Systèmes d'Equations Linéaires

Convention

Dans les énoncés, $\mathbb{K}$ représentera l'ensemble $\mathbb{C}$ ou l'ensemble $\mathbb{R}$.

Définition (Équation linéaire)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle ***équation linéaire à*** p ***inconnues*** $x_1, \ldots, x_p$*, une équation de la forme*

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b \text{ avec } (a_1, \ldots, a_p, b) \in \mathbb{K}^{p+1}$$

Une ***solution*** *d'une telle équation est notée sous fome d'un n-uplet (qu'on appelera* ***vecteur*** *dans la suite du cours) :*

$$(s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{K}^p$$

On appelle ***équation homogène associée à l'équation linéaire****, l'équation obtenue en remplaçant b par 0.*

Example

- L'équation cartésienne d'une droite du plan est une équation linéaire à deux inconnues.

$$3x + 2y = 5$$

- L'équation cartésienne d'un plan de l'espace est une équation linéaire à trois inconnues.

$$x + 5y - 3z = 4$$

Remarque

- Le n-uplet $(0,\ldots,0)$ est toujours solution d'une équation homogène.
  En effet
  $$a_1 0+\cdots+a_p 0=0$$
- Si $(s_1,\ldots,s_p)$ est solution d'une équation homogène alors pour tout $\lambda\in\mathbb{K}, (\lambda s_1,\ldots,\lambda s_p)$ est aussi solution.

  En effet si $a_1 s_1+\cdots+a_p s_p=0$ alors
  $a_1\lambda s_1+\cdots+a_p\lambda s_p=\lambda(a_1\lambda s_1+\cdots+a_p\lambda s_p)=\lambda 0=0$
- Si $(s_1,\ldots,s_p)$ et $(s'_1,\ldots,s'_p)$ sont solutions d'une équation homogène alors $(s_1+s'_1,\ldots,s_p+s'_p)$ est aussi solution.

  En effet si $a_1 s_1+\cdots+a_p s_p=0$ et $a_1 s'_1+\cdots+a_p s'_p=0$ alors
  $a_1(s_1+s'_1)+\cdots+a_p(s_p+s'_p)$
  $=(a_1 s_1+\cdots+a_p s_p)+(a_1 s'_1+\cdots+a_p s'_p)$
  $=0+0$
  $=0$

Les deux dernières propriétés caractérisent une équation linéaire.

Définition (Système linéaire)

Soit n et p appartenant à $\mathbb{N}^*$.
*On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, \ldots, x_p$ un système de la forme :*

$$\begin{cases} a_{1.1}x_1 + \cdots + a_{1.p}x_p = & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n.1}x_1 + \cdots + a_{n.p}x_p = & b_n \end{cases}$$

où les $a_{i.j}$ et $b_i (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p)$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

*Un **vecteur** $(s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{K}^p$ est solution du système si et seulement si il est solution de toutes les équations linéaires composant le système.*

*On appelle **système d'équations homogènes** le système obtenu en remplaçant tous les b_i par 0 .*

Un premier exemple

Résoudre le système :

$$\mathcal{S}\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & 5 \\ & & & - & 2z & + & t & = & -2 \\ & & & & & & 4t & = & 16 \end{array}\right.$$

Solution

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & 5 \\ & & & - & 2z & + & 4 & = & -2 \\ & & & & & & t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & 5 \\ & & & -2 & z & & & = & -6 \\ & & & & & & t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & y & - & 9 & + & 12 & = & 5 \\ & & & & z & & & = & 3 \\ & & & & & & t & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & y & & & & & = & 5-3 \\ & & & & z & & & = & 3 \\ & & & & & & t & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & y & & & & & = & 5-3 \\ & & & & z & & & = & 3 \\ & & & & & & t & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 4 & + & 3 & - & 4 & = & 4 \\ & & y & & & & & = & 2 \\ & & & & z & & & = & 3 \\ & & & & & & t & = & 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \\ t & = & 4 \end{array} \right.$$

Le système :

$$\mathcal{S}\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & 5 \\ & & & - & 2z & + & t & = & -2 \\ & & & & & & 4t & = & 16 \end{array}\right.$$

est tel qu'à chaque ligne on a une inconnue de moins.
Il ressemble à un escalier. On dit qu'il est **échelonné**.

