Analyse - Deuxième Semestre 2022

Responsable CM : Didier Cransac (groupes 1 - 2 - 3 - 4 - GEM SUPMECA - MISE - SIC - ENSA-V)
Bureau : CY 201
e-mail : dcc@cy-tech.fr - didier.cransac@cyu.fr

Responsable TD :
Didier Cransac (groupe 1)
Mohamed Bathiti (groupe 2)
Jihan Joder (groupe 3, MISE, SIC)
Thi Hien (groupe 4)
Zahra (GEM, Ensa-V, SupMeca, GC)

Évaluation :
- **DS : 11 Mars, 7 Avril, 2 Mai**
- INTERROGATIONS, QCM et DM

Comment travailler

- Apprendre le cours avant de venir en TD.
- Préparer les exercices des TD.
- Refaire les exercices des TD régulièrement (pas juste avant les DS).
- Travailler les corrigés de tous les TD (même ceux qui n'ont pas été résolus en classe).
- Ne pas hésiter à consulter les documents fournis par d'autres professeurs dans les autres TD ou sur internet.

Plan

- **Chapitre 0** : Les grands théorèmes de la Continuité
- **Chapitre 1** : Dérivation.
- **Chapitre 2** : Comportement asymptotique
- **Chapitre 3** : Intégration
- **Chapitre 4** : Equations différentielles

CONTINUITE (RAPPEL)

Les grands théorèmes de la Continuité

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires (TVI))

Soit $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $a < b \in I$, *tels que*

$$f(a)f(b) \leq 0.$$

Alors il existe c *dans* $[a; b]$ *tel que*

$$f(c) = 0.$$

Les grands théorèmes de la Continuité

Démonstration.

Supposons que $a < b$. On construit par récurrence deux suites **adjacentes**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

d'éléments de $[a, b]$ dont la limite commune c vérifie $f(c) = 0$.
Construisons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons définir a_n et b_n de façon d'avoir

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{et} \quad f(a_n)f(b_n) < 0.$$

Pour cela, posons $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Ainsi

- si $f(a_n)f(m_n) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.
- si $f(a_n)f(m_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Dans chacun de ces deux cas, on obtient

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

□

Les grands théorèmes de la Continuité

Démonstration.

Montrons que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**. Par construction

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**, et
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.
- De plus, par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \implies \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0.$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et convergent vers la même limite $c \in [a, b]$.

Comme f est continue, en passant à la limite dans l'inégalité $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, on obtient

$$f(c)^2 = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) f\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0.$$

Ainsi, $f^2(c) \leq 0$. Donc $f(c) = 0$ et le théorème est démontré. □

Les grands théorèmes de la Continuité

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires, version « existence d'un antécédent »)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = y.$$

Démonstration.

Soit y entre $f(a)$ et $f(b)$ et posons $g(x) = f(x) - y$. Alors

- La fonction g est continue, et
- $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires, c'est-à-dire $g(a) \cdot g(b) \leq 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [a, b]$, tel que

$$f(c) = y.$$

□

Les grands théorèmes de la continuité

Comme corollaire du résultat précédent nous avons le théorème suivant.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires, version « image d'un intervalle »)

Si I est un intervalle et si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration.

Supposons que $f(I)$ n'est pas un intervalle. Alors il existe $y \in \mathbb{R}$, $a \in I$ et $b \in I$ réels tels que $f(a) < y < f(b)$. Si on applique le théorème des valeurs intermédiaires, on montre qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $y = f(c)$ ce qui est contradictoire. $\square$

Remarque : Si I est un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, cette version du TVI affirme que $f(I)$ est également un intervalle, mais ne signifie pas que I et $f(I)$ sont de même nature. Il se peut que I soit ouvert et $f(I)$ un segment (intervalle fermé), ou bien que I soit semi-ouvert et $f(I)$ ouvert, etc.

Exemples :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \quad \text{et} \quad f(]-\pi,\pi[) = [-1,1]; \\ g(x) &= x^2 \quad \text{et} \quad g(]-1,1[) = [0,1[. \end{aligned}$$

Les grands théorèmes de la Continuité

Théorème (Théorème des bornes atteintes)

- *Toute fonction continue sur un **segment** (intervalle fermé) y est bornée et atteint ses bornes.*
  Autrement dit, si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ et $d \in [a, b]$ tels que pour tout $x \in [a, b]$, nous avons
  $$f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$
- *L'image d'un **segment** par une fonction continue est un **segment**.*

Remarque :

- Nous avons vu que la continuité ne préserve pas la forme des intervalles en général, mais un segment est toujours transformé en un segment.
- Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'est pas nécessaireement bornée.
  Par exemple, la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Les grands théorèmes de la Continuité

Théorème (Réciproque d'une fonction continue)

Soit I un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
*Alors f est injective sur I **si et seulement si** f est strictement monotone.*

Démonstration.

Si f est strictement monotone alors
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \neq y$ alors $x < y$ et $f(x) < f(y)$ ou $x > y$ et $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas, $f(x) \neq f(y)$ donc la fonction f est injective. $\square$

Démonstration.

Réciproquement, supposons que f est injective et continue.
Soient $a < b$ deux réels tels de $I = (a; b)$.
On peut toujours supposer que $f(a) \leq f(b)$ (sinon on considère $-f$)
Soit $(c, d) \in (]a; b[)^2$ avec $c < d$
Si $f(c) \leqslant f(a)$ alors $f(a)$ admet un antécédent sur $[c; b]$ donc f n'est pas injective.
Si $f(c) \geqslant f(b)$ alors $f(b)$ admet un antécédent sur $[a; c]$ donc f n'est pas injective.
Donc $f(c) \in]f(a); f(b)[$
On effectue le même raisonnement pour d et l'intervalle $[c; b]$, on obtient que $f(c) < f(d)$ donc la fonction f est strictement croissante sur I. $\square$

Théorème (Continuité d'une réciproque)

*Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I **réalise une bijection** de I sur l'intervalle $f(I)$.*
*Sa **réciproque** est de plus continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ de même monotonie que f.*