouver un cas où c'est faux).

Vocabulaire : Nous utiliserons souvent le vocabulaire suivant, si $P \implies Q$ est **vraie** , nous dirons :

si P alors Q.

L'assertion P est alors appelée une **condition suffisante** de Q :
Pour que Q soit vraie, il **suffit** que P soit vraie.

L'assertion Q est alors appelée une **condition nécessaire** de P :
Pour que P soit vraie, il **faut** que Q soit vraie.

Distinguer :

1. Pour aller visiter la Tour Eiffel,
   - Il faut que je prenne le Métro et que je marche.
   - Il suffit que je prenne le Métro et que je marche.

Distinguer :

1. Pour aller visiter la Tour Eiffel,
   - Il faut que je prenne le Métro et que je marche.
     Faux : je peux prendre le bus.
   - Il suffit que je prenne le Métro et que je marche.

Distinguer :

1. Pour aller visiter la Tour Eiffel,
   - Il faut que je prenne le Métro et que je marche.
     Faux : je peux prendre le bus.
   - Il suffit que je prenne le Métro et que je marche.
     Vrai

Distinguer :

1. Pour aller visiter la Tour Eiffel,
   - Il faut que je prenne le Métro et que je marche.
     Faux : je peux prendre le bus.
   - Il suffit que je prenne le Métro et que je marche.
     Vrai
2. Pour montrer que 231 n'est pas premier
   - Il suffit que je le décompose en produit de nombres premiers.

Distinguer :

1. Pour aller visiter la Tour Eiffel,
   - Il faut que je prenne le Métro et que je marche.
     Faux : je peux prendre le bus.
   - Il suffit que je prenne le Métro et que je marche.
     Vrai
2. Pour montrer que 231 n'est pas premier
   - Il suffit que je le décompose en produit de nombres premiers.
   - Il faut que je le décompose en produit de nombres premiers.

Distinguer :

1. Pour aller visiter la Tour Eiffel,
   - Il faut que je prenne le Métro et que je marche.
     Faux : je peux prendre le bus.
   - Il suffit que je prenne le Métro et que je marche.
     Vrai
2. Pour montrer que 231 n'est pas premier
   - Il suffit que je le décompose en produit de nombres premiers.
     Vrai :$231 = 3 \times 7 \times 11$ suffit pour montrer que 231 n'est pas premier.
   - Il faut que je le décompose en produit de nombres premiers.

Distinguer :

1. Pour aller visiter la Tour Eiffel,
   - Il faut que je prenne le Métro et que je marche.
     Faux : je peux prendre le bus.
   - Il suffit que je prenne le Métro et que je marche.
     Vrai
2. Pour montrer que 231 n'est pas premier
   - Il suffit que je le décompose en produit de nombres premiers.
     Vrai :$231 = 3 \times 7 \times 11$ suffit pour montrer que 231 n'est pas premier.
   - Il faut que je le décompose en produit de nombres premiers.
     Faux : je peux aussi écrire $231 = 3 \times 77$.

Définition (Réciproque, contraposée)

- *On appelle* réciproque *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$Q \Longrightarrow P$$

Définition (Réciproque, contraposée)

- *On appelle* réciproque *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$Q \Longrightarrow P$$

- *On appelle* contraposée *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

Définition (Réciproque, contraposée)

- *On appelle* réciproque *de l'implication : $P \Rightarrow Q$, la proposition :*

$$Q \Longrightarrow P$$

- *On appelle* contraposée *de l'implication : $P \Rightarrow Q$, la proposition :*

$$non(Q) \Longrightarrow non(P)$$

Définition (Réciproque, contraposée)

- *On appelle* réciproque *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$Q \Longrightarrow P$$

- *On appelle* contraposée *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$non(Q) \Longrightarrow non(P)$$

Remarque : Si une implication est vraie, sa réciproque n'est pas forcément vraie.

Définition (Réciproque, contraposée)

- *On appelle* réciproque *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$Q \Longrightarrow P$$

- *On appelle* contraposée *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$non(Q) \Longrightarrow non(P)$$

Remarque : Si une implication est vraie, sa réciproque n'est pas forcément vraie.
Exemple : Considérons la proposition ≪ P : La nuit, tous les chats sont gris ≫

- Sa réciproque est :

Définition (Réciproque, contraposée)

- *On appelle* réciproque *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$Q \Longrightarrow P$$

- *On appelle* contraposée *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$non(Q) \Longrightarrow non(P)$$

Remarque : Si une implication est vraie, sa réciproque n'est pas forcément vraie.

Exemple : Considérons la proposition ≪ P : La nuit, tous les chats sont gris ≫

- Sa réciproque est : ≪ Si tous les chats sont gris, alors il fait nuit. ≫

Définition (Réciproque, contraposée)

- *On appelle* réciproque *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$Q \Longrightarrow P$$

- *On appelle* contraposée *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$non(Q) \Longrightarrow non(P)$$

Remarque : Si une implication est vraie, sa réciproque n'est pas forcément vraie.

Exemple : Considérons la proposition ≪ P : La nuit, tous les chats sont gris ≫

- Sa réciproque est : ≪ Si tous les chats sont gris, alors il fait nuit. ≫
- Sa contraposée est :

Définition (Réciproque, contraposée)

- *On appelle* réciproque *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$Q \Longrightarrow P$$

- *On appelle* contraposée *de l'implication :* $P \Rightarrow Q$ *, la proposition :*

$$non(Q) \Longrightarrow non(P)$$

Remarque : Si une implication est vraie, sa réciproque n'est pas forcément vraie.

Exemple : Considérons la proposition « P : La nuit, tous les chats sont gris »

- Sa réciproque est : « Si tous les chats sont gris, alors il fait nuit. »
- Sa contraposée est : « Si au moins un chat n'est pas gris, alors il fait jour. »

Vocabulaire :

Lorsque P et Q sont équivalentes , on dit que

P (est vraie) **si et seulement si** Q (est vraie).

Vocabulaire :

Lorsque P et Q sont équivalentes , on dit que

P (est vraie) **si et seulement si** Q (est vraie).

P est une condition **nécessaire et suffisante (CNS) de** Q.

Vocabulaire :

Lorsque P et Q sont équivalentes , on dit que

P (est vraie) **si et seulement si** Q (est vraie).

P est une condition **nécessaire et suffisante (CNS) de** Q.

Pour que Q soit vraie **il faut et il suffit** que P soit vraie.

Vocabulaire :

Lorsque P et Q sont équivalentes , on dit que

P (est vraie) **si et seulement si** Q (est vraie).

P est une condition **nécessaire et suffisante (CNS) de** Q.

Pour que Q soit vraie **il faut et il suffit** que P soit vraie.

ou, tout simplement,

P est **équivalente** à Q

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée.

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P)).$$

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P)).$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P)).$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$	$P \Longrightarrow Q$
V	F	V	F		V
V	F	F	V		F
F	V	V	F		V
F	V	F	V		V

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P)).$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$	$P \Longrightarrow Q$
V	F	V	F		V
V	F	F	V		F
F	V	V	F		V
F	V	F	V		V

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P)).$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$	$P \Longrightarrow Q$
V	F	V	F		V
V	F	F	V		F
F	V	V	F		V
F	V	F	V		V

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P)).$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$	$P \Longrightarrow Q$
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V		F
F	V	V	F		V
F	V	F	V		V

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P)).$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$	$P \Longrightarrow Q$
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F		V
F	V	F	V		V

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P)).$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$	$P \Longrightarrow Q$
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	V		V

On retrouve la même table de vérité que la proposition $P \Rightarrow Q$.

Remarque : Deux propositions P et Q sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérités. Utilisons cette remarque pour étudier certaines règles de calcul sur l'implication et l'équivalence.

Théorème

Toute implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (non(Q) \Longrightarrow non(P)).$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$.

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$	$P \Longrightarrow Q$
V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V

On retrouve la même table de vérité que la proposition $P \Rightarrow Q$. La proposition $P \Rightarrow Q$ et la proposition $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ sont donc équivalentes. $\square$

Théorème

L'équivalence est une double implication. Autrement dit

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P))$$

Théorème

L'équivalence est une double implication. Autrement dit

$$(P \iff Q) \iff ((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P))$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$.

Théorème

L'équivalence est une double implication. Autrement dit

$$(P \iff Q) \iff ((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P))$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$.

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$	$P \iff Q$
V	V	V	V		V
V	F	F	V		F
F	V	V	F		F
F	F	V	V		V

Théorème

L'équivalence est une double implication. Autrement dit

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P))$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V		F
F	V	V	F		F
F	F	V	V		V

Théorème

L'équivalence est une double implication. Autrement dit

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P))$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F		F
F	F	V	V		V

Théorème

L'équivalence est une double implication. Autrement dit

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P))$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V		V

Théorème

L'équivalence est une double implication. Autrement dit

$$(P \iff Q) \iff ((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P))$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$.

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Théorème

L'équivalence est une double implication. Autrement dit

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P))$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

On retrouve la même table de vérité que la proposition $P \Longleftrightarrow Q$.

Théorème

L'équivalence est une double implication. Autrement dit

$$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P))$$

Démonstration.

On écrit la table de vérité de la proposition $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

On retrouve la même table de vérité que la proposition $P \Longleftrightarrow Q$. Le deux propositions sont donc équivalentes. □

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

- Double négation : $P \iff non(non(P))$.

Rudiments de Logique

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

- Double négation : $P \iff non(non(P))$.
- Conjonction : $non(P \text{ et } Q) \iff non(P) \text{ ou } non(Q)$.

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

- Double négation : $P \iff non(non(P))$.
- Conjonction : $non(P \text{ et } Q) \iff non(P) \text{ ou } non(Q)$.
- Disjonction : $non(P \text{ ou } Q) \iff non(P) \text{ et } non(Q)$.

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

- Double négation : $P \iff non(non(P))$.
- Conjonction : $non(P \text{ et } Q) \iff non(P) \text{ ou } non(Q)$.
- Disjonction : $non(P \text{ ou } Q) \iff non(P) \text{ et } non(Q)$.

Démonstration.

On écrit les tables de vérité :

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

- Double négation : $P \Longleftrightarrow non(non(P))$.
- Conjonction : $non(P \text{ } et \text{ } Q) \Longleftrightarrow non(P) \text{ } ou \text{ } non(Q)$.
- Disjonction : $non(P \text{ } ou \text{ } Q) \Longleftrightarrow non(P) \text{ } et \text{ } non(Q)$.

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Double négation** :

P	(non P)	non (non P)
V	F	
V	F	
F	V	
F	V	

$\square$

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

- Double négation : $P \iff non(non(P))$.
- Conjonction : $non(P \text{ et } Q) \iff non(P) \text{ ou } non(Q)$.
- Disjonction : $non(P \text{ ou } Q) \iff non(P) \text{ et } non(Q)$.