Définition (Système échelonnée)

Un système est dit ***échelonnée en lignes*** *s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *Si une ligne est entièrement nulle* $(0 = 0)$*, toutes les lignes suivantes le sont aussi.*
2. *A partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non entièrement nulle* $(0 = 0)$*, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite (strictement) du premier coefficient non nul de la ligne précédente.*

$$\mathcal{S}'' \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & 5 \\ & & & - & 2z & + & t & = & -2 \\ & & & & & & 4t & = & 16 \end{array} \right.$$

Important

Les systèmes échelonnés sont très faciles à résoudre : on commence par la dernière équation et on "remonte" pour exprimer l'inconnue supplémentaire qui apparaît en fonction de celles obtenues dans les équations en-dessous.

$$\mathcal{S}'' \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & 4 \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & 5 \\ & & & - & 2z & + & t & = & -2 \\ & & & & & & 4t & = & 16 \end{array} \right.$$

Tout système linéaire se ramène à un système échelonné équivalent en utilisant trois types d'opérations élémentaires :

1. Intervertir deux équations
2. Intervertir l'ordre des inconnues
3. Remplacer une équation par la somme d'elle même et d'une autre multipliée par un coefficient.

Méthode du pivot de Gauss

Étant donné un système d'équations linéaires, la méthode du **pivot de Gauss** a pour but de construire un système échelonné qui soit équivalent au système donné.

Deuxième exemple

On va commencer par présenter la méthode du **pivot de Gauss** sur un exemple.
Considérons le système dont les inconnues sont $x,\ y,\ z,\ t$ et où $a,\ b$ sont des paramètres fixés.

$$\mathcal{S}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a & (E_1) \\ 2x & + & 4y & - & z & - & 5t & = & 5a & (E_2) \\ -x & - & 2y & + & z & + & 3t & = & b & (E_3) \end{array}\right.$$

Choisissons une équation avec un coefficient non nul pour la première inconnue x.
Ici la première équation convient avec le coefficient 1, pour x, qu'on appelle le **premier pivot**.
On va utiliser ce pivot pour faire disparaître l'inconnue x des autres équations.

$$\mathcal{S}\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a & & (E_1) \\ 2x & + & 4y & - & z & - & 5t & = & 5a & & (E_2) \\ -x & - & 2y & + & z & + & 3t & = & b & & (E_3) \end{array}\right.$$

Pour cela on ajoute à ces équations la première multiplié par un coefficient convenable.
On obtient un système linéaire équivalent :

$$\mathcal{S}'\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a & & (E_1') = (E_1) \\ & & & - & 3z & - & 3t & = & 3a & & (E_2') = (E_2) - 2(E_1) \\ & & & + & 2z & + & 2t & = & b + a & & (E_3') = (E_3) + (E_1) \end{array}\right.$$

Examinons maintenant le système obtenu en supprimant la première équation.
On remarque que la variable x n'y apparaît pas. La variable suivante y non plus. On est ramené à un système de deux équations avec ici deux variables en moins.

$$\mathcal{S}' \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a & (E_1') \\ & & & - & 3z & - & 3t & = & 3a & (E_2') \\ & & & + & 2z & + & 2t & = & b+a & (E_3') \end{array} \right.$$

Choisissons un deuxième pivot.
On le trouve dans l'équation (E_2'). C'est le coefficient -3 de z.
Nous allons l'utiliser pour éliminer z des équations suivantes (ici, il n'en reste qu'une).

Réécrivons le nouveau système :

$$\mathcal{S}'' \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a & (E_1'') = (E_1') \\ & & & - & 3z & - & 3t & = & 3a & (E_2'') = (E_2') \\ & & & & & & 0 & = & b+3a & (E_3'') = (E_3') + \dfrac{2}{3}(E_2') \end{array} \right.$$

Le système obtenu est un système échelonné.

