Dérivabilité

Définition (Dérivabilité en un point ou sur une partie de $\mathbb{R}$)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- *Soit $a \in D$. On dit que f est **dérivable en** a si, lorsque x tend vers a,*

  $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ ADMET UNE LIMITE QUI EST FINIE.}$$

  Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et notée $f'(a)$.
- *On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de D. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ est alors appelée la dérivée de f.*

Remarque

- On note $\mathscr{D}(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- Dans la notation f', on a défini implicitement x comme la variable. Pour éviter les ambiguïtés (fonctions à plusieurs variables), on peut noter le nombre dérivé $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ (et on peut remplacer x par n'importe quelle autre symbole).

Définition (Tangente)

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

- *Si f est dérivable en a, la droite d'équation : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée la tangente de f en a.*
- *Si : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, la droite d'équation : $x = a$ est appelée la tangente de f en a.*

Attention Ne pas confondre deux domaines mathématiques séparés :

- Analyse : fonction, réel, limite, taux de variation, dérivabilité.
- Géométrie : représentation graphique, point, coefficient directeur, tangente, asymptote.

Attention Bien distinguer dérivabilité et existence d'une tangente à la courbe représentative.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ ADMET EN } a \ldots$$

Analyse	… UNE LIMITE		… PAS DE LIMITE
Analyse	FINIE	INFINIE	
Géométrie	Tangente	Tangente Verticale	Pas de Tangente
Analyse Analyse	Fonction DERIVABLE	Fonction NON DERIVABLE	

Définition (Dérivabilité à gauche/à droite en un point, demi-tangente)

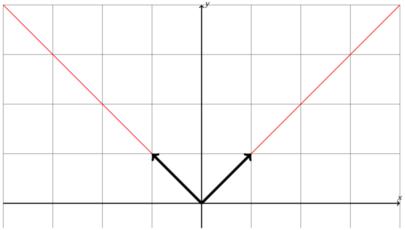
Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

- *On dit que f est dérivable à gauche en a si $f_{|_{D\cap}]-\infty,a]}$ est dérivable en a, i.e. si la limite :* $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et est finie.*
  Cette limite est alors appelée le nombre dérivé à gauche de f en a et notée $f'_g(a)$.
- *On dit que f est dérivable à droite en a si $f_{|_{D\cap}[a,+\infty[}$ est dérivable en a, i.e. si la limite :* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et est finie.*
  Cette limite est alors appelée le nombre dérivé à droite de f en a et notée $f'_d(a)$.

Théorème (Caractérisation de la dérivabilité à l'aide des dérivabilités à gauche/à droite)

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.
f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a avec de plus : $f'_g(a) = f'_d(a)$.

La fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0, mais pas en 0 car : $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$ donc $f'_g(0) \neq f'_g(0)$.



Démonstration.

f est dérivable en a

$\iff \quad \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie

$\iff \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existent, sont finies et égales

$\iff \quad f$ est dérivable à gauche et à droite en a et : $\quad f'_g(a) = f'_d(a)$. $\square$

Théorème (La dérivabilité implique la continuité)

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Attention ! La réciproque est totalement fausse

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 .

Il existe même des fonctions qui sont continues sur tout $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point.

Théorème (La dérivabilité implique la continuité)

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Attention ! La réciproque est totalement fausse
La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 .
Il existe même des fonctions qui sont continues sur tout $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point.

Remarque
Cette propriété n'a aucun intérêt pratique : on ne peut pas s'intéresser à la dérivabilité si on n'a pas vérifié que la fonction est continue.
Exemple : Une fonction polynôme n'est pas "continue parce qu'elle est dérivable" mais "est continue et de plus dérivable".

Théorème (Opérations sur la dérivabilité)

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *deux fonctions et* $a \in D$. *On suppose* f *et* g *dérivables en* a.

1. *Combinaison linéaire : Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda f + \mu g$ *est dérivable en* a *et :* $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

Théorème (Opérations sur la dérivabilité)

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions et $a \in D$. On suppose f et g dérivables en a.

1. *Combinaison linéaire : Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}, \lambda f + \mu g$ est dérivable en a et :* $\quad (\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
2. *Produit : fg est dérivable en a et :* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Théorème (Opérations sur la dérivabilité)

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions et $a \in D$. On suppose f et g dérivables en a.

1. *Combinaison linéaire : Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et :* $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
2. *Produit : fg est dérivable en a et :* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. *Quotient : Si : $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et :*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration.

Pour les assertions (2) et (3), remarquons que : $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ car la dérivabilité de g en a implique sa continuité.

- $\dfrac{(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(a)}{x-a}$
  $= \lambda\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} + \mu\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda f'(a)+\mu g'(a)$.
- $\dfrac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}$
  $= \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\rightarrow} f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.
- Supposons : $g(a)\neq 0$ comme g est continue, elle est non nulle sur un intervalle I ouvert contenant a.
  $\forall x\in I,\ \dfrac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(a)}{x-a} = -\dfrac{1}{g(x)g(a)}\times\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\dfrac{g'(a)}{g(a)^2}$.

$\square$

Théorème

Soient $f : D \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions et $a \in D$.
On suppose f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$.