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Double négation** :

P	(non P)	non (non P)
V	F	V
V	F	
F	V	
F	V	

$\square$

Rudiments de Logique

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

- Double négation : $P \iff non(non(P))$.
- Conjonction : $non(P \text{ } et \text{ } Q) \iff non(P) \text{ } ou \text{ } non(Q)$.
- Disjonction : $non(P \text{ } ou \text{ } Q) \iff non(P) \text{ } et \text{ } non(Q)$.

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Double négation** :

P	(non P)	non (non P)
V	F	V
V	F	V
F	V	
F	V	

$\square$

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

- Double négation : $P \iff non(non(P))$.
- Conjonction : $non(P \text{ } et \text{ } Q) \iff non(P) \text{ } ou \text{ } non(Q)$.
- Disjonction : $non(P \text{ } ou \text{ } Q) \iff non(P) \text{ } et \text{ } non(Q)$.

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Double négation** :

P	(non P)	non (non P)
V	F	V
V	F	V
F	V	F
F	V	

$\square$

Étudions comme la négation modifie et nous permet de créer des nouvelles propositions.

Théorème (Lois de Morgan)

- Double négation : $P \Longleftrightarrow non(non(P))$.
- Conjonction : $non(P \text{ et } Q) \Longleftrightarrow non(P) \text{ ou } non(Q)$.
- Disjonction : $non(P \text{ ou } Q) \Longleftrightarrow non(P) \text{ et } non(Q)$.

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Double négation** :

P	(non P)	non (non P)
V	F	V
V	F	V
F	V	F
F	V	F

□

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V		
V	F	F	V	F		
F	V	V	F	F		
F	V	F	V	F		

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	
V	F	F	V	F		
F	V	V	F	F		
F	V	F	V	F		

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	F	F		
F	V	F	V	F		

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	F	F	V	
F	V	F	V	F		

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	F	F	V	
F	V	F	V	F	V	

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	F	F	V	
F	V	F	V	F	V	

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	
F	V	F	V	F	V	

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P ou Q	non (P ou Q)	(non P) et (non Q)
V	F	V	F	V		
V	F	F	V	V		
F	V	V	F	V		
F	V	F	V	F		

□

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P ou Q	non (P ou Q)	(non P) et (non Q)
V	F	V	F	V	F	
V	F	F	V	V		
F	V	V	F	V		
F	V	F	V	F		

$\square$

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P ou Q	non (P ou Q)	(non P) et (non Q)
V	F	V	F	V	F	
V	F	F	V	V	F	
F	V	V	F	V		
F	V	F	V	F		

$\square$

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P ou Q	non (P ou Q)	(non P) et (non Q)
V	F	V	F	V	F	
V	F	F	V	V	F	
F	V	V	F	V	F	
F	V	F	V	F		

□

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P ou Q	non (P ou Q)	(non P) et (non Q)
V	F	V	F	V	F	
V	F	F	V	V	F	
F	V	V	F	V	F	
F	V	F	V	F	V	

□

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P ou Q	non (P ou Q)	(non P) et (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	
F	V	V	F	V	F	
F	V	F	V	F	V	

□

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P ou Q	non (P ou Q)	(non P) et (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	
F	V	F	V	F	V	

$\square$

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P ou Q	non (P ou Q)	(non P) et (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	

□

Démonstration.

Negation d'une conjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P et Q	non (P et Q)	(non P) ou (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

Negation d'une disjonction :

P	(non P)	Q	(non Q)	P ou Q	non (P ou Q)	(non P) et (non Q)
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V

$\square$

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ ou } Q)$$

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ } ou \text{ } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ } et \text{ } non(Q)).$$

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ } ou \text{ } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ } et \text{ } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité :

□

Rudiments de Logique

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ ou } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ et } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V			
V	F	F	V	F			
F	V	V	F	V			
F	V	F	V	V			

□

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \iff (non(P) \text{ ou } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \iff (P \text{ et } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V		
V	F	F	V	F			
F	V	V	F	V			
F	V	F	V	V			

□

Rudiments de Logique

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ } ou \text{ } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ } et \text{ } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V		
V	F	F	V	F	F		
F	V	V	F	V			
F	V	F	V	V			

$\square$

Rudiments de Logique

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ } ou \text{ } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ } et \text{ } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V		
V	F	F	V	F	F		
F	V	V	F	V	V		
F	V	F	V	V			

$\square$

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ ou } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ et } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V		
V	F	F	V	F	F		
F	V	V	F	V	V		
F	V	F	V	V	V		

□

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ ou } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ et } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V	F	
V	F	F	V	F	F		
F	V	V	F	V	V		
F	V	F	V	V	V		

□

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \ ou \ Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \ et \ non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V	F	
V	F	F	V	F	F	V	
F	V	V	F	V	V		
F	V	F	V	V	V		

□

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \iff (non(P) \text{ } ou \text{ } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \iff (P \text{ } et \text{ } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V	F	
V	F	F	V	F	F	V	
F	V	V	F	V	V	F	
F	V	F	V	V	V		

$\square$

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ } ou \text{ } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ } et \text{ } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V	F	
V	F	F	V	F	F	V	
F	V	V	F	V	V	F	
F	V	F	V	V	V	F	

□

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ ou } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ et } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	
F	V	V	F	V	V	F	
F	V	F	V	V	V	F	

$\square$

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \text{ ou } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \text{ et } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	
F	V	F	V	V	V	F	

$\square$

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \iff (non(P) \text{ ou } Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \iff (P \text{ et } non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	

$\square$

Finalement, étudions comme la négation modifie l'implication.

Proposition

Nous avons

$$(P \Longrightarrow Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (non(P) \ ou \ Q),$$

et par négation :

$$non(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (P \ et \ non(Q)).$$

Démonstration.

On écrit les tables de vérité : **Negation d'une implication :**

P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$ ou Q	$\overline{P \Rightarrow Q}$	P et $\overline{Q}$
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	F

□

Quantificateurs

Que signifie ?

$$\sin x = x$$

Quantificateurs

Que signifie ?

$$\sin x = x$$

1. Résoudre dans $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x$

Quantificateurs

Que signifie ?

$$\sin x = x$$

1. Résoudre dans $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x$
2. Pour tout réel x, $\sin x = x$

Quantificateurs

Que signifie ?

$$\sin x = x$$

1. Résoudre dans $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x$
2. Pour tout réel x, $\sin x = x$
3. Il existe un réel x tel que $\sin x = x$

Quantificateurs

Que signifie ?

$$\sin x = x$$

1. Résoudre dans $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x$
2. Pour tout réel x, $\sin x = x$
3. Il existe un réel x tel que $\sin x = x$
4. x un point du plan : $\sin x = x$ n'est pas une proposition valide.

Quantificateurs

Les deux propriétés

$$\ll z \text{ est pair } \gg$$
$$\text{et } \ll z \text{ est paire } \gg$$

sont ambigües : on ne sait pas ce que représente z.

Quantificateurs

Les deux propriétés

$$\ll z \text{ est pair} \gg$$
$$\text{et} \ll z \text{ est paire} \gg$$

sont ambigües : on ne sait pas ce que représente z.

On évite donc d'écrire des propriétés sans préciser ce que représente z.

Les deux propriétés

≪ z est pair ≫
et ≪ z est paire ≫

sont ambigües : on ne sait pas ce que représente z.

On évite donc d'écrire des propriétés sans préciser ce que représente z.
On écrira donc

≪ Tout entier z est pair ≫
et ≪ Il existe une fonction z qui est paire ≫

Quantificateurs

Les deux propriétés

$$\ll z \text{ est pair} \gg$$
$$\text{et} \ll z \text{ est paire} \gg$$

sont ambigües : on ne sait pas ce que représente z.

On évite donc d'écrire des propriétés sans préciser ce que représente z.
On écrira donc

$$\ll \text{Tout entier } z \text{ est pair} \gg$$
$$\text{et} \ll \text{Il existe une fonction } z \text{ qui est paire} \gg$$

Il faut donc préciser ce qu'est z et, très souvent, à quel ensemble il appartient (ce qui revient la plupart du temps à définir ses propriétés).
Pour cela on utilise les quantificateurs : ≪ Pour tout ≫et ≪ Il existe ≫

Quantificateurs

Un autre outil pour définir de nouvelles propositions est la notion de quantificateur.

Définition (Quantificateur universel $\forall$)

Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie

Quantificateurs

Un autre outil pour définir de nouvelles propositions est la notion de quantificateur.

Définition (Quantificateur universel $\forall$)

Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie ≪ pour tout x ≫ , ≪ quelque soit x ≫ . *Ainsi la proposition :*

$$\forall x \in E,\ P(x),$$

se lit ≪ *Pour tout x appartenant à l'ensemble E, $P(x)$.* ≫

Quantificateurs

Un autre outil pour définir de nouvelles propositions est la notion de quantificateur.

Définition (Quantificateur universel $\forall$)

Le symbole $\forall$ *placé devant une variable* x *signifie* ≪ pour tout x ≫ , ≪ quelque soit x ≫ .
Ainsi la proposition :

$$\forall x \in E,\ P(x),$$

se lit ≪ *Pour tout* x *appartenant à l'ensemble* $E,\ P(x)$. ≫

Remarque

La proposition : ≪ $\forall x \in E,\ P(x)$ ≫ est donc

Quantificateurs

Un autre outil pour définir de nouvelles propositions est la notion de quantificateur.

Définition (Quantificateur universel $\forall$)

Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie « pour tout x » , « quelque soit x » *.*
Ainsi la proposition :

$$\forall x \in E,\ P(x),$$

se lit « *Pour tout x appartenant à l'ensemble E, $P(x)$.* »

Remarque

La proposition : « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est donc

- **vraie** si tout objet dans E a la propriété P, et

Quantificateurs

Un autre outil pour définir de nouvelles propositions est la notion de quantificateur.

Définition (Quantificateur universel $\forall$)

Le symbole $\forall$ *placé devant une variable* x *signifie* $\ll$ pour tout x $\gg$, $\ll$ quelque soit x $\gg$.
Ainsi la proposition :

$$\forall x \in E,\ P(x),$$

se lit $\ll$ *Pour tout* x *appartenant à l'ensemble* $E,\ P(x).$ $\gg$

Remarque

La proposition : $\ll \forall x \in E,\ P(x) \gg$ est donc

- **vraie** si tout objet dans E a la propriété P, et
- **fausse** sinon : si au moins un objet dans E n'a pas la propriété P.

Quantificateurs

Un autre outil pour définir de nouvelles propositions est la notion de quantificateur.