Description de l'algorithme du pivot de Gauss

Rappelons que le but est d'obtenir un système équivalent au système donné et qui soit échelonné c'est-à-dire de la forme :

$$\left\{\begin{array}{llllllll} x_{n_1} & + & a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} & + & \dots & \dots & \dots & + & a_{1,n}x_n \\ & & & & x_{n_2} & + & a_{2,n_2+1}x_{n_2+1} + \dots & + & a_{2,n}x_n \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & x_{n_p} + a_{p,n_p+1}x_{n_p+1} + \dots & + & a_{p,n}x_n \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right.$$

avec $1 \leqslant p \leqslant m$ et $1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_p \leqslant n$.

Avec l'exemple précédent on peut comprendre facilement le fonctionnement de l'algorithme pour un système quelconque d'équations.

1. On cherche un pivot, premier coefficient non nul d'une certaine variable x dans une des équations. Par permutation, cette équation devient la première équation.
2. On utilise ce pivot et cette équation pour éliminer x des équations suivantes. Pour cela on ajoute cette équation multipliée par un coefficient convenable aux équations suivantes
3. S'il y a des équations dont le premier membre est nul $0 = \ldots$ on les place en dernier.
4. On recommence à l'étape 1 avec le système privé de la première équation.

L'algorithme s'arrête lorsqu'il ne reste plus que des équations $0 = \ldots$.

Exprimons plus en détails une des étapes de cet algorithme.
L'objectif est d'obtenir, à l'issue de l'étape k un système de la forme $\mathcal{H}_k$ suivante :

$$\begin{cases}
x_{n_1} + a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} + \dots & & & & & +a_{1,n}x_n & = b_1 \\
x_{n_2} \qquad\qquad + \dots & & +a_{2,n_k}x_{n_k} & +a_{2,n_k+1}.x_{n_k+1} & + \dots & +a_{2,n}x_n & = b_2 \\
\qquad\qquad \ddots & & & & & & \\
& x_{k-1,n_{k-1}} & +a_{k-1,n_k}x_{n_k} & +a_{k-1,n_k+1}x_{n_k+1} & + \dots & +a_{k-1,n}x_n & = b_{k-1} \\
& 0 & +x_{n_k} & +a'_{k,n_k+1}x_{n_k+1} & + \dots & +a'_{k,n}x_n & = b'_k \\
& & 0 & +a'_{k+1,n_k+1}x_{n_k+1} & + \dots & +a'_{k+1,n}x_n & = b'_{k+1} \\
& & \vdots & & & & \vdots \\
& & 0 & +a'_{m,n_k+1}x_{n_k+1} & + \dots & +a'_{m,n}x_n & = b'_m
\end{cases}$$

avec $1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_k \leqslant n$.

Système à l'état $k-1$

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
x_{n_1} + a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots & & & & & + & a_{1,n}x_n & = b_1 \\
\qquad x_{n_2} \qquad + \ldots & & +a_{2,n_k}x_{n_k} & +a_{2,n_k+1}.x_{n_k+1} & + \ldots & + & a_{2,n}x_n & = b_2 \\
\qquad\qquad \ddots & & & & & & & \\
 & x_{k-1,n_{k-1}} & +a_{k-1,n_k}x_{n_k} & +a_{k-1,n_k+1}x_{n_k+1} & + \ldots & + & a_{k-1,n}x_n & = b_{k-1} \\
 & 0 & +{\color{red}a_{k,n_k}x_{n_k}} & +a_{k,n_k+1}x_{n_k+1} & + \ldots & + & a_{k,n}x_n & = b_k \\
 & 0 & +a_{k+1,n_k}x_{n_k} & +a_{k+1,n_k+1}x_{n_k+1} & + \ldots & + & a_{k+1,n}x_n & = b_{k+1} \\
 & \vdots & & & & & & \vdots \\
 & 0 & +a_{m,n_k}x_{n_k} & +a_{m,n_k+1}x_{n_k+1} & + \ldots & + & a_{m,n}x_n & = b_m
\end{array}\right.$$

avec $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leqslant n$.