- *Composition : $g \circ f$ est dérivable en a et :*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$$

.

Démonstration.

- Pour tout $y \in E$, posons :

$$\tau(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{si : } y \neq f(a) \\ g'(f(a)) & \text{si : } y = f(a) \end{cases}$$

Par dérivabilité de g en f(a) : $\lim\limits_{y \to f(a)} \tau(y) = g'(f(a))$,

Donc pour tout $x \in E$: $\tau(f(x))(f(x) - f(a)) = g \circ f(x) - g \circ f(a)$

y compris pour $x = a$

De plus $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Donc $$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tau(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a) g'(f(a)).$$

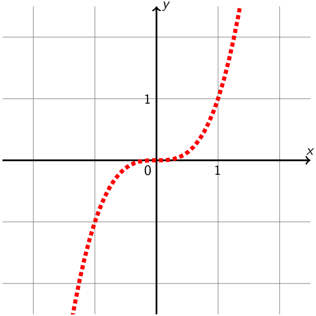
$\square$

Définition

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle fonction réciproque de f la fonction, notée f^{-1} telle que
$\forall x \in I, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble

$$\{M(x, y),\ \ y = f(x)\ \text{ avec } x \in D\}$$
$$= \{M(x, f(x))\ \text{ avec } x \in D\}$$

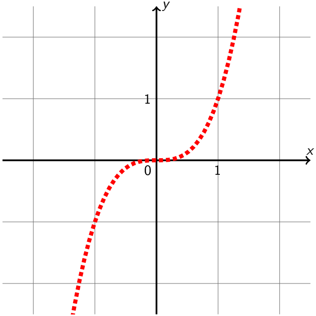


Définition

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle fonction réciproque de f la fonction, notée f^{-1} telle que
$\forall x \in I, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble

$$\{M(x,y),\ y = f(x) \text{ avec } x \in D\}$$
$$= \{M(x, f(x)) \text{ avec } x \in D\}$$
$$= \left\{M(x,y),\ f^{-1}(y) = x \text{ avec } y \in E\right\}$$

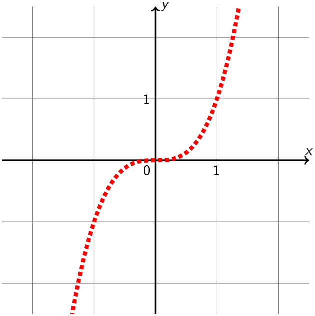


Définition

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle fonction réciproque de f la fonction, notée f^{-1} telle que
$\forall x \in I, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble

$$\{M(x,y),\ y = f(x)\ \text{ avec } x \in D\}$$
$$= \{M(x, f(x))\ \text{ avec } x \in D\}$$
$$= \left\{M(x,y),\ f^{-1}(y) = x\ \text{ avec } y \in E\right\}$$
$$= \left\{M\left(f^{-1}(y), y\right)\ \text{ avec } y \in E\right\}$$

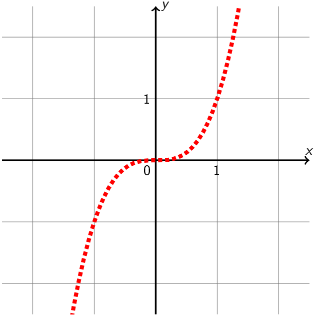


Définition

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle fonction réciproque de f la fonction, notée f^{-1} telle que
$\forall x \in I, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble

$$\begin{aligned}
&\{M(x,y),\ y = f(x) \text{ avec } x \in D\}\\
&= \{M(x, f(x)) \text{ avec } x \in D\}\\
&= \left\{M(x,y),\ f^{-1}(y) = x \text{ avec } y \in E\right\}\\
&= \left\{M\left(f^{-1}(y), y\right) \text{ avec } y \in E\right\}\\
&= \left\{M\left(f^{-1}(x), x\right) \text{ avec } x \in E\right\}
\end{aligned}$$

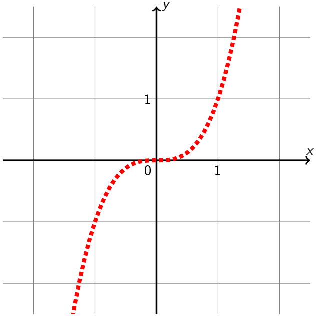


Définition

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle fonction réciproque de f la fonction, notée f^{-1} telle que
$\forall x \in I, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble

$$\begin{aligned}
&\{M(x,y),\ y = f(x) \text{ avec } x \in D\}\\
&= \{M(x, f(x)) \text{ avec } x \in D\}\\
&= \left\{M(x,y),\ f^{-1}(y) = x \text{ avec } y \in E\right\}\\
&= \left\{M\left(f^{-1}(y), y\right) \text{ avec } y \in E\right\}\\
&= \left\{M\left(f^{-1}(x), x\right) \text{ avec } x \in E\right\}
\end{aligned}$$