Définition (Quantificateur universel $\forall$)

Le symbole $\forall$ *placé devant une variable* x *signifie* $\ll$ pour tout $x \gg$, $\ll$ quelque soit $x \gg$.
Ainsi la proposition :

$$\forall x \in E,\ P(x),$$

se lit $\ll$ *Pour tout* x *appartenant à l'ensemble* $E,\ P(x).$ $\gg$

Remarque

La proposition : $\ll \forall x \in E,\ P(x) \gg$ est donc

- **vraie** si tout objet dans E a la propriété P, et
- **fausse** sinon : si au moins un objet dans E n'a pas la propriété P.

Exemple :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$ est une proposition

Quantificateurs

Un autre outil pour définir de nouvelles propositions est la notion de quantificateur.

Définition (Quantificateur universel $\forall$)

Le symbole $\forall$ *placé devant une variable* x *signifie* $\ll$ pour tout x $\gg$, $\ll$ quelque soit x $\gg$.
Ainsi la proposition :

$$\forall x \in E,\ P(x),$$

se lit $\ll$ *Pour tout* x *appartenant à l'ensemble* $E,\ P(x).$ $\gg$

Remarque

La proposition : $\ll \forall x \in E,\ P(x) \gg$ est donc

- **vraie** si tout objet dans E a la propriété P, et
- **fausse** sinon : si au moins un objet dans E n'a pas la propriété P.

Exemple :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$ est une proposition vraie, car le carré d'un réel est toujours positif.

Quantificateurs

Un autre outil pour définir de nouvelles propositions est la notion de quantificateur.

Définition (Quantificateur universel $\forall$)

Le symbole $\forall$ *placé devant une variable* x *signifie* $\ll$ pour tout x $\gg$, $\ll$ quelque soit x $\gg$.
Ainsi la proposition :

$$\forall x \in E, \ P(x),$$

se lit $\ll$ *Pour tout* x *appartenant à l'ensemble* $E, \ P(x).$ $\gg$

Remarque

La proposition : $\ll \forall x \in E, \ P(x) \gg$ est donc

- **vraie** si tout objet dans E a la propriété P, et
- **fausse** sinon : si au moins un objet dans E n'a pas la propriété P.

Exemple :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \neq -1$ est une proposition vraie, car le carré d'un réel est toujours positif.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \leq 1$

Quantificateurs

Un autre outil pour définir de nouvelles propositions est la notion de quantificateur.

Définition (Quantificateur universel $\forall$)

Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie « pour tout x » , « quelque soit x » . *Ainsi la proposition :*

$$\forall x \in E,\ P(x),$$

se lit « *Pour tout x appartenant à l'ensemble E, $P(x)$.* »

Remarque

La proposition : « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est donc

- **vraie** si tout objet dans E a la propriété P, et
- **fausse** sinon : si au moins un objet dans E n'a pas la propriété P.

Exemple :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq -1$ est une proposition vraie, car le carré d'un réel est toujours positif.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \leq 1$ est une proposition vraie.

Quantificateurs

Définition (Quantificateur existentiel $\exists$)

Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie

Quantificateurs

Définition (Quantificateur existentiel $\exists$)

Le symbole $\exists$ *placé devant une variable* x *signifie* « il existe (au moins) un x » .

Quantificateurs

Définition (Quantificateur existentiel $\exists$)

Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie « il existe (au moins) un x » . *La proposition*

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

se lit donc

Quantificateurs

Définition (Quantificateur existentiel $\exists$)

Le symbole $\exists$ *placé devant une variable* x *signifie* $\ll$ il existe (au moins) un $x \gg$. *La proposition*

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

se lit donc $\ll$ *Il existe un élément* x *de* E *tel que* $P(x)$. $\gg$

Quantificateurs

Définition (Quantificateur existentiel $\exists$)

Le symbole $\exists$ *placé devant une variable* x *signifie* ≪ il existe (au moins) un x ≫ . *La proposition*

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

se lit donc ≪ *Il existe un élément* x *de* E *tel que* $P(x)$. ≫

Le symbole $\exists!$ *placé devant une variable* x *signifie*

Quantificateurs

Définition (Quantificateur existentiel $\exists$)

Le symbole $\exists$ *placé devant une variable* x *signifie* « il existe (au moins) un x » . *La proposition*

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

se lit donc « *Il existe un élément* x *de* E *tel que* $P(x)$. »

Le symbole $\exists!$ *placé devant une variable* x *signifie*

il existe un unique x.

Quantificateurs

Définition (Quantificateur existentiel $\exists$)

Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie « il existe (au moins) un x » . *La proposition*

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

se lit donc « *Il existe un élément x de E tel que $P(x)$.* »

Le symbole $\exists!$ placé devant une variable x signifie

il existe un unique x.

Remarque

La proposition : $\exists x \in E,\ P(x)$ est donc

- **vraie** si au moins un objet dans E a la propriété P, et
- **fausse** sinon : si aucun objet dans E n'a la propriété P.

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2, 3, 4, \cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition

Exemples :

- « $\exists n \in \{2, 3, 4, \cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2,3,4,\cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2, 3, 4, \cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2, 3, 4, \cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists ! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2,3,4,\cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition vraie. En effet 1 est le seul entier satisfaisant la proposition.

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2,3,4,\cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition vraie. En effet 1 est le seul entier satisfaisant la proposition.
- « $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists p \in \mathbb{N},\ pr \in \mathbb{Z}$ » est une proposition

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2,3,4,\cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition vraie. En effet 1 est le seul entier satisfaisant la proposition.
- « $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists p \in \mathbb{N},\ pr \in \mathbb{Z}$ » est une proposition vraie (définition).

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2,3,4,\cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists ! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition vraie. En effet 1 est le seul entier satisfaisant la proposition.
- « $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists p \in \mathbb{N},\ pr \in \mathbb{Z}$ » est une proposition vraie (définition).

Remarque. L'ordre des quantificateurs est important.

Exemples :

- « $\exists n \in \{2, 3, 4, \cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition vraie. En effet 1 est le seul entier satisfaisant la proposition.
- « $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists p \in \mathbb{N},\ pr \in \mathbb{Z}$ » est une proposition vraie (définition).

Remarque. L'ordre des quantificateurs est important.
On peut le constater en comparant par exemple les propositions :

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2,3,4,\cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition vraie. En effet 1 est le seul entier satisfaisant la proposition.
- « $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists p \in \mathbb{N},\ pr \in \mathbb{Z}$ » est une proposition vraie (définition).

Remarque. L'ordre des quantificateurs est important.
On peut le constater en comparant par exemple les propositions :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = y$

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2, 3, 4, \cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition vraie. En effet 1 est le seul entier satisfaisant la proposition.
- « $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists p \in \mathbb{N},\ pr \in \mathbb{Z}$ » est une proposition vraie (définition).

Remarque. L'ordre des quantificateurs est important.
On peut le constater en comparant par exemple les propositions :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = y$, est une proposition vraie.

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2,3,4,\cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition vraie. En effet 1 est le seul entier satisfaisant la proposition.
- « $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists p \in \mathbb{N},\ pr \in \mathbb{Z}$ » est une proposition vraie (définition).

Remarque. L'ordre des quantificateurs est important.
On peut le constater en comparant par exemple les propositions :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = y$, est une proposition vraie.
- $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$

Quantificateurs

Exemples :

- « $\exists n \in \{2, 3, 4, \cdots\},\ n \neq 23,\ (23/n) \in \mathbb{N}$ » est une proposition fausse.
- « $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ » est une proposition vraie car par example $i^2 = -1$.
- « $\exists! n \in \mathbb{N},\ 1 \leq 2n \leq 3$ » est une proposition vraie. En effet 1 est le seul entier satisfaisant la proposition.
- « $\forall r \in \mathbb{Q},\ \exists p \in \mathbb{N},\ pr \in \mathbb{Z}$ » est une proposition vraie (définition).

Remarque. L'ordre des quantificateurs est important.
On peut le constater en comparant par exemple les propositions :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = y$, est une proposition vraie.
- $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = y$, est une proposition fausse.

Quantificateurs

Théorème (Négation des quantificateurs)

- *La négation de :* $\forall x \in E, P(x)$ *est*

$$\exists x \in E,\ non\ P(x).$$

Quantificateurs

Théorème (Négation des quantificateurs)

- *La négation de :* $\forall x \in E, P(x)$ *est*

$$\exists x \in E, \; non \; P(x).$$

- *La négation de :* $\exists x \in E, \; P(x)$ *est*

Quantificateurs

Théorème (Négation des quantificateurs)

- *La négation de :* $\forall x \in E, P(x)$ *est*

$$\exists x \in E, \ \text{non } P(x).$$

- *La négation de :* $\exists x \in E, \ P(x)$ *est*

$$\forall x \in E, \ \text{non } P(x).$$

Quantificateurs

Théorème (Négation des quantificateurs)

- *La négation de :* $\forall x \in E, P(x)$ *est*

$$\exists x \in E,\ \text{non } P(x).$$

- *La négation de :* $\exists x \in E,\ P(x)$ *est*

$$\forall x \in E,\ \text{non } P(x).$$

Remarque : C'est-à dire, pour nier une proposition contenant des quantificateurs, on change les $\forall$ en $\exists$ et réciproquement

Quantificateurs

Théorème (Négation des quantificateurs)

- *La négation de :* $\forall x \in E, P(x)$ *est*

$$\exists x \in E, \ \textit{non } P(x).$$

- *La négation de :* $\exists x \in E, \ P(x)$ *est*

$$\forall x \in E, \ \textit{non } P(x).$$

Remarque : C'est-à dire, pour nier une proposition contenant des quantificateurs, on change les $\forall$ en $\exists$ et réciproquement , puis on nie la conclusion.

Théorème (Négation des quantificateurs)

- *La négation de :* $\forall x \in E, P(x)$ *est*

$$\exists x \in E,\ non\ P(x).$$

- *La négation de :* $\exists x \in E,\ P(x)$ *est*

$$\forall x \in E,\ non\ P(x).$$

Remarque : C'est-à dire, pour nier une proposition contenant des quantificateurs, on change les $\forall$ en $\exists$ et réciproquement , puis on nie la conclusion. La négation de

$$\forall x, \exists y,\ P(x, y).$$

Théorème (Négation des quantificateurs)

- *La négation de :* $\forall x \in E, P(x)$ *est*

$$\exists x \in E,\ non\ P(x).$$

- *La négation de :* $\exists x \in E,\ P(x)$ *est*

$$\forall x \in E,\ non\ P(x).$$

Remarque : C'est-à dire, pour nier une proposition contenant des quantificateurs, on change les $\forall$ en $\exists$ et réciproquement , puis on nie la conclusion. La négation de

$$\forall x, \exists y,\ P(x,y).$$

est

$$\exists x,\ \forall y,\ nonP(x,y).$$

Quantificateurs

Exemples : Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x^2 + \cos x^2 = 1 \quad \exists x \in \mathbb{R},\ \sin x^2 + \cos x^2 \neq 1$$

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 = 0$$

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

Exemples : Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x^2 + \cos x^2 = 1 \quad \exists x \in \mathbb{R},\ \sin x^2 + \cos x^2 \neq 1$$

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 \neq 0$$

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

Quantificateurs

Exemples : Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x^2 + \cos x^2 = 1 \quad \exists x \in \mathbb{R},\ \sin x^2 + \cos x^2 \neq 1$$

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 \neq 0$$

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$$

Ecriture

Mentionnons que l'usage des symboles $\exists$ et $\forall$ est restreint aux propositions. Ces symboles sont des quantificateurs, ils n'ont leur place qu'à l'intérieur d'une proposition écrite sous forme symbolique.