Système après normalisation du pivot :

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
x_{n_1} + a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} + \dots & & & & & + & a_{1,n}x_n & = b_1 \\
\qquad x_{n_2} \qquad + \dots & & +a_{2,n_k}x_{n_k} & +a_{2,n_k+1}.x_{n_k+1} & + \dots & + & a_{2,n}x_n & = b_2 \\
\qquad\qquad \ddots & & & & & & & \\
& x_{k-1,n_{k-1}} & +a_{k-1,n_k}x_{n_k} & +a_{k-1,n_k+1}x_{n_k+1} & + \dots & + & a_{k-1,n}x_n & = b_{k-1} \\
& 0 & +{\color{red}x_{n_k}} & +a'_{k,n_k+1}x_{n_k+1} & + \dots & + & a'_{k,n}x_n & = b'_k \\
& 0 & +a_{k+1,n_k}x_{n_k} & +a_{k+1,n_k+1}x_{n_k+1} & + \dots & + & a_{k+1,n}x_n & = b_{k+1} \\
& \vdots & & & & & & \vdots \\
& 0 & +a_{m,n_k}x_{n_k} & +a_{m,n_k+1}x_{n_k+1} & + \dots & + & a_{m,n}x_n & = b_m
\end{array}\right.$$

avec $1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_k \leqslant n$.

Système à l'étape k

$$\begin{cases}
x_{n_1} + a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} + \dots & & & & +a_{1,n}x_n & =b_1 \\
x_{n_2} \qquad\qquad + \dots & & +a_{2,n_k}x_{n_k} & +a_{2,n_k+1}.x_{n_k+1} + \dots & +a_{2,n}x_n & =b_2 \\
\qquad\qquad \ddots & & & & & \\
& x_{k-1,n_{k-1}} & +a_{k-1,n_k}x_{n_k} & +a_{k-1,n_k+1}x_{n_k+1} + \dots & +a_{k-1,n}x_n & =b_{k-1} \\
& 0 & +x_{n_k} & +a'_{k,n_k+1}x_{n_k+1} + \dots & +a'_{k,n}x_n & =b'_k \\
& & 0 & +a"_{k+1,n_k+1}x_{n_k+1} + \dots & +a"_{k+1,n}x_n & =b"_{k+1} \\
& & \vdots & & & \vdots \\
& & 0 & +a"_{m,n_k+1}x_{n_k+1} + \dots & +a"_{m,n}x_n & =b"_m
\end{cases}$$

avec $1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_k \leqslant n$.

Décrivons à présent l'étape k de la méthode du Pivot de Gauss : étant donné un système de la forme $\mathcal{H}_{k-1}$, nous allons le transformer de façon à obtenir un système de la forme $\mathcal{H}_k$.

Nous noterons E_j la $j^{ème}$ équation du système.

- On ne modifie pas les $k-1$ premières équations du système linéaire.
- Si tous les coefficients $a_{l,m}$ (avec $l \geqslant k$ et $m > n_{k-1}$) sont nuls, alors, pour tout $l \geqslant k$, l'équation E_l s'écrit : $0 = b_l$. Le système a donc la forme voulue. L'algorithme s'arrête.
- Sinon, on pose $n_k := \min\{m \;:\; \exists l \geqslant k \;:\; a_{l,m} \neq 0\}$. Alors, quitte à échanger la ligne k avec une ligne $p \geqslant k$ (telle que $a_{p,n_k} \neq 0$), on se ramène au cas où a_{k,n_k} est non nul (ce sera notre pivot pour l'étape k).

  On remplace alors l'équation E_k par $\dfrac{1}{a_{k,n_k}} E_k$ pour se ramener à : $a_{k,n_k} = 1$.
- Puis, pour tout $p > k$, on remplace E_p par $E_p - a_{p,n_k} E_k$ (afin d'éliminer les termes en x_{n_k} des équations $k+1, ..., m$).
- Le système d'équations linéaires ainsi obtenu est alors de la forme $\mathcal{H}_k$, l'étape k est finie.