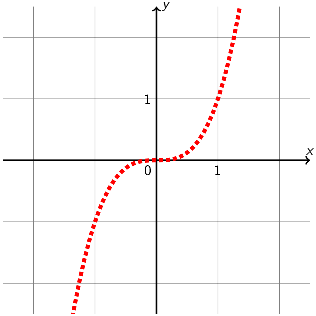


Définition

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle fonction réciproque de f la fonction, notée f^{-1} telle que
$\forall x \in I, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble

$$\begin{aligned}
&\{M(x,y),\ y = f(x) \ \text{ avec } x \in D\}\\
&= \{M(x, f(x)) \ \text{ avec } x \in D\}\\
&= \left\{M(x,y),\ f^{-1}(y) = x \ \text{ avec } y \in E\right\}\\
&= \left\{M\left(f^{-1}(y), y\right) \ \text{ avec } y \in E\right\}\\
&= \left\{M\left(f^{-1}(x), x\right) \ \text{ avec } x \in E\right\}
\end{aligned}$$

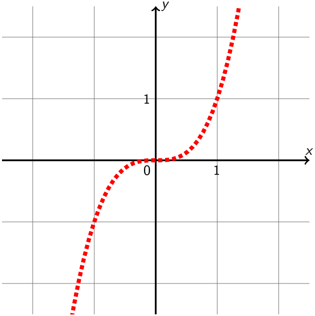


Définition

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle fonction réciproque de f la fonction, notée f^{-1} telle que
$\forall x \in I, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble

$$\{M(x,y),\ y = f(x) \text{ avec } x \in D\}$$
$$= \{M(x, f(x)) \text{ avec } x \in D\}$$
$$= \left\{M(x,y),\ f^{-1}(y) = x \text{ avec } y \in E\right\}$$
$$= \left\{M\left(f^{-1}(y), y\right) \text{ avec } y \in E\right\}$$
$$= \left\{M\left(f^{-1}(x), x\right) \text{ avec } x \in E\right\}$$



Cet ensemble est le symétrique par rapport à l'axe d'équation $y = x$ de l'ensemble

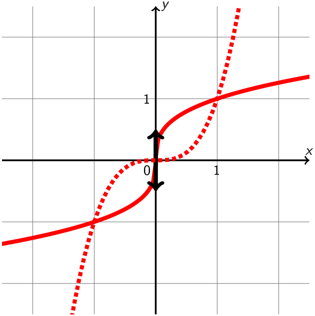
$$\left\{M\left(x, f^{-1}(x)\right) \text{ avec } x \in E\right\}$$

Définition

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
On appelle fonction réciproque de f la fonction, notée f^{-1} telle que
$\forall x \in I, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble

$$\begin{aligned} &\{M(x,y),\ y = f(x) \text{ avec } x \in D\} \\ &= \{M(x, f(x)) \text{ avec } x \in D\} \\ &= \left\{M(x,y),\ f^{-1}(y) = x \text{ avec } y \in E\right\} \\ &= \left\{M\left(f^{-1}(y), y\right) \text{ avec } y \in E\right\} \\ &= \left\{M\left(f^{-1}(x), x\right) \text{ avec } x \in E\right\} \end{aligned}$$



Cet ensemble est le symétrique par rapport à l'axe d'équation $y = x$ de l'ensemble

$$\left\{M\left(x, f^{-1}(x)\right) \text{ avec } x \in E\right\}$$

Théorème (Dérivabilité d'une réciproque)

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.

Théorème (Dérivabilité d'une réciproque)

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
Si f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors

Théorème (Dérivabilité d'une réciproque)

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
Si f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors

- *f^{-1} est dérivable sur J*

Théorème (Dérivabilité d'une réciproque)

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
Si f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors

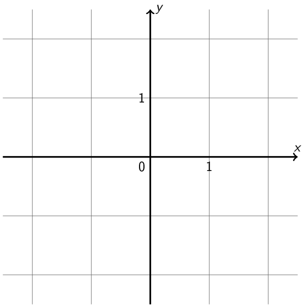
- f^{-1} *est dérivable sur J*
- $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

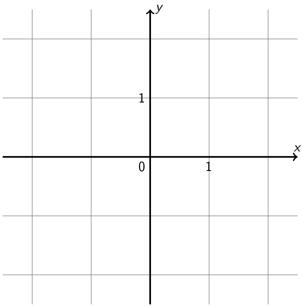
Théorème (Dérivabilité d'une réciproque)

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
Si f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors

- f^{-1} *est dérivable sur J*
- $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Attention ! L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



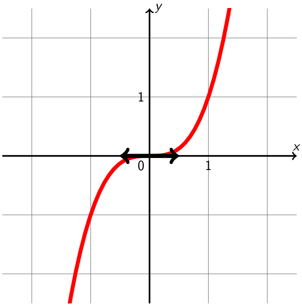


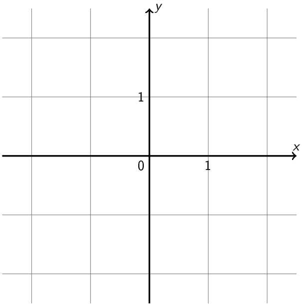
Théorème (Dérivabilité d'une réciproque)

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
Si f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors

- *f^{-1} est dérivable sur J*
- $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Attention ! L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