Ecriture

Mentionnons que l'usage des symboles $\exists$ et $\forall$ est restreint aux propositions. Ces symboles sont des quantificateurs, ils n'ont leur place qu'à l'intérieur d'une proposition écrite sous forme symbolique.
Dans une phrase en français, nous utilisons **pour tout** et **il existe**.

Ecriture

Mentionnons que l'usage des symboles $\exists$ et $\forall$ est restreint aux propositions. Ces symboles sont des quantificateurs, ils n'ont leur place qu'à l'intérieur d'une proposition écrite sous forme symbolique.
Dans une phrase en français, nous utilisons **pour tout** et **il existe**.
De même, nous n'utiliserons pas « $\Rightarrow$ »mais les termes **alors** ou **donc**.

Nous avons introduit la notion de proposition et donné une liste d'outils pour construire des propositions plus complexes à partir de propositions simples.

Modes de Raisonnement

Nous avons introduit la notion de proposition et donné une liste d'outils pour construire des propositions plus complexes à partir de propositions simples.
Mais il demeure une question importante, comment fait-on pour vérifier la véracité d'une proposition ?

Modes de Raisonnement

Nous avons introduit la notion de proposition et donné une liste d'outils pour construire des propositions plus complexes à partir de propositions simples.
Mais il demeure une question importante, comment fait-on pour vérifier la véracité d'une proposition ?
Pour cela nous allons à présent introduire différents modes de raisonnement qui vont nous permettre de montrer ou, au moins, de rendre plus facile la preuve d'une assertion.

Modes de Raisonnement

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :**

Modes de Raisonnement

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :** On montre que, si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie.

Modes de Raisonnement

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :** On montre que, si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie. Quand on procède ainsi pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on écrit **sans réfléchir :**

$$\text{Supposons P vraie. Montrons que } Q \text{ est vraie.}$$

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\right\} \text{Preuve de } Q.$$

Modes de Raisonnement

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :** On montre que, si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie. Quand on procède ainsi pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on écrit **sans réfléchir :**

Supposons P vraie. Montrons que Q est vraie.

$$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right\} \text{Preuve de } Q.$$

Exemple : Montrer que si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Modes de Raisonnement

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :** On montre que, si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie. Quand on procède ainsi pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on écrit **sans réfléchir :**

$$\begin{array}{c} \text{Supposons P vraie. Montrons que } Q \text{ est vraie.} \\ \left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\right\} \text{Preuve de } Q. \end{array}$$

Exemple : Montrer que si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est un entier pair.

Modes de Raisonnement

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :** On montre que, si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie. Quand on procède ainsi pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on écrit **sans réfléchir :**

$$\text{Supposons P vraie. Montrons que } Q \text{ est vraie.}$$

$$\left.\vdots \qquad\qquad \right\} \text{Preuve de } Q.$$

Exemple : Montrer que si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est un entier pair. Montrons que n^2 est pair.

Modes de Raisonnement

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :** On montre que, si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie. Quand on procède ainsi pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on écrit **sans réfléchir :**

$$\text{Supposons P vraie. Montrons que } Q \text{ est vraie.}$$

$$\left.\begin{array}{c} \\ \vdots \\ \\ \end{array}\right\} \text{Preuve de } Q.$$

Exemple : Montrer que si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est un entier pair. Montrons que n^2 est pair. Comme n est un entier pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

Modes de Raisonnement

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :** On montre que, si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie. Quand on procède ainsi pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on écrit **sans réfléchir :**

$$\text{Supposons P vraie. Montrons que } Q \text{ est vraie.}$$

$$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\quad\right\} \text{Preuve de } Q.$$

Exemple : Montrer que si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est un entier pair. Montrons que n^2 est pair. Comme n est un entier pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
Donc

$$n^2 = 4k^2$$

Modes de Raisonnement

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :** On montre que, si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie. Quand on procède ainsi pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on écrit **sans réfléchir :**

$$\begin{array}{c} \text{Supposons P vraie. Montrons que } Q \text{ est vraie.} \\ \left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\right\} \text{Preuve de } Q. \end{array}$$

Exemple : Montrer que si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est un entier pair. Montrons que n^2 est pair. Comme n est un entier pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
Donc

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Pour montrer une **implication :** $P \Longrightarrow Q$, plusieurs types de raisonnement peuvent être mis en oeuvre.

1. **Raisonnement direct :** On montre que, si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie. Quand on procède ainsi pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on écrit **sans réfléchir :**

$$\text{Supposons P vraie. Montrons que } Q \text{ est vraie.}$$

$$\left.\vdots \quad\right\} \text{Preuve de } Q.$$

Exemple : Montrer que si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que n est un entier pair. Montrons que n^2 est pair. Comme n est un entier pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
Donc

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

C'est-à-dire n^2 est pair.

Modes de raisonnement

2. **Raisonnement par contraposition :** $non(Q) \Rightarrow non(P)$
   Rappelons que si la proposition

$$non(Q) \Longrightarrow non(P) \quad \text{est vraie,}$$

Modes de raisonnement

2. **Raisonnement par contraposition :** $non(Q) \Rightarrow non(P)$
Rappelons que si la proposition

$$non(Q) \Longrightarrow non(P) \quad \text{est vraie,}$$

alors la proposition

$$P \Longrightarrow Q \quad \text{est vraie.}$$

Modes de raisonnement

2. **Raisonnement par contraposition :** $non(Q) \Rightarrow non(P)$
   Rappelons que si la proposition

   $$non(Q) \Longrightarrow non(P) \quad \text{est vraie,}$$

   alors la proposition

   $$P \Longrightarrow Q \quad \text{est vraie.}$$

   C'est-à-dire, pour montrer $P \Rightarrow Q$

Modes de raisonnement

2. **Raisonnement par contraposition :** $non(Q) \Rightarrow non(P)$
   Rappelons que si la proposition
   $$non(Q) \Longrightarrow non(P) \quad \text{est vraie,}$$
   alors la proposition
   $$P \Longrightarrow Q \quad \text{est vraie.}$$
   C'est-à-dire, pour montrer $P \Rightarrow Q$ il suffit de montrer
   $$non(Q) \Rightarrow non(P).$$

Modes de raisonnement

2. **Raisonnement par contraposition :** $non(Q) \Rightarrow non(P)$
   Rappelons que si la proposition

$$non(Q) \Longrightarrow non(P) \quad \text{est vraie,}$$

alors la proposition

$$P \Longrightarrow Q \quad \text{est vraie.}$$

C'est-à-dire, pour montrer $P \Rightarrow Q$ il suffit de montrer

$$non(Q) \Rightarrow non(P).$$

Pour cela on écrit sans réfléchir :

Supposons $non(Q)$ vraie. Montrons que $non(P)$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\right\} \text{Preuve de } non(P).$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : Nous devons montrer la proposition

si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : Nous devons montrer la proposition

si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

C'est-à-dire, nous devons montrer la proposition

si n est impair, alors n^2 est impair.

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : Nous devons montrer la proposition

si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

C'est-à-dire, nous devons montrer la proposition

si n est impair, alors n^2 est impair.

Comme n est un entier impair

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : Nous devons montrer la proposition

si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

C'est-à-dire, nous devons montrer la proposition

si n est impair, alors n^2 est impair.

Comme n est un entier impair , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : Nous devons montrer la proposition

si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

C'est-à-dire, nous devons montrer la proposition

si n est impair, alors n^2 est impair.

Comme n est un entier impair , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Donc

$$n^2 = (2k+1)^2$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : Nous devons montrer la proposition

si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

C'est-à-dire, nous devons montrer la proposition

si n est impair, alors n^2 est impair.

Comme n est un entier impair , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Donc

$$n^2 = (2k+1)^2$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : Nous devons montrer la proposition

si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

C'est-à-dire, nous devons montrer la proposition

si n est impair, alors n^2 est impair.

Comme n est un entier impair , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Donc

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : Nous devons montrer la proposition

si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

C'est-à-dire, nous devons montrer la proposition

si n est impair, alors n^2 est impair.

Comme n est un entier impair , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Donc

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Exemple : Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : Nous devons montrer la proposition

si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

C'est-à-dire, nous devons montrer la proposition

si n est impair, alors n^2 est impair.

Comme n est un entier impair , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Donc

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

C'est-à-dire n^2 est impair.

Modes de raisonnement

Un type de raisonnement qui va se montrer très utile dans la suite est le **raisonnement par l'absurde.** Pour pouvoir l'introduire, appelons d'abord **contradiction** toute proposition de la forme :

$$Q \text{ et } non(Q)$$

Modes de raisonnement

Un type de raisonnement qui va se montrer très utile dans la suite est le **raisonnement par l'absurde.** Pour pouvoir l'introduire, appelons d'abord **contradiction** toute proposition de la forme :

$$Q \text{ et } non(Q)$$

Le principe du raisonnement par l'absurde s'énonce alors ainsi :

Modes de raisonnement

Un type de raisonnement qui va se montrer très utile dans la suite est le **raisonnement par l'absurde.** Pour pouvoir l'introduire, appelons d'abord **contradiction** toute proposition de la forme :

$$Q \text{ et } non(Q)$$

Le principe du raisonnement par l'absurde s'énonce alors ainsi :

Si d'une proposition on arrive à tirer une contradiction, c'est qu'elle est fausse.

Modes de raisonnement

Un type de raisonnement qui va se montrer très utile dans la suite est le **raisonnement par l'absurde.** Pour pouvoir l'introduire, appelons d'abord **contradiction** toute proposition de la forme :

$$Q \text{ et } non(Q)$$

Le principe du raisonnement par l'absurde s'énonce alors ainsi :

Si d'une proposition on arrive à tirer une contradiction, c'est qu'elle est fausse.

Donc, quand on veut montrer qu'une proposition P est vraie, on peut raisonner par l'absurde de la manière suivante :

Modes de raisonnement

Un type de raisonnement qui va se montrer très utile dans la suite est le **raisonnement par l'absurde.** Pour pouvoir l'introduire, appelons d'abord **contradiction** toute proposition de la forme :

$$Q \text{ et } non(Q)$$

Le principe du raisonnement par l'absurde s'énonce alors ainsi :

Si d'une proposition on arrive à tirer une contradiction, c'est qu'elle est fausse.