Résolution du premier exemple

On avait obtenu :

$$\mathcal{S}'' \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a & (E_1'') \\ & & & - & 3z & - & 3t & = & 3a & (E_2'') \\ & & & & & & 0 & = & b+3a & (E_3'') \end{array} \right.$$

Si $b+3a=0$, on peut déterminer x, y, z, t solutions du système.
Si $b+3a \neq 0$, le système n'admet aucune solution. En effet pour tout x, y, z, t, la dernière équation ne sera pas vérifiée.

La dernière équation est appellée **équation de compatiblité**.

Par ailleurs, si t et y sont fixées, on ne peut obtenir qu'une seule valeur de z et de x.

On dit que x et z qui correspondent au pivot sont des **inconnues principales**.

Proposition

1. *Les inconnues des lignes non nulles s'appellent les* ***inconnues principales****, ou pivots*
2. *Un système échelonné possède des solutions si et seulement si les* ***équations de compatibilité*** *sont satisfaites (portant sur les données).*
3. *Si ces* ***conditions*** *sont satisfaites alors toute donnée des inconnues non principales détermine une unique solution du système. Cela équivaut à dire que les solutions du système sont paramétrées par les inconnues non principales.*

Un autre exemple

Pour résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^4$, on veut échelonner ce système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_2) \\ 2x & + & 2y & + & z & + & 3t & & & = & 2 & (E_3) \\ & & & & 2z & & & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.$$

Nous allons utiliser la méthode du pivot de Gauss : à chaque étape, le pivot sera encadré.

Les systèmes d'équations linéaires obtenus sont équivalents au système donné.

Le système est :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{x} & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_2) \\ 2x & + & 2y & + & z & + & 3t & & & = & 2 & (E_3) \\ & & & & 2z & & & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.$$

Il y a un terme en x dans la première équation, le premier pivot de Gauss sera ce terme : nous l'utilisons pour éliminer les termes en x des autres équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \boxed{x} & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_2) \\ & & & & 3z & + & t & & & = & 0 & (E_3' = E_3 - 2E_1) \\ & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & (E_4) \end{array}\right.$$

Nous oublions à présent la première ligne.Il n'y a pas de terme en y dans les équations E_2, E_3' et E_4.Il y a un terme en z dans E_3' mais pas dans E_2 ; nous permutons donc les équations E_2 et E_3'

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & & (E_1) \\
 & & & & 3z & + & t & & & = & 0 & & (E_2' = E_3') \\
 & & & & & & 8t & & & = & 2 & & (E_3'' = E_2) \\
 & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & & (E_4)
\end{array}\right.$$

Nous divisons la deuxième équation par 3 de sorte à avoir z au lieu de $3z$ dans la deuxième équation

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & & (E_1) \\
 & & & & \boxed{z} & + & \dfrac{1}{3}t & & & = & 0 & & (E_2'' = \dfrac{1}{3}E_2') \\
 & & & & & & 8t & & & = & 2 & & (E_3'') \\
 & & & & 2z & + & 0 & + & u & = & 0 & & (E_4)
\end{array}\right.$$

Le terme en z de la deuxième équation est le nouveau pivot de Gauss ; nous l'utilisons pour éliminer les termes en z des équations situés en dessous

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\
 & & & & \boxed{z} & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E_2'') \\
 & & & & & & 8t & & & = & 2 & (E_3'') \\
 & & & & & & -\frac{2}{3}t & + & u & = & 0 & (E_4' = E_4 - 2E_2'')
\end{array}\right.$$

Nous oublions à présent la deuxième équation ; il y a un terme en t dans la troisième équation, nous divisons la troisième équation par 8 de sorte à avoir t à la place de $8t$ dans cette équation

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x & + & y & - & z & + & t & & & = & 1 & (E_1) \\
 & & & & z & + & \frac{1}{3}t & & & = & 0 & (E_2'') \\
 & & & & & & t & & & = & \frac{1}{4} & (E_3''' = \frac{1}{8}E_3'') \\
 & & & & & & -\frac{2}{3}t & + & u & = & 0 & (E_4')
\end{array}\right.$$