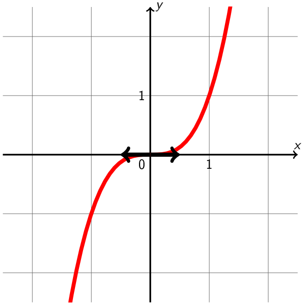


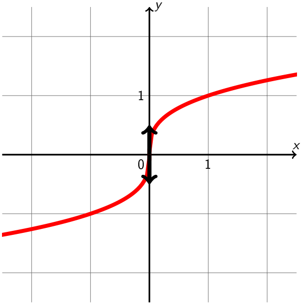
Théorème (Dérivabilité d'une réciproque)

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
Si f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors

- *f^{-1} est dérivable sur J*
- $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Attention ! L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



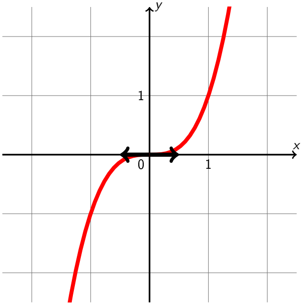


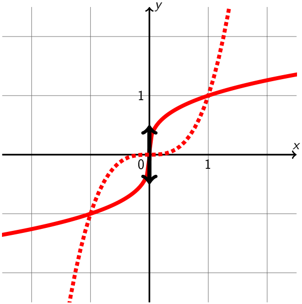
Théorème (Dérivabilité d'une réciproque)

Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$.
Si f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors

- *f^{-1} est dérivable sur J*
- $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Attention ! L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !





Démonstration.

Soit $b \in J$. On pose $a = f^{-1}(b)$

- Or f est dérivable en $a = f^{-1}(b)$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, donc après passage à l'inverse (par hypothèse f' ne s'annule pas) :

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

□

Démonstration.

Soit $b \in J$. On pose $a = f^{-1}(b)$

- Or f est dérivable en $a = f^{-1}(b)$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, donc après passage à l'inverse (par hypothèse f' ne s'annule pas) :

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

- Comme f est continue et bijective, f^{-1} est continue en b :

$$\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$$

$\square$

Démonstration.

Soit $b \in J$. On pose $a = f^{-1}(b)$

- Or f est dérivable en $a = f^{-1}(b)$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, donc après passage à l'inverse (par hypothèse f' ne s'annule pas) :

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

- Comme f est continue et bijective, f^{-1} est continue en b :

$$\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$$

- On peut donc remplacer x par $f^{-1}(y)$ et a par $f^{-1}(b)$ donc par composition :

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

$\square$

Remarque sur la démonstration :
On pourrait penser à écrire le taux de variation de la façon suivante :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Remarque sur la démonstration :
On pourrait penser à écrire le taux de variation de la façon suivante :

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Mais dans ce cas là, on divise par $f(x) - f(a)$ et mais cette valeur pourrait être nulle ce qui pose un problème.
Cela explique l'introduction de la fonction τ

Principales formules à connaitre, x est une variable

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Compositions, u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'\left(1+\tan^2 u\right) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

Définition (Dérivées successives)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On définit $\forall k \in \mathbb{N}, P_k : f^{(k)}$ est définie sur D et $f^{(k)}$ est dérivable sur D.
On définit : $f^{(0)} = f$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, k < n, P_k$ est vraie, on peut définir $f^{(n+1)} = {f^{(n)}}'$ sur D.
$f^{(k)}$ est dite dérivée $k^{\text{ème}}$ de f.
On dit que f est k fois dérivable sur D.

Remarque

1. On note généralement f, f', f'' et f''' plutôt que $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}$ et $f^{(3)}$ respectivement.
2. On peut noter la dérivée n-ième $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^k$)

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

- *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D si f est k fois dérivable sur D et si $f^{(k)}$ est continue sur D. On note $\mathscr{C}^k(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
- *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D si f est dérivable autant de fois qu'on le veut sur D.*
- *On note $\mathscr{C}^\infty(D, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur D à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Attention ! Être de classe $\mathscr{C}^1$, ce n'est pas

être "dérivable et continue"

mais

être " dérivable à dérivée continue ".

Classe $\mathscr{C}^\infty$

$\downarrow$

$\dots$

$\downarrow$

Classe $\mathscr{C}^2$

$\downarrow$

Dérivabilité deux fois

$\downarrow$

Classe $\mathscr{C}^1$

$\downarrow$

Dérivabilité

$\downarrow$

Continuité=Classe $\mathscr{C}^0$

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}, (f, g) \in (\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}))^2$ *et* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. *Alors*

$$\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$$

et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

(on dit que l'ensemble des fonctions de classe C^n *est un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel)*

Démonstration.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

Si f et g sont $\mathcal{C}^n$, alors $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^n$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

Pour $n = 0$, on a vu dans le chapitre précédent que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Supposons f et g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Alors f et g sont $\mathcal{C}^n$, donc par hypothèse de récurrence, $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^n$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
Comme $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont $\mathcal{C}^1$ (car f et g sont $\mathcal{C}^{n+1}$, $(\lambda f + \mu g)^{(n)}$ est dérivable (comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont - c'est la propriété $\mathcal{P}(0)$) de dérivée $(\lambda f + \mu g)^{(n+1)} = \lambda f^{(n+1)} + \mu g^{(n+1)}$ continue.
Ainsi $\lambda f + \mu g$ est $\mathcal{C}^{n+1}$ et on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie. $\square$