Donc, quand on veut montrer qu'une proposition P est vraie, on peut raisonner par l'absurde de la manière suivante :

Faisons l'hypothèse que P est **fausse** (ou que ($non(P)$) est **vraie**).

$$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\quad\right\}\text{ Obtention d'une contradiction.}$$

Modes de raisonnement

Un type de raisonnement qui va se montrer très utile dans la suite est le **raisonnement par l'absurde.** Pour pouvoir l'introduire, appelons d'abord **contradiction** toute proposition de la forme :

$$Q \text{ et } non(Q)$$

Le principe du raisonnement par l'absurde s'énonce alors ainsi :

Si d'une proposition on arrive à tirer une contradiction, c'est qu'elle est fausse.

Donc, quand on veut montrer qu'une proposition P est vraie, on peut raisonner par l'absurde de la manière suivante :

Faisons l'hypothèse que P est **fausse** (ou que ($non(P)$) est **vraie**).

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\quad\right\} \text{Obtention d'une contradiction.}$$

Contradiction ! C'est donc l'hypothèse de départ qui est fausse. Par conséquent P est vraie.

Exemple : On sait que π est irrationnel.
Montrer que « $\dfrac{\pi}{3}$ est irrationnel. »
Preuve : Supposons par l'absurde que $\frac{\pi}{3}$ est rationnel.

Modes de raisonnement

Exemple : On sait que π est irrationnel.
Montrer que « $\dfrac{\pi}{3}$ est irrationnel. »
Preuve : Supposons par l'absurde que $\frac{\pi}{3}$ est rationnel.

Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{p}{q}$$

Modes de raisonnement

Exemple : On sait que π est irrationnel.
Montrer que « $\dfrac{\pi}{3}$ est irrationnel. »
Preuve : Supposons par l'absurde que $\frac{\pi}{3}$ est rationnel.

Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{p}{q}$$

Il vient

$$\pi = \frac{3p}{q}$$

Exemple : On sait que π est irrationnel.
Montrer que « $\dfrac{\pi}{3}$ est irrationnel. »
Preuve : Supposons par l'absurde que $\frac{\pi}{3}$ est rationnel.

Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{p}{q}$$

Il vient

$$\pi = \frac{3p}{q}$$

donc π est rationnel.

Exemple : On sait que π est irrationnel.
Montrer que « $\dfrac{\pi}{3}$ est irrationnel. »
Preuve : Supposons par l'absurde que $\frac{\pi}{3}$ est rationnel.

Soient $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{p}{q}$$

Il vient

$$\pi = \frac{3p}{q}$$

donc π est rationnel.
C'est absurde on peut donc conclure que « $\dfrac{\pi}{3}$ est irrationnel ».

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun).

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun).
L'égalité :

$$p^2 = (\sqrt{2}q)^2 = 2q^2$$

montre que p^2 est pair

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun).
L'égalité :

$$p^2 = (\sqrt{2}q)^2 = 2q^2$$

montre que p^2 est pair , et donc que p est pair d'après l'exemple précedent.

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun).
L'égalité :

$$p^2 = (\sqrt{2}q)^2 = 2q^2$$

montre que p^2 est pair , et donc que p est pair d'après l'exemple précedent.
Ainsi

$$p = 2p', \quad \text{pour un certain } p' \in \mathbb{Z}.$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun).
L'égalité :

$$p^2 = (\sqrt{2}q)^2 = 2q^2$$

montre que p^2 est pair , et donc que p est pair d'après l'exemple précedent.
Ainsi

$$p = 2p', \quad \text{pour un certain } p' \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent

$$q^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun).
L'égalité :

$$p^2 = (\sqrt{2}q)^2 = 2q^2$$

montre que p^2 est pair , et donc que p est pair d'après l'exemple précedent.
Ainsi

$$p = 2p', \quad \text{pour un certain } p' \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent

$$q^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun).
L'égalité :

$$p^2 = (\sqrt{2}q)^2 = 2q^2$$

montre que p^2 est pair , et donc que p est pair d'après l'exemple précedent.
Ainsi

$$p = 2p', \quad \text{pour un certain } p' \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent

$$q^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2p'}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun).
L'égalité :

$$p^2 = (\sqrt{2}q)^2 = 2q^2$$

montre que p^2 est pair , et donc que p est pair d'après l'exemple précedent.
Ainsi

$$p = 2p', \quad \text{pour un certain } p' \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent

$$q^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2p'}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4(p')^2}{2}$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun).
L'égalité :

$$p^2 = (\sqrt{2}q)^2 = 2q^2$$

montre que p^2 est pair , et donc que p est pair d'après l'exemple précedent.
Ainsi

$$p = 2p', \quad \text{pour un certain } p' \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent

$$q^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2p'}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4(p')^2}{2} = 2(p')^2.$$

Ceci montre que q^2 est pair et donc que q est pair.

Exemple : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Supposons par l'absurde que 2 est rationnel et écrivons-le donc sous forme **irréductible** :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (n'ont pas de diviseur commun). L'égalité :

$$p^2 = (\sqrt{2}q)^2 = 2q^2$$

montre que p^2 est pair , et donc que p est pair d'après l'exemple précedent. Ainsi

$$p = 2p', \quad \text{pour un certain } p' \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent

$$q^2 = \left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{2p'}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4(p')^2}{2} = 2(p')^2.$$

Ceci montre que q^2 est pair et donc que q est pair. Disons

$$q = 2q', \text{ pour un certain } q' \in \mathbb{Z}.$$

Modes de raisonnement

Nous avions supposé la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible , mais finalement nous l'avons réduite

$$\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}.$$

Modes de raisonnement

Nous avions supposé la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible , mais finalement nous l'avons réduite

$$\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}.$$

Contradiction !

Modes de raisonnement

Nous avions supposé la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible , mais finalement nous l'avons réduite

$$\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}.$$

Contradiction ! Comme voulu, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Modes de raisonnement

Remarque : Le raisonnement par l'absurde nous donne une autre façon de montrer l'implication

$$P \Longrightarrow Q.$$

En effet, comme $P \Rightarrow Q$ est équivalent à la proposition

$$non(P) \text{ ou } Q,$$

Modes de raisonnement

Remarque : Le raisonnement par l'absurde nous donne une autre façon de montrer l'implication

$$P \Longrightarrow Q.$$

En effet, comme $P \Rightarrow Q$ est équivalent à la proposition

$$non(P) \text{ ou } Q,$$

on en déduit que si la proposition

$$P \text{ et } non(Q) = non(non(P) \text{ ou } Q)$$

conduit à une contradiction

Remarque : Le raisonnement par l'absurde nous donne une autre façon de montrer l'implication

$$P \Longrightarrow Q.$$

En effet, comme $P \Rightarrow Q$ est équivalent à la proposition

$$non(P) \text{ ou } Q,$$

on en déduit que si la proposition

$$P \text{ et } non(Q) = non(non(P) \text{ ou } Q)$$

conduit à une contradiction , alors $P \Longrightarrow Q$ est vraie.

Modes de raisonnement

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Modes de raisonnement

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Preuve : Supposons que n est un entier positif et que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel a.

Modes de raisonnement

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Preuve : Supposons que n est un entier positif et que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel a. C'est-à-dire

$$a^2 = n^2 + 1.$$

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Preuve : Supposons que n est un entier positif et que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel a. C'est-à-dire

$$a^2 = n^2 + 1.$$

Donc

$$1 = a^2 - n^2$$

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Preuve : Supposons que n est un entier positif et que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel a. C'est-à-dire

$$a^2 = n^2 + 1.$$

Donc

$$1 = a^2 - n^2 = (a - n)(a + n).$$

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Preuve : Supposons que n est un entier positif et que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel a. C'est-à-dire

$$a^2 = n^2 + 1.$$

Donc

$$1 = a^2 - n^2 = (a - n)(a + n).$$

Or $n > 0$ et $a \geq 0$ donc $a + n > 0$.

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Preuve : Supposons que n est un entier positif et que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel a. C'est-à-dire

$$a^2 = n^2 + 1.$$

Donc

$$1 = a^2 - n^2 = (a - n)(a + n).$$

Or $n > 0$ et $a \geq 0$ donc $a + n > 0$.
$a + n$ est un diviseur de 1 donc $a + n = 1$ et par conséquent $a - n = 1$.

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Preuve : Supposons que n est un entier positif et que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel a. C'est-à-dire

$$a^2 = n^2 + 1.$$

Donc

$$1 = a^2 - n^2 = (a - n)(a + n).$$

Or $n > 0$ et $a \geq 0$ donc $a + n > 0$.
$a + n$ est un diviseur de 1 donc $a + n = 1$ et par conséquent $a - n = 1$.
On effectue la différence des deux égalités pour obtenir $2n = 0$ donc $n = 0$.

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Preuve : Supposons que n est un entier positif et que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel a. C'est-à-dire

$$a^2 = n^2 + 1.$$

Donc

$$1 = a^2 - n^2 = (a - n)(a + n).$$

Or $n > 0$ et $a \geq 0$ donc $a + n > 0$.
$a + n$ est un diviseur de 1 donc $a + n = 1$ et par conséquent $a - n = 1$.
On effectue la différence des deux égalités pour obtenir $2n = 0$ donc $n = 0$.
Puisque n est strictement positif, cela est une **contradiction**.

Exemple : Démontrons, en raisonnant par l'absurde, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Preuve : Supposons que n est un entier positif et que $n^2 + 1$ est le carré d'un entier naturel a. C'est-à-dire

$$a^2 = n^2 + 1.$$

Donc

$$1 = a^2 - n^2 = (a - n)(a + n).$$

Or $n > 0$ et $a \geq 0$ donc $a + n > 0$.
$a + n$ est un diviseur de 1 donc $a + n = 1$ et par conséquent $a - n = 1$.
On effectue la différence des deux égalités pour obtenir $2n = 0$ donc $n = 0$.
Puisque n est strictement positif, cela est une **contradiction**.
D'où on conclut que $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Modes de raisonnement

Pour montrer une **équivalence :**

$$P \iff Q,$$

on a deux possibilités :

- Soit on raisonne par double implication

Modes de raisonnement

Pour montrer une **équivalence :**

$$P \iff Q,$$

on a deux possibilités :

- Soit on raisonne par double implication et on montre séparément les propositions
$$P \implies Q \quad \text{et} \quad Q \implies P.$$

Modes de raisonnement

Pour montrer une **équivalence :**

$$P \iff Q,$$

on a deux possibilités :

- Soit on raisonne par double implication et on montre séparément les propositions

$$P \Longrightarrow Q \quad \text{et} \quad Q \Longrightarrow P.$$

C'est-à-dire on écrit

Pour montrer une **équivalence :**

$$P \iff Q,$$

on a deux possibilités :

- Soit on raisonne par double implication et on montre séparément les propositions
$$P \Longrightarrow Q \quad \text{et} \quad Q \Longrightarrow P.$$

C'est-à-dire on écrit

$$\text{Supposons P vraie. Montrons que } Q \text{ est vraie.}$$
$$\left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\right\} \text{Preuve de } Q.$$

Modes de raisonnement

Pour montrer une **équivalence :**

$$P \iff Q,$$

on a deux possibilités :

- Soit on raisonne par double implication et on montre séparément les propositions
$$P \implies Q \quad \text{et} \quad Q \implies P.$$

C'est-à-dire on écrit

$$\text{Supposons P vraie. Montrons que } Q \text{ est vraie.}$$

$$\left.\begin{matrix} \vdots \end{matrix}\quad\right\} \text{ Preuve de } Q.$$

Réciproquement

$$\text{Supposons Q vraie. Montrons que } P \text{ est vraie.}$$

$$\left.\begin{matrix} \vdots \end{matrix}\quad\right\} \text{ Preuve de } P.$$

Modes de raisonnement

Exemple : On a vu que :

- Si n est un entier pair, alors n^2 est pair.