Le terme en t de la troisième équation devient le nouveau pivot de Gauss : nous l'utilisons pour éliminer les termes en t de la quatrième équation

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccl} x & + & y & - & z & + & t & & = & 1 & (E_1) \\ & & & & z & + & \frac{1}{3}t & & = & 0 & (E_2'') \\ & & & & & & \boxed{\text{t}} & & = & \frac{1}{4} & (E_3''' = \frac{1}{8}E_3'') \\ & & & & & & & u & = & \frac{1}{6} & (E_4'' = E_4' + \frac{2}{3}E_3''') \end{array}\right.$$

Ce système d'équations linéaires est échelonné et équivalent au système initial.

Rang d'une matrice

Définition (Définition (temporaire) d'une matrice)

Soient n et m deux entiers naturels non nul.
Une matrice de dimension $n \times m$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ avec n lignes et m colonnes.
On note une telle matrice :

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

A chaque système on peut associer la matrice des coefficients et la matrice des seconds membres.
Pour le système

$$\mathcal{S}\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & - & t & = & a \\ 2x & + & 4y & - & z & - & 5t & = & 5a \\ -x & - & 2y & + & z & + & 3t & = & b \end{array}\right.$$

La matrice de dimension 3×4 des coefficients est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice de dimension 3×1 des seconds membres est

$$A = \begin{bmatrix} a \\ 5a \\ b \end{bmatrix}$$

Definition

Une matrice B est dite échelonnée en lignes si

1. chaque ligne non nulle de B commence avec strictement plus de 0 que la ligne précédente, et
2. les lignes nulles (ne contenant que des 0) de B viennent en bas après les lignes non nulles.

Toute matrice A peut se réduire à une matrice échelonnée en lignes B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.
On appelle B la **forme échelonnée en lignes** de A.

Une des concepts fondamentaux dans l'algèbre linéaire est le rang d'une matrice.
Il admet de plusieurs définitions équivalentes. En voici la première.

Definition

Le **rang** d'une matrice A est le nombre de lignes non nulles dans sa forme échelonnée en lignes.
On le note rgA.

Example

La matrice suivante A se réduit en sa forme échelonnée en lignes par les pivotages :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} L2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc on a $rgA = 3$.

Example

Pour la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $rg(C) = 2$.

Theorem

Pour toute matrice A on a

- $rgA \leqslant$ *nombre de lignes de* A*,*
- $rgA \leqslant$ *nombre de colonnes de* A*.*

Démonstration.

Idée de la preuve. En réduisant la matrice A en une matrice échelonnée en lignes similaire à celle-ci

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les pivots (les premiers coefficients non nuls des lignes non nulles) sont dans des lignes distinctes et dans des colonnes distinctes.
Donc
nombre de pivots $\leqslant$ nombre de lignes de A,
nombre de pivots $\leqslant$ nombre de colonnes de A. $\square$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$rang = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$rang = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$rang = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$rang = 3$$

Le nombre de pivots est aussi le nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée de A, d'où nombre de pivots $= rgA$.

On a vu qu'on peut associer une matrice à chaque membre d'un système linéaire. Pour le système

$$\begin{cases} x - 3y + 6z + 2w &= -1, \\ 2x - 5y + 10z + 3w &= 0, \\ 3x - 8y + 17z + 4w &= 1, \end{cases}$$

on a les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec A la matrice des coefficients regroupant les coefficients des variables du membre de gauche du système, et le vecteur colonne b contient le membre de droite.
Quand on met les deux ensemble, on a la matrice dite **augmentée**.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 10 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 17 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition

Le rang d'un système linéaire est le rang de sa matrice des coefficients A.

Par exemple, le rang du système ci-dessus est 3, selon les calculs faits sur la page précédente.

Résolution avec une matrice augmentée.