Formule de Leibniz

Proposition (Formule de Leibniz)

Soient $n \in \mathbb{N}, f, g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^n \text{ sur } I\text{, alors } fg \text{ est } \mathcal{C}^n \text{ sur } I \text{ et}$$
$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

- Si f et g sont continues sur I, alors fg est continue sur I et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(0-k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} f^{(0)} g^{(0)} = fg = (fg)^{(0)}$, donc on a $\mathcal{P}(0)$.
- Au rang k : " $\forall f, g \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{C}), \quad fg \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{C}) \quad$ et $\displaystyle(fg)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} f^{(p)} g^{(k-p)}$ ».

□

Démonstration.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose le P_k vraie.
Soient $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{C})$.
Aussitôt : $f, g \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{C})$, donc : $fg \in \mathscr{C}^1(D, \mathbb{C})$ et :
$(fg)' = f'g + fg'$.
Or : $f'g, fg' \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{C})$ par hypothèse de récurrence, donc :
$(fg)' \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{C})$, i.e. : $fg \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{C})$. $\square$

Démonstration.

Ensuite : $(fg)^{(k+1)} = ((fg)')^{(k)} = (f'g)^{(k)} + (fg')^{(k)}$

$$\overset{\text{HDR}}{=} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (f')^{(p)} g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} (g')^{(k-p)}$$

$$= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p+1)} g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)}$$

$$= \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p-1} f^{(p)} g^{(k-p+1)} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)}$$

$$= \underbrace{f^{(0)} g^{(k+1)}}_{p=0} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k+1}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)} + \underbrace{f^{(k+1)} g^{(0)}}_{p=k+1}$$

$$= \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)}$$

□

Proposition

Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est $\mathcal{C}^n$ sur I.

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^n$ sur I telles que $f(I) \subset J$. Alors $(g \circ f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Proposition

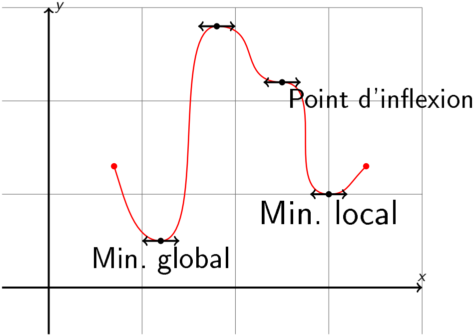
Soit $f : I \to J$ bijective, de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et telle que f' ne s'annule pas. Alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- *On dit que f admet un maximum local en a, s'l existe un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $f_{|I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ admette un maximum en a, i.e :*

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], f(x) \leq f(a)$$



Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- *On dit que f admet une maximum local en a, s'l existe un réel $\eta > 0$ tel que la fonction $f_{|I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ admette un maximum en a, i.e :*

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], f(x) \leq f(a)$$

- *On dit que f admet une minimum local en a, s'il existe un réel $\eta > 0$ (eta) tel que la fonction $f_{|I\cap[a-\eta,a+\eta]}$ admette un minimum en a, i.e :*

$$\forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta], f(a) \leq f(x)$$

- *On dit que f admet un extremum local en a, si f admet un maximum ou un minimum local en a.*

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

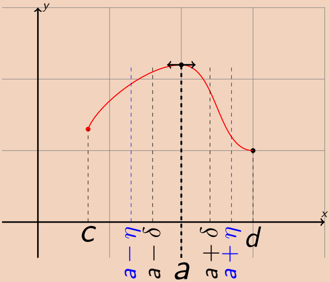
Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet en a un maximum local.

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet en a un maximum local.
Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, f(x) \leq f(a)$.
Comme a n'est pas une extrémité de I, il existe $\nu > 0$ tel que $[a-\nu, a+\nu] \subset I$.
Posons $\delta = \min(\eta, \nu) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) \leq f(a)$.



□

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet en a un maximum local.
Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, f(x) \leq f(a)$.
Comme a n'est pas une extrémité de I, il existe $\nu > 0$ tel que $[a-\nu, a+\nu] \subset I$.
Posons $\delta = \min(\eta, \nu) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) \leq f(a)$.

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet en a un maximum local.
Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, f(x) \leq f(a)$.
Comme a n'est pas une extrémité de I, il existe $\nu > 0$ tel que $[a-\nu, a+\nu] \subset I$.
Posons $\delta = \min(\eta, \nu) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) \leq f(a)$.
Pour tout $x \in \left[a-\delta, a\right[, \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (car $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a < 0$),

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet en a un maximum local.
Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, f(x) \leq f(a)$.
Comme a n'est pas une extrémité de I, il existe $\nu > 0$ tel que $[a-\nu, a+\nu] \subset I$.
Posons $\delta = \min(\eta, \nu) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) \leq f(a)$.
Pour tout $x \in \left[a-\delta, a\right[, \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (car $f(x)-f(a) \leq 0$ et $x - a < 0$), donc en passant à la limite quand $x \to a^-$

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet en a un maximum local.
Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, f(x) \leq f(a)$.
Comme a n'est pas une extrémité de I, il existe $\nu > 0$ tel que $[a-\nu, a+\nu] \subset I$.
Posons $\delta = \min(\eta, \nu) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) \leq f(a)$.
Pour tout $x \in \left[a-\delta, a\right[, \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (car $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a < 0$), donc en passant à la limite quand $x \to a^-$(comme f est dérivable en a), $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$.