Exemple : On a vu que :

- Si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
- Si n^2 est pair, alors n est pair.

Modes de raisonnement

Exemple : On a vu que :

- Si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
- Si n^2 est pair, alors n est pair.

Donc n est pair **si et seulement si** n^2 est pair.

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0.$$

Preuve :

Exemple : Montrer que

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. L'implication

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftarrow x = y = 0$$

est triviale

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. L'implication

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftarrow x = y = 0$$

est triviale , car si $x = y = 0$ alors

$$x^2 = y^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Exemple : Montrer que

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. L'implication

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftarrow x = y = 0$$

est triviale , car si $x = y = 0$ alors

$$x^2 = y^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Pour la implication réciproque,

$$x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0;$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. L'implication

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftarrow x = y = 0$$

est triviale , car si $x = y = 0$ alors

$$x^2 = y^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Pour la implication réciproque,

$$x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0;$$

si : $x^2 + y^2 = 0$, alors :

$$\underset{\geq 0}{x^2} = -\underset{\leq 0}{y^2},$$

Exemple : Montrer que

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. L'implication

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftarrow x = y = 0$$

est triviale , car si $x = y = 0$ alors

$$x^2 = y^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Pour la implication réciproque,

$$x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0;$$

si : $x^2 + y^2 = 0$, alors :

$$\underset{\geq 0}{x^2} = \underset{\leq 0}{-y^2},$$

donc

$$x^2 = -y^2 = 0$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. L'implication

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftarrow x = y = 0$$

est triviale , car si $x = y = 0$ alors

$$x^2 = y^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad x^2 + y^2 = 0.$$

Pour la implication réciproque,

$$x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0;$$

si : $x^2 + y^2 = 0$, alors :

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-y^2}_{\leq 0},$$

donc

$$x^2 = -y^2 = 0$$

et enfin : $x = y = 0$.

Modes de raisonnement

- Soit on raisonne directement par équivalence en changeant peu à peu P en Q :

$$P \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow Q.$$

Remarque :

- Dans la plupart des cas c'est mieux de montrer des implications plutôt que des équivalences.

Modes de raisonnement

- Soit on raisonne directement par équivalence en changeant peu à peu P en Q :
$$P \iff \cdots \iff \cdots \iff Q.$$

Remarque :

- Dans la plupart des cas c'est mieux de montrer des implications plutôt que des équivalences. Le raisonnement par équivalence est souvent inutile et générateur d'erreurs logiques.

Modes de raisonnement

- Soit on raisonne directement par équivalence en changeant peu à peu P en Q :
$$P \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow Q.$$

Remarque :

- Dans la plupart des cas c'est mieux de montrer des implications plutôt que des équivalences. Le raisonnement par équivalence est souvent inutile et générateur d'erreurs logiques.
- Le raisonnement par équivalence permet de montrer qu'une proposition est vraie en montrant qu'elle est équivalente à une proposition dont on sait déjà qu'elle est vraie.

Exemple : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Preuve :

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Preuve : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \iff 2xy \leq x^2 + y^2$$

Exemple : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Preuve : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) &\iff 2xy \leq x^2 + y^2 \\ &\iff 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \end{aligned}$$

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Preuve : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) &\Longleftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq (x - y)^2. \end{aligned}$$

Exemple : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Preuve : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) &\iff 2xy \leq x^2 + y^2 \\ &\iff 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \\ &\iff 0 \leq (x - y)^2. \end{aligned}$$

La dernière proposition étant vraie, la première l'est également.

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Preuve : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) &\Longleftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq (x - y)^2. \end{aligned}$$

La dernière proposition étant vraie, la première l'est également.
Remarque Dans de tels cas, on peut aussi raisonner de façon plus directe :

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy = \frac{x^2 - y^2 - 2xy}{2} = \frac{(x - y)^2}{2}$$

Or $(x - y)^2 \geq 0$ donc $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - xy \geq 0$ donc la propriété est vraie.

Modes de raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété

$$\forall x \in E,\ P(x) \quad \text{est vraie,}$$

on doit étudier les différentes situations selon les valeurs de x.

Modes de raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété

$$\forall x \in E, \ P(x) \quad \text{est vraie,}$$

on doit étudier les différentes situations selon les valeurs de x.
On procède toujours comme suit :

Modes de raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété

$$\forall x \in E,\ P(x) \quad \text{est vraie,}$$

on doit étudier les différentes situations selon les valeurs de x.
On procède toujours comme suit : on écrit **sans réfléchir** :

$$\begin{array}{c} \text{Soit } x \in E. \text{ Montrons que } P(x) \\ \left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\qquad\right\} \text{Preuve de } P(x). \end{array}$$

Modes de raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété

$$\forall x \in E,\ P(x) \quad \text{est vraie,}$$

on doit étudier les différentes situations selon les valeurs de x.
On procède toujours comme suit : on écrit **sans réfléchir** :

$$\begin{array}{c}\text{Soit } x \in E. \text{ Montrons que } P(x) \\ \left.\vdots \qquad\right\} \text{Preuve de } P(x).\end{array}$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Preuve :

Modes de raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété

$$\forall x \in E,\ P(x) \quad \text{est vraie,}$$

on doit étudier les différentes situations selon les valeurs de x.
On procède toujours comme suit : on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Soit } x \in E. \text{ Montrons que } P(x)$$
$$\left.\vdots \qquad\right\} \text{Preuve de } P(x).$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Modes de raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété

$$\forall x \in E,\ \ P(x) \quad \text{est vraie,}$$

on doit étudier les différentes situations selon les valeurs de x.
On procède toujours comme suit : on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Soit } x \in E. \text{ Montrons que } P(x)$$
$$\left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\quad\right\} \text{Preuve de } P(x).$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$. On a

$$0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Modes de raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété

$$\forall x \in E,\ P(x) \quad \text{est vraie,}$$

on doit étudier les différentes situations selon les valeurs de x.
On procède toujours comme suit : on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Soit } x \in E. \text{ Montrons que } P(x)$$
$$\left.\vdots \qquad\right\} \text{ Preuve de } P(x).$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$. On a

$$0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Donc

$$2x \leq x^2 + 1$$

Modes de raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété

$$\forall x \in E,\ P(x) \quad \text{est vraie,}$$

on doit étudier les différentes situations selon les valeurs de x.
On procède toujours comme suit : on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Soit } x \in E. \text{ Montrons que } P(x)$$
$$\left.\vdots \quad\right\} \text{Preuve de } P(x).$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$. On a

$$0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Donc

$$2x \leq x^2 + 1$$

Modes de raisonnement

Pour démontrer qu'une propriété

$$\forall x \in E,\ P(x) \quad \text{est vraie,}$$

on doit étudier les différentes situations selon les valeurs de x.
On procède toujours comme suit : on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Soit } x \in E. \text{ Montrons que } P(x)$$

$$\left.\vdots \quad\quad\right\} \text{Preuve de } P(x).$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$.

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$. On a

$$0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Donc

$$2x \leq x^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Modes de raisonnement

Quand on veut montrer que

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété P

Modes de raisonnement

Quand on veut montrer que

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété P , on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Posons } x = \cdots \quad \text{(l'exemple qu'on a en tête.)}$$

Vérifions que $P(x)$.

Modes de raisonnement

Quand on veut montrer que

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété P , on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Posons } x = \cdots \quad \text{(l'exemple qu'on a en tête.)}$$

Vérifions que $P(x)$.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\right\} \text{Vérifications que } x \text{ satisfait } P(x).$$

Modes de raisonnement

Quand on veut montrer que

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété P , on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Posons } x = \cdots \quad \text{(l'exemple qu'on a en tête.)}$$

Vérifions que $P(x)$.

$$\left.\begin{matrix} \vdots \end{matrix}\quad\right\} \text{Vérifications que } x \text{ satisfait } P(x).$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ z > x + y$.

Preuve :

Modes de raisonnement

Quand on veut montrer que

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété P , on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Posons } x = \cdots \quad \text{(l'exemple qu'on a en tête.)}$$

Vérifions que $P(x)$.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\qquad\right\} \text{Vérifications que } x \text{ satisfait } P(x).$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ z > x + y$.

Preuve : Soient $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$.

Modes de raisonnement

Quand on veut montrer que

$$\exists x \in E, \ P(x)$$

et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété P , on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Posons } x = \cdots \quad \text{(l'exemple qu'on a en tête.)}$$

Vérifions que $P(x)$.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \\ \end{array}\quad\right\} \text{Vérifications que } x \text{ satisfait } P(x).$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, \ z > x + y$.

Preuve : Soient $x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}$. Après réflexion, posons :

$$z = x + y + 1.$$

Modes de raisonnement

Quand on veut montrer que

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété P , on écrit **sans réfléchir** :

$$\text{Posons } x = \cdots \quad \text{(l'exemple qu'on a en tête.)}$$

Vérifions que $P(x)$.

$$\left.\begin{array}{c} \vdots \end{array}\right\} \text{Vérifications que } x \text{ satisfait } P(x).$$

Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ z > x + y$.

Preuve : Soient $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$. Après réflexion, posons :

$$z = x + y + 1.$$

Alors comme voulu : $z > x + y$.

Modes de raisonnement

La difficulté, bien sûr, ne consiste souvent pas à vérifier que x a la propriété P , mais **à avoir l'idée d'un exemple de tel objet x.**

Modes de raisonnement

La difficulté, bien sûr, ne consiste souvent pas à vérifier que x a la propriété P , mais **à avoir l'idée d'un exemple de tel objet x.**
Il n'existe hélas pas de règle générale pour avoir des idées.

Modes de raisonnement

La difficulté, bien sûr, ne consiste souvent pas à vérifier que x a la propriété P , mais **à avoir l'idée d'un exemple de tel objet x.**
Il n'existe hélas pas de règle générale pour avoir des idées.
Donnons tout de même une méthode qui peut s'avérer utile pour trouver x.