Proposition

Lorsque l'ont a appliqué la ***méthode de Gauss*** *à une* ***matrice augmentée****, on a deux cas de figures :*
On considère la ligne la plus basse qui ne contient pas que des 0

- *Si elle contient uniquement une valeur non nulle sur la dernière colonne (second membre) alors le système n'admet aucune solution.*
- *Sinon le système admet au moins une solution.*
- *Le nombre d'inconnues principales est égal au nombre de pivots, il est égal au rang de la matrice.*

$$\begin{cases} x + y - z = -2 & E_1 \\ x - y = 0 & E_2 \\ x + 4y + z = 2 & E_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & E_1' = E_2 \\ x + y - z = -2 & E_2' = E_1 \\ x + 4y + z = 2 & E_3' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & E_1" \\ 2y - z = -2 & E_2" = E_2' - E_1' \\ 5y + z = 2 & E_3" = E_3' - E_1' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 & E_1 \\ 2y - z = -2 & E_2 \\ \frac{7}{2}z = 7 & E_3 = E_3" - 5/2E_2" \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y - z = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} E_1' = E_2 \\ E_2' = E_1 \\ E_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} E_1" \\ E_2" = E_2' - E_1' \\ E_3" = E_3' - E_1' \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 7 \end{bmatrix} E_3 = E_3" - \frac{5}{2} E_2"$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A partir de la matrice échelonnée, on "remonte".

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

L'unique solution du système est $(0, 0, 2)$ que l'on "lit" sur la dernière colonne.

- Si l'on obtient la matrice augmentée : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  Il n'y a pas de solution car sur la dernière ligne où il n'y a pas que des 0, seul le second membre n'est pas nul.
- Si l'on obtient la matrice augmentée : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  Il n'y a que deux pivots principaux donc il y a une infinité de solutions. Pour les décrire, on revient au système
  $\begin{cases} x & + & 2y & + & 4z & = & 8 \\ & & & & z & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow$
  $\begin{cases} x & + & 2y & + & 4z & = & 8 \\ & & & & z & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow$Les inconnues principales sont x et z et s'expriment en fonction des autres inconnues y qui peuvent être considérées comme des paramètres :
  $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -2y - 4z + 8 \\ z & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -2y + 4 \\ z & = & 1 \end{cases}$
  L'ensemble des solutions est donc $S = \{(-2y + 4; y; 1), y \in \mathbb{R}\}$

Si l'on obtient la matrice augmentée : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Il y a exactement 3 pivots principaux donc il n'y qu'une solution.

On peut donner des critères selon lesquels un système aura une solution unique.

Theorem

Un système est de Cramer si et seulement si son système admet une seule solution.

Theorem

Un système de n équations à n inconnues est un système de Cramer si la méthode du pivot de Gauss fait apparaître successivement n pivots (non nuls) ce qui est équivalent au fait que le rang de la matrice du système est n.

Exercice

Pour quelles valeurs du paramètre ℓ le système suivant est-il de Cramer ?

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=4 \\ -x+y+2z=5 \\ 7x+3y+(\ell-5)z=7 \end{array}\right.$$

Solution

On construit la matrice augmentée et on en détermine une forme échelonnée : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & \ell-5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & \ell-5 & 7 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 14 \\ 0 & 10 & \ell+9 & 42 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & \ell-1 & 14 \end{pmatrix}$

- Si $\ell = 1$, le système n'admet pas de solution.
- Si $\ell \neq 1$ le système admet une unique solution : il est de rang 3. C'est un système de Cramer.

Méthodologie pour résoudre un système d'équations linéaires

Avant tout calcul, observer le système, les inconnues, les coefficients, les signes.
Réorganiser le système et simplifier les multiples s'il y a (diviser les équations par une constante).
Regrouper les équations similaires.
Quelques cas classiques :

1. Effectuer les somme, demi-somme, différence, demi-différence.
2. Utiliser la substitution si les coefficents sont simples (1 ou -1).
3. Penser à essayer la somme de toutes les équations.

Résolution

- Attention aux équations de compatibilité.
- S'il a une infinité de solutions, définir les inconnues principales et celles qui joueront le rôle de paramètre.
- Prendre soin de bien décrire les solutions.