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet en a un maximum local.
Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, f(x) \leq f(a)$.
Comme a n'est pas une extrémité de I, il existe $\nu > 0$ tel que $[a-\nu, a+\nu] \subset I$.
Posons $\delta = \min(\eta, \nu) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) \leq f(a)$.
Pour tout $x \in \left[a-\delta, a\right[, \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (car $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a < 0$), donc en passant à la limite quand $x \to a^-$(comme f est dérivable en a), $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$. De même, pour tout $x \in]a, a+\delta], \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ (car $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a > 0$),

Proposition (Condition nécessaire d'extrémum)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I (i.e. $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I), alors $f'(a) = 0$.

Démonstration.

Quitte à changer f en $-f$, on suppose que f admet en a un maximum local.
Il existe alors $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I, f(x) \leq f(a)$.
Comme a n'est pas une extrémité de I, il existe $\nu > 0$ tel que $[a-\nu, a+\nu] \subset I$.
Posons $\delta = \min(\eta, \nu) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) \leq f(a)$.
Pour tout $x \in \left[a-\delta, a\right[, \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (car $f(x)-f(a) \leq 0$ et $x-a<0$), donc en passant à la limite quand $x \to a^-$(comme f est dérivable en a), $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$. De même, pour tout $x \in]a, a+\delta], \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ (car $f(x)-f(a) \leq 0$ et $x-a>0$), donc en passant à la limite quand $x \to a^+, f'(a) = f'_d(a) \leq 0$.
Ainsi, $f'(a) = 0$. $\square$

Remarques.

- La condition $f'(a) = 0$ n'implique pas qu'il y ait un extremum local en a.
  Par exemple, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ satisfait $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0 .
- L'hypothèse a intérieur à I est essentielle : par exemple, la fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto [0, 1]$ est dérivable sur $[0, 1]$ et a son minimum en 0 et son maximum en 1 , mais $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.
- Pour déterminer les extrema d'une fonction f, on procèdera comme suit :
  - on étudie les extrema en les points intérieurs à I : on résout l'équation $f'(x) = 0$, puis on vérifie si les points obtenus correspondent ou non à des extrema locaux (avec le tableau de variations de f par exemple).
  - on étudie si les extrémités de I (si elles appartiennent à I) correspondent ou non à des extrema locaux de f.

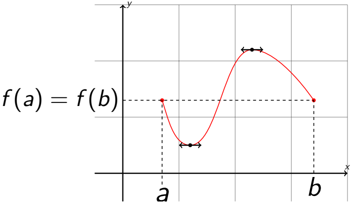
Théorème (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction*

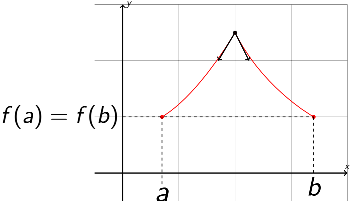
- *continue sur* $[a, b]$
- *dérivable sur* $]a, b[$
- *telle que* $f(a) = f(b)$

Il existe un réel $c \in]a, b[$ *pour lequel :* $f'(c) = 0$.

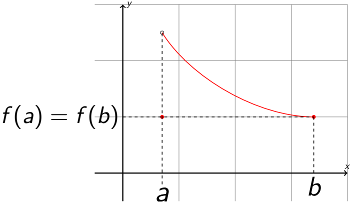
Remarque Chaque hypothèse du théorème a son importance.



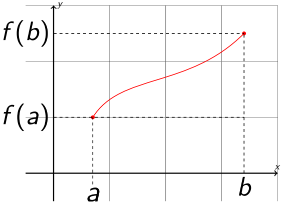
Hypothèses vérifiées



Pas de dérivabilité en un point



Pas de continuité sur $[a; b]$



$f(a) \neq f(b)$

Démonstration.

La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, f est bornée et possède un minimum m et un maximum M d'après le théorème des bornes atteintes.

- Si : $f(a) = f(b) \neq M$, alors comme f atteint ses bornes : $f(c) = M$ pour un certain $c \in]a, b[$. Par hypothèse, c n'est alors pas une borne de $[a, b]$, donc : $f'(c) = 0$ d'après le théorème précédent.
- Si : $f(a) = f(b) \neq m$, même raisonnement.
- Dernier cas enfin : $f(a) = f(b) = m = M$.

  Dans ce cas, f est constante de valeur $M = m$ sur tout $[a, b]$ par définition de m et M, donc f' est nulle sur tout $[a, b]$

$\square$

Théorème (Théorème des accroissements finis)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$.
Il existe un réel $c \in]a,b[$ *pour lequel :* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, *ou encore :*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Remarque
Le théorème des accroissements finis généralise le théorème de Rolle.