La difficulté, bien sûr, ne consiste souvent pas à vérifier que x a la propriété P , mais **à avoir l'idée d'un exemple de tel objet x.**
Il n'existe hélas pas de règle générale pour avoir des idées.
Donnons tout de même une méthode qui peut s'avérer utile pour trouver x.

Pour déterminer les solutions d'un problème, ou plus précisément l'ensemble des éléments d'un ensemble E qui satisfont une propriété P, on raisonne souvent par **analyse-synthèse**.

Modes de raisonnement

- **Analyse** : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires que la solution doit satisfaire.

Modes de raisonnement

- **Analyse** : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires que la solution doit satisfaire.

  Pour cela on écrit : Soit $x \in E$. Faisons l'hypothèse que $P(x)$ est vraie.

Modes de raisonnement

- **Analyse** : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires que la solution doit satisfaire.

  Pour cela on écrit : Soit $x \in E$. Faisons l'hypothèse que $P(x)$ est vraie.

  $$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\quad\right\}$$

  On part naïvement d'un élément x de propriété P et on essaie de le faire parler pour savoir qui il est. **Quelles sont les valeurs possibles de x ?**

Modes de raisonnement

- **Analyse** : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires que la solution doit satisfaire.

  Pour cela on écrit : Soit $x \in E$. Faisons l'hypothèse que $P(x)$ est vraie.

  $$\left.\vdots\quad\right\}$$

  On part naïvement d'un élément x de propriété P et on essaie de le faire parler pour savoir qui il est. **Quelles sont les valeurs possibles de x ?**

- **Synthèse**

Modes de raisonnement

- **Analyse** : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires que la solution doit satisfaire.

  Pour cela on écrit : Soit $x \in E$. Faisons l'hypothèse que $P(x)$ est vraie.

  $\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right\}$ On part naïvement d'un élément x de propriété P et on essaie de le faire parler pour savoir qui il est. **Quelles sont les valeurs possibles de x ?**

- **Synthèse** : On montre que ces conditions obtenues sont suffisantes, et on résout le problème.

Modes de raisonnement

- **Analyse** : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires que la solution doit satisfaire.

  Pour cela on écrit : Soit $x \in E$. Faisons l'hypothèse que $P(x)$ est vraie.

  $$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right\}$$ On part naïvement d'un élément x de propriété P et on essaie de le faire parler pour savoir qui il est. **Quelles sont les valeurs possibles de x ?**

- **Synthèse** : On montre que ces conditions obtenues sont suffisantes, et on résout le problème. Pour cela, posons

  $x = \cdots$ **Ici, les possibles valeurs de x trouvées dans l'analyse.**

Modes de raisonnement

- **Analyse** : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires que la solution doit satisfaire.

  Pour cela on écrit : Soit $x \in E$. Faisons l'hypothèse que $P(x)$ est vraie.

  $$\left.\begin{matrix}\vdots\end{matrix}\right\}$$ On part naïvement d'un élément x de propriété P et on essaie de le faire parler pour savoir qui il est. **Quelles sont les valeurs possibles de x ?**

- **Synthèse** : On montre que ces conditions obtenues sont suffisantes, et on résout le problème. Pour cela, posons

  $x = \cdots$ **Ici, les possibles valeurs de x trouvées dans l'analyse.**

  Vérifions que $x \in E$ et que $P(x)$ est vraie.

  $$\left.\begin{matrix}\vdots\end{matrix}\right\}$$ **Vérification que x appartient à E et satisfait la propriété P.**

Modes de raisonnement

En Résumé :

- Dans l'analyse, on restreint le nombre des solutions possibles.

En Résumé :

- Dans l'analyse, on restreint le nombre des solutions possibles.
- Dans la synthèse, on vérifie que les possibilités obtenues dans l'analyse sont en fait des solutions.

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation.

Modes de raisonnement

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation. Alors

$$\sqrt{x+6} = x$$

Modes de raisonnement

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation. Alors

$$\sqrt{x+6} = x$$

Modes de raisonnement

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation. Alors

$$\sqrt{x+6} = x \implies x + 6 = x^2$$

Modes de raisonnement

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation. Alors

$$\sqrt{x+6} = x \implies x+6 = x^2 \implies x^2 - x - 6 = 0.$$

Donc

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Modes de raisonnement

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation. Alors

$$\sqrt{x+6} = x \implies x+6 = x^2 \implies x^2 - x - 6 = 0.$$

Donc

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Nous avons ainsi montré que si x est solution de $\sqrt{x+6} = x$, alors nécessairement $x = 3$ ou $x = -2$.

Modes de raisonnement

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation. Alors

$$\sqrt{x+6} = x \implies x+6 = x^2 \implies x^2 - x - 6 = 0.$$

Donc

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Nous avons ainsi montré que si x est solution de $\sqrt{x+6} = x$, alors nécessairement $x = 3$ ou $x = -2$.

- **Synthèse** : On teste à présent les valeurs obtenues

Modes de raisonnement

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation. Alors

$$\sqrt{x+6} = x \implies x+6 = x^2 \implies x^2 - x - 6 = 0.$$

  Donc

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

  Nous avons ainsi montré que si x est solution de $\sqrt{x+6} = x$, alors nécessairement $x = 3$ ou $x = -2$.

- **Synthèse** : On teste à présent les valeurs obtenues : -2 ne convient pas puisque

$$\sqrt{-2+6} = 2 \neq -2,$$

Modes de raisonnement

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation. Alors

$$\sqrt{x+6} = x \implies x+6 = x^2 \implies x^2 - x - 6 = 0.$$

Donc

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Nous avons ainsi montré que si x est solution de $\sqrt{x+6} = x$, alors nécessairement $x = 3$ ou $x = -2$.

- **Synthèse** : On teste à présent les valeurs obtenues : -2 ne convient pas puisque

$$\sqrt{-2+6} = 2 \neq -2,$$

mais 3 convient car on a bien

$$\sqrt{3+6} = 3.$$

Modes de raisonnement

Exemple : Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$\sqrt{x+6} = x.$$

Solution :

- **Analyse** : Supposons que x est solution de cette équation. Alors

  $$\sqrt{x+6} = x \implies x+6 = x^2 \implies x^2 - x - 6 = 0.$$

  Donc

  $$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

  Nous avons ainsi montré que si x est solution de $\sqrt{x+6} = x$, alors nécessairement $x = 3$ ou $x = -2$.

- **Synthèse** : On teste à présent les valeurs obtenues : -2 ne convient pas puisque

  $$\sqrt{-2+6} = 2 \neq -2,$$

  mais 3 convient car on a bien

  $$\sqrt{3+6} = 3.$$

Nous avons ainsi montré que l'équation $\sqrt{x+6} = x$ admet une unique solution $x = 3$.

Raisonnement par récurrence

On connait très bien

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

l'addition, la multiplication sur $\mathbb{N}$, ainsi que les relations

$$<,\ \leq\ \text{ et }\ \geq\ .$$

Raisonnement par récurrence

On connait très bien

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

l'addition, la multiplication sur $\mathbb{N}$, ainsi que les relations

$$<,\ \leq \ \text{et}\ \geq .$$

Dans cette section on s'intéresse à une propriété **essentielle** de l'ensemble $\mathbb{N}$

Raisonnement par récurrence

On connait très bien

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

l'addition, la multiplication sur $\mathbb{N}$, ainsi que les relations

$$<,\ \leq\ \text{ et }\ \geq .$$

Dans cette section on s'intéresse à une propriété **essentielle** de l'ensemble $\mathbb{N}$: **toute partie non vide A de l'ensemble $\mathbb{N}$ a un plus petit élément m.**

Raisonnement par récurrence

On connait très bien

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

l'addition, la multiplication sur $\mathbb{N}$, ainsi que les relations

$$<,\ \leq\ \text{ et }\ \geq .$$

Dans cette section on s'intéresse à une propriété **essentielle** de l'ensemble $\mathbb{N}$: **toute partie non vide** A **de l'ensemble** $\mathbb{N}$ **a un plus petit élément** m**.** Ceci signifie :

Raisonnement par récurrence

On connait très bien

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

l'addition, la multiplication sur $\mathbb{N}$, ainsi que les relations

$$<,\ \leq \text{ et } \geq .$$

Dans cette section on s'intéresse à une propriété **essentielle** de l'ensemble $\mathbb{N}$: **toute partie non vide** A **de l'ensemble** $\mathbb{N}$ **a un plus petit élément** m**.** Ceci signifie :

- d'une part que m est un élément de $A \subset \mathbb{N}$,

Raisonnement par récurrence

On connait très bien
$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$
l'addition, la multiplication sur $\mathbb{N}$, ainsi que les relations
$$<,\ \leq \ \text{et}\ \geq.$$

Dans cette section on s'intéresse à une propriété **essentielle** de l'ensemble $\mathbb{N}$: **toute partie non vide A de l'ensemble $\mathbb{N}$ a un plus petit élément m.** Ceci signifie :

- d'une part que m est un élément de $A \subset \mathbb{N}$,
- d'autre part que m est inférieur ou égal à tout élément de A, c'est à dire

$$\forall x \in A, \quad m \leq x.$$

Raisonnement par récurrence

On connait très bien

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

l'addition, la multiplication sur $\mathbb{N}$, ainsi que les relations

$$<,\ \leq\ \text{ et }\ \geq .$$

Dans cette section on s'intéresse à une propriété **essentielle** de l'ensemble $\mathbb{N}$: **toute partie non vide A de l'ensemble $\mathbb{N}$ a un plus petit élément m.** Ceci signifie :

- d'une part que m est un élément de $A \subset \mathbb{N}$,
- d'autre part que m est inférieur ou égal à tout élément de A, c'est à dire

$$\forall x \in A, \quad m \leq x.$$

Cette propriete est la base du **Raisonnement par Récurrence**.

Raisonnement par récurrence

Proposition (Récurrence Simple)

On considère une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- Initialisation *: $\mathscr{P}(0)$ est vraie, e*
- Hérédité *: pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.*

Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Raisonnement par récurrence

Proposition (Récurrence Simple)

On considère une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- Initialisation *: $\mathscr{P}(0)$ est vraie, e*
- Hérédité *: pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.*

Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. L'initialisation peut commencer à un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ arbitraire (pas necessairement 0) et dans ce cas la propriété n'est démontrée vraie qu'à partir du rang k_0 : Si

- $\mathscr{P}(k_0)$ est vraie,
- Pour tout entier n supérieur ou égal à k_0, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier supérieur ou égal à k_0.

Démonstration.