DES INFORMATIONS SUR f'
DONNENT
DES INFORMATIONS SUR f.

Très utile pour utiliser toute majoration/minoration de f' pour obtenir une majoration/minoration sur f.

Démonstration.

On pose $\phi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$.
ϕ est la somme de f et d'une fonction linéaire donc :

- ϕ est une fonction continue sur $[a;b]$.
- ϕ est une fonction dérivable sur $]a;b[$.
-
    - $\phi(a) = f(a) + \dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}(a-a) = f(a)$
    - $\phi(b) = f(b) + \dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}(b-a) = f(a)$

donc $\phi(a) = \phi(b)$
On peut donc appliquer le théorème de Rolle à ϕ :
il existe c tel que $\phi'(c) = 0$
Donc $f'(x) + \dfrac{f(a)-f(b)}{b-a} = 0$ donc $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\square$

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.*
- *f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur I.*

Démonstration.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Immédiat.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Immédiat.
  $\Leftarrow$ Supposons que $f' = 0$ sur I, et soit $x, y \in I, x < y$.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Immédiat.
  $\Leftarrow$ Supposons que $f' = 0$ sur I, et soit $x, y \in I, x < y$. D'après le théorème des accroissements finis entre x et y (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(x) = f(y)$.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Immédiat.
  $\Leftarrow$ Supposons que $f' = 0$ sur I, et soit $x, y \in I, x < y$. D'après le théorème des accroissements finis entre x et y (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(x) = f(y)$.
- On traite le cas f croissante (l'autre cas s'en déduit en remplaçant f par $-f$).

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Immédiat.
  $\Leftarrow$ Supposons que $f' = 0$ sur I, et soit $x, y \in I, x < y$. D'après le théorème des accroissements finis entre x et y (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(x) = f(y)$.
- On traite le cas f croissante (l'autre cas s'en déduit en remplaçant f par $-f$).
  $\Rightarrow$ Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, avec $x \neq a$, on a
  $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Immédiat.
  $\Leftarrow$ Supposons que $f' = 0$ sur I, et soit $x, y \in I, x < y$. D'après le théorème des accroissements finis entre x et y (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(x) = f(y)$.
- On traite le cas f croissante (l'autre cas s'en déduit en remplaçant f par $-f$).
  $\Rightarrow$ Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, avec $x \neq a$, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. En faisant tendre x vers a, on obtient, par passage à la limite dans les inégalités, que $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Immédiat.
  $\Leftarrow$ Supposons que $f' = 0$ sur I, et soit $x, y \in I, x < y$. D'après le théorème des accroissements finis entre x et y (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(x) = f(y)$.
- On traite le cas f croissante (l'autre cas s'en déduit en remplaçant f par $-f$).
  $\Rightarrow$ Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, avec $x \neq a$, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. En faisant tendre x vers a, on obtient, par passage à la limite dans les inégalités, que $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$.
  $\Leftarrow$ Supposons f' à valeurs positives. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Immédiat.
  $\Leftarrow$ Supposons que $f' = 0$ sur I, et soit $x, y \in I, x < y$. D'après le théorème des accroissements finis entre x et y (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(x) = f(y)$.
- On traite le cas f croissante (l'autre cas s'en déduit en remplaçant f par $-f$).
  $\Rightarrow$ Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, avec $x \neq a$, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. En faisant tendre x vers a, on obtient, par passage à la limite dans les inégalités, que $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$.
  $\Leftarrow$ Supposons f' à valeurs positives. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. Par le théorème des accroissements finis (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$ car $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Immédiat.
  $\Leftarrow$ Supposons que $f' = 0$ sur I, et soit $x, y \in I, x < y$. D'après le théorème des accroissements finis entre x et y (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Donc $f(x) = f(y)$.
- On traite le cas f croissante (l'autre cas s'en déduit en remplaçant f par $-f$).
  $\Rightarrow$ Soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, avec $x \neq a$, on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. En faisant tendre x vers a, on obtient, par passage à la limite dans les inégalités, que $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$.
  $\Leftarrow$ Supposons f' à valeurs positives. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. Par le théorème des accroissements finis (f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ car dérivable sur I), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$ car $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$. Ainsi $f(y) \geq f(x)$ et f est croissante.

$\square$

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Théorème

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

Démonstration.

Par l'absurde, si f n'est pas strictement croissante, alors il existe $c < d, (c, d) \in I^2$, tels que $f(c) = f(d)$.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Démonstration.

Par l'absurde, si f n'est pas strictement croissante, alors il existe $c < d, (c, d) \in I^2$, tels que $f(c) = f(d)$. Comme f est croissante, on a donc $f_{[c,d]}$ constante et alors

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Démonstration.

Par l'absurde, si f n'est pas strictement croissante, alors il existe $c < d, (c, d) \in I^2$, tels que $f(c) = f(d)$. Comme f est croissante, on a donc $f_{[c,d]}$ constante et alors f' est nulle sur le segment $[c, d]$.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Démonstration.

Par l'absurde, si f n'est pas strictement croissante, alors il existe $c < d, (c, d) \in I^2$, tels que $f(c) = f(d)$. Comme f est croissante, on a donc $f_{[c,d]}$ constante et alors f' est nulle sur le segment $[c, d]$. C'est en contradiction avec l'hypothèse de départ, donc f est strictement croissante. $\square$

Fonctions lipschitziennes

Définition (Rappel)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \geq 0$. On dit que f est k-lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k) sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Fonctions lipschitziennes

Définition (Rappel)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \geq 0$. On dit que f est k-lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k) sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .
Si f' est bornée sur I par une constante $M \geq 0$, alors f est M lipschitzienne sur I.

Fonctions lipschitziennes

Définition (Rappel)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \geq 0$. On dit que f est k-lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k) sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .
Si f' est bornée sur I par une constante $M \geq 0$, alors f est M lipschitzienne sur I.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis sur tout segment $[x, y]$: $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. □

Règle de l'Hospital

Théorème

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables et soit* $x_0 \in I$. *On suppose que*

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

Règle de l'Hospital

Théorème

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

Règle de l'Hospital

Théorème

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

$$\textit{Si } \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \textit{alors} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$
- h est dérivable sur $]a, x_0[$

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$
- h est dérivable sur $]a, x_0[$
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$
- h est dérivable sur $]a, x_0[$
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$.

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$
- h est dérivable sur $]a, x_0[$
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$
- h est dérivable sur $]a, x_0[$
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$.

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$
- h est dérivable sur $]a, x_0[$
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$.

Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ cela conduit à

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$
- h est dérivable sur $]a, x_0[$
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$.

Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ cela conduit à $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$.

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$
- h est dérivable sur $]a, x_0[$
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$.

Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ cela conduit à $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$.

Comme $a < c_a < x_0$ lorsque l'on fait tendre a vers x_0 on obtient $c_a \to x_0$.

Démonstration.

Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$.
Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$
- h est dérivable sur $]a, x_0[$
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$.

Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ cela conduit à $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$.

Comme $a < c_a < x_0$ lorsque l'on fait tendre a vers x_0 on obtient $c_a \to x_0$. Cela implique

$$\lim_{a \to x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \ell.$$

$\square$

Exercice : Etude de la dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\to} +\infty$$ donc limite infinie

donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

Mais la courbe représentative admet une tangente verticale

En $a > 0$, on calcule le taux de variation entre a et x et on obtient

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

Donc si $a > 0$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en a, de dérivée $\frac{1}{\sqrt{2a}}$

Si $a = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc limite infinie

donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

Mais la courbe représentative admet une tangente verticale

Etude de la fonction tangente et sa réciproque

On définit la fonction tangente de $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Etude de la fonction tangente et sa réciproque

On définit la fonction tangente de $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Etude de la fonction tangente et sa réciproque

On définit la fonction tangente de $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

- On a $\forall x \in I, \cos x \geqslant 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$.

Etude de la fonction tangente et sa réciproque

On définit la fonction tangente de $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

- On a $\forall x \in I, \cos x \geqslant 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$.
  Comme $f'(x) > 0$ sur I, f est strictement croissante. Par ailleurs, elle est continue sur I, elle réalise donc une bijection de I sur $\mathbb{R}$.

Etude de la fonction tangente et sa réciproque

On définit la fonction tangente de $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

- On a $\forall x \in I, \cos x \geqslant 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$.
  Comme $f'(x) > 0$ sur I, f est strictement croissante. Par ailleurs, elle est continue sur I, elle réalise donc une bijection de I sur $\mathbb{R}$.
- On observe que la dérivée ne s'annule pas donc $atan = \tan^{-1}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$
  $atan'(x) = \dfrac{1}{f'(atan(x))} = \dfrac{1}{1 + \tan^2(atan(x))} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Dérivée de $\cos$ et $\sin$

On admet (démonstration géométrique) que

$$\forall x \in [0 : \frac{\pi}{2}[, \ \sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$$

Alors

$$x \cos x \leq \sin x \qquad \text{et}$$

Dérivée de cos et sin

On admet (démonstration géométrique) que

$$\forall x \in [0 : \frac{\pi}{2}[, \ \sin x \leqslant x \leqslant \frac{\sin x}{\cos x}$$

Alors

$$x \cos x \leq \sin x \qquad \text{et} \qquad x \cos x \leqslant \sin x \leqslant x$$

Il vient $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$ or $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

comme $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est paire, la limite est la même à gauche donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Etude de la dérivée de $\cos$ en 0 :

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{2\dfrac{x}{2}} = -\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

par composition car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2} = 0$

Etude de la dérivée de $\sin$ en un réel a quelconque

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} &= \frac{\cos a\cos h - \sin a \sin h - \cos a}{h} \\ &= \cos a\frac{\cos h - 1}{h} - \sin a\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \cos a \times 0 - \sin a \times 1 = -\sin a$$

Etude de la dérivée de *cos* en un réel *a* quelconque

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} &= \frac{\sin a\cos h+\cos a\sin h-\sin a}{h}\\ &= \sin a\frac{\cos h-1}{h}+\cos a\frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \sin a\times 0+\cos a\ \times 1=\cos a$$

Théorème

On a bien montré que la dérivée de $\sin$ *est* $\cos$
et que la dérivée de $\cos$ *est* $-\sin$