Soit
$$A = \{n \in \mathbb{N} : \mathscr{P}(n) \text{ est vraie}\}.$$
Pour montrer que $A = \mathbb{N}$, on raisonne par l'absurde. Dans ce cas, le complémentaire de la partie A dans $\mathbb{N}$ est non vide. Elle admet donc un plus petit élément que l'on note p. Puisque $0 \in A$, on a
$$p \geq 1.$$
De plus par définition de p
$$p - 1 \geq 0$$
ne peut appartenir au complémentaire de A. On a donc $p - 1 \in A$. Ainsi $P(p-1)$ est vraie, ce qui implique que $P(p)$ est vraie, et donc que p appartient à A. Finalement,
$$p \in A \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{N} \setminus A.$$
Contradiction ! ! ! $\square$

Raisonnement par récurrence

Quand on veut montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$$

on rédige ainsi :

- **Initialisation :** Vérification que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Raisonnement par récurrence

Quand on veut montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$$

on rédige ainsi :

- **Initialisation :** Vérification que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** On veut montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ vraie $\Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$

Raisonnement par récurrence

Quand on veut montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \mathscr{P}(n)$$

on rédige ainsi :

- **Initialisation :** Vérification que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

Raisonnement par récurrence

Quand on veut montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathscr{P}(n)$$

on rédige ainsi :

- **Initialisation :** Vérification que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\quad\right\}\ \text{Preuve que } \mathscr{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Montrons que $2^{n+1} \geq n+1$ est vraie.

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Montrons que $2^{n+1} \geq n+1$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n.$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Montrons que $2^{n+1} \geq n+1$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on en déduit

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Montrons que $2^{n+1} \geq n+1$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n.$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Montrons que $2^{n+1} \geq n+1$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n.$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Montrons que $2^{n+1} \geq n+1$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n.$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$2^n \geq 1.$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Montrons que $2^{n+1} \geq n+1$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n.$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$2^n \geq 1.$$

Par conséquent

$$2^{n+1} > n + 2^n \geq n + 1.$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Montrons que $2^{n+1} \geq n+1$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n.$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$2^n \geq 1.$$

Par conséquent

$$2^{n+1} > n + 2^n \geq n + 1.$$

C'est-à-dire $2^{n+1} > n+1$.

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Initialisation : On a $2^0 = 1 > 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire,

$$2^n \geq n.$$

Montrons que $2^{n+1} \geq n+1$ est vraie. On a

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n.$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$2^n \geq 1.$$

Par conséquent

$$2^{n+1} > n + 2^n \geq n + 1.$$

C'est-à-dire $2^{n+1} > n+1$. Fin de la recurrence. Par conséquent pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation :

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire

$$3^n - 1 \text{ est pair}$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire

$$3^n - 1 \text{ est pair}$$

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire

$$3^n - 1 \text{ est pair} \quad \Longleftrightarrow \quad 3^n - 1 = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $3^{n+1} - 1$ est pair.

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire

$$3^n - 1 \text{ est pair} \quad \Longleftrightarrow \quad 3^n - 1 = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $3^{n+1} - 1$ est pair. On a

$$3^{n+1} - 1 = 3 \cdot 3^n - 1$$

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire

$$3^n - 1 \text{ est pair} \quad \iff \quad 3^n - 1 = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $3^{n+1} - 1$ est pair. On a

$$3^{n+1} - 1 = 3 \cdot 3^n - 1$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire

$$3^n - 1 \text{ est pair} \quad \Longleftrightarrow \quad 3^n - 1 = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $3^{n+1} - 1$ est pair. On a

$$3^{n+1} - 1 = 3 \cdot 3^n - 1 = 3(2k+1) - 1$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire

$$3^n - 1 \text{ est pair} \quad \Longleftrightarrow \quad 3^n - 1 = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $3^{n+1} - 1$ est pair. On a

$$3^{n+1} - 1 = 3 \cdot 3^n - 1 = 3(2k+1) - 1 = 6k + 3 - 1$$

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire

$$3^n - 1 \text{ est pair} \quad \Longleftrightarrow \quad 3^n - 1 = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $3^{n+1} - 1$ est pair. On a

$$3^{n+1} - 1 = 3 \cdot 3^n - 1 = 3(2k+1) - 1 = 6k + 3 - 1 = 2(3k+1).$$

C'est-à-dire $3^{n+1} - 1$ est pair.

Raisonnement par récurrence

Exemple : Montrer que pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Initialisation : On a $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie , c'est-à-dire

$$3^n - 1 \text{ est pair} \iff 3^n - 1 = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $3^{n+1} - 1$ est pair. On a

$$3^{n+1} - 1 = 3 \cdot 3^n - 1 = 3(2k+1) - 1 = 6k + 3 - 1 = 2(3k+1).$$

C'est-à-dire $3^{n+1} - 1$ est pair.
Fin de la recurrence. Par conséquent, pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est pair.

Raisonnement par récurrence

Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}(n+1)$ de $\mathscr{P}(n)$, mais

$$\textbf{seulement} \quad \mathscr{P}(n+2) \quad \textit{de} \quad \mathscr{P}(n) \textbf{ et } \mathscr{P}(n+1).$$

Raisonnement par récurrence

Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}(n+1)$ de $\mathscr{P}(n)$, mais

$$\textbf{seulement} \quad \mathscr{P}(n+2) \quad \textit{de} \quad \mathscr{P}(n) \textbf{ et } \mathscr{P}(n+1).$$

Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante.

Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}(n+1)$ de $\mathscr{P}(n)$, mais

seulement $\mathscr{P}(n+2)$ *de* $\mathscr{P}(n)$ **et** $\mathscr{P}(n+1)$.

Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante.

Proposition (Récurrence Double)

Raisonnement par récurrence

Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}(n+1)$ de $\mathscr{P}(n)$, mais

$$\textbf{seulement} \quad \mathscr{P}(n+2) \quad \textit{de} \quad \mathscr{P}(n) \textbf{ et } \mathscr{P}(n+1).$$

Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante.

Proposition (Récurrence Double)

On considère une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- $\mathscr{P}(0)$ *et* $\mathscr{P}(1)$ *sont vraies,*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.*

Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Raisonnement par récurrence

Il arrive parfois qu'on ne sache pas déduire $\mathscr{P}(n+1)$ de $\mathscr{P}(n)$, mais

seulement $\mathscr{P}(n+2)$ *de* $\mathscr{P}(n)$ **et** $\mathscr{P}(n+1)$.

Le principe du raisonnement par récurrence prend dans ce cas la forme suivante.

Proposition (Récurrence Double)

On considère une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que :

- *$\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies,*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.*

Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Les récurrences classiques sont dites simples et il existe bien entendu des récurrences triples, etc.

Raisonnement par récurrence

Quand on veut montrer par récurrence **double** que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$$

on rédige ainsi :

- **Initialisation :**

Raisonnement par récurrence

Quand on veut montrer par récurrence **double** que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$$

on rédige ainsi :

- **Initialisation :** Vérification que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Raisonnement par récurrence

Quand on veut montrer par récurrence **double** que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}(n)$$

on rédige ainsi :

- **Initialisation :** Vérification que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

- **Hérédité :**

Raisonnement par récurrence

Quand on veut montrer par récurrence **double** que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$$

on rédige ainsi :

- **Initialisation :** Vérification que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

$$\left.\begin{matrix} \vdots \end{matrix}\quad\right\} \text{Preuve que } \mathscr{P}(n+2) \text{ est vraie.}$$

Raisonnement par récurrence

Quand on veut montrer par récurrence **double** que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}(n)$$

on rédige ainsi :

- **Initialisation :** Vérification que $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{c}\vdots\end{array}\right\} \text{Preuve que } \mathscr{P}(n+2) \text{ est vraie.}$$

Modes de raisonnement

Théorème (Récurrence forte)

On considère une propriété $\mathscr{P}(n)$ *dépendant de l'entier* $n \in N$*, et on suppose que :*

- $\mathscr{P}(0)$ *est vraie,*
- *pour tout* $n \in N$*, si* $\mathscr{P}(k)$ *est vraie pour* $k \leq n$*, alors* $\mathscr{P}(n+1)$ *est vraie.*

Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ *est vraie pour tout* $n \in N$*.*

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Preuve : On veut montrer la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\mathscr{P}(n) : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n, k$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers

Initialisation : 2 est premier donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
Hérédité :

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Preuve : On veut montrer la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\mathscr{P}(n) : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n, k$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers

Initialisation : 2 est premier donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
Hérédité :

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Preuve : On veut montrer la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\mathscr{P}(n) : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n, k$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers

Initialisation : 2 est premier donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ supposons $\mathscr{P}(n)$.

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Preuve : On veut montrer la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\mathscr{P}(n) : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n, k$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers

Initialisation : 2 est premier donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ supposons $\mathscr{P}(n)$.
Soit $n+1$ est premier,

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Preuve : On veut montrer la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\mathscr{P}(n) : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n, k$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers

Initialisation : 2 est premier donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ supposons $\mathscr{P}(n)$.
Soit $n+1$ est premier, Soit il se décompose produit de deux entiers p et q avec $p > 1$ et $q > 1$ donc $p < n+1$ et $q < n+1$.

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Preuve : On veut montrer la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\mathscr{P}(n)$: $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n, k$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers

Initialisation : 2 est premier donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ supposons $\mathscr{P}(n)$.
Soit $n+1$ est premier, Soit il se décompose produit de deux entiers p et q avec $p > 1$ et $q > 1$ donc $p < n+1$ et $q < n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, ces deux entiers se décomposent en produit de nombres premiers donc leur produit $n+1$ est un produit de nombres premiers.

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Preuve : On veut montrer la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\mathscr{P}(n) : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n, k$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers

Initialisation : 2 est premier donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ supposons $\mathscr{P}(n)$.
Soit $n+1$ est premier, Soit il se décompose produit de deux entiers p et q avec $p > 1$ et $q > 1$ donc $p < n+1$ et $q < n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, ces deux entiers se décomposent en produit de nombres premiers donc leur produit $n+1$ est un produit de nombres premiers.
Dans tous les cas $n+1$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers. Or d'après l'hypothèse de récurrence c'est vrai pour tout entier $k < n+1$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Modes de raisonnement

Exemple : Montrer que tout entier $n \geq 2$ se décompose en produit de nombres premiers.
Preuve : On veut montrer la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$\mathscr{P}(n) : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n, k$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers

Initialisation : 2 est premier donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ supposons $\mathscr{P}(n)$.
Soit $n+1$ est premier, Soit il se décompose produit de deux entiers p et q avec $p > 1$ et $q > 1$ donc $p < n+1$ et $q < n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, ces deux entiers se décomposent en produit de nombres premiers donc leur produit $n+1$ est un produit de nombres premiers.
Dans tous les cas $n+1$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers. Or d'après l'hypothèse de récurrence c'est vrai pour tout entier $k < n+1$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, n$ est premier ou se décompose en produit de nombres premiers.