Résumé du cours électrostatique

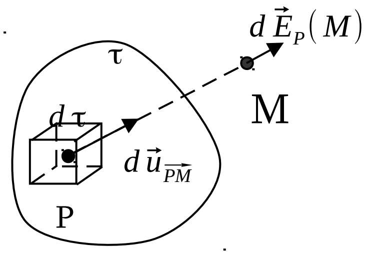
1. Calcul direct du champ électrostatique (électrique) $\vec{E}$ et du potentiel ϕ

● **Distribution de charges ponctuelles q_i placée en P_i: (Coulomb)**

champ électrostatique en M : $\boxed{\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{\overrightarrow{P_i M}}}{P_i M^2}}$

Potentiel électrostatique en M : $\boxed{\phi(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{P_i M}}$ en supposant le potentiel nul à l'infini.

● **Distribution continue de charges :**



Champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}$ créé en M par la charge dq placée en P :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{\overrightarrow{PM}}}{PM^2}$$

Champ et potentiel créé par la distribution de charges :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \int_{P \in Dist} d\vec{E}(M) = \int_{P \in Dist} \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\phi(M) = \int_{P \in Dist} \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{PM}}$$

pour une distribution linéïque : $dq(P) = \lambda(P) dl(p)$ et somme simple $\int$ ...

pour une distribution surfacique : $dq(P) = \sigma(P) dS(p)$ et somme double $\iint$ ...

pour une distribution volumique : $dq(P) = \rho(P) d\tau(p)$ et somme triple $\iiint$ ...

● **<u>Force</u>** sur la charge Q placée en M par une distribution de charge qui crée le champ $\vec{E}$: $\vec{F} = Q\vec{E}(M)$

● **<u>Symétries :</u>**

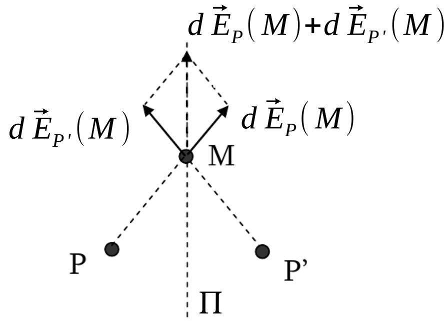
Soit Π un **plan de symétrie** de la distribution de charges :

<u>Prop. 1</u> : Pour tout point $M \in \Pi$: $\vec{E}(M) \parallel \Pi$

Soient P et P' deux points symétriques par Π

==> même charge en P et P'

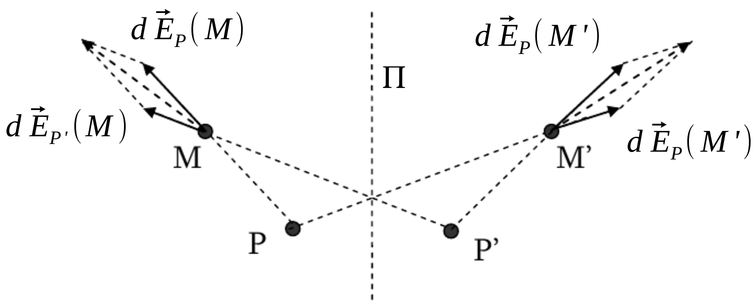
==> $d\vec{E}_P(M) + d\vec{E}_{P'}(M) \parallel \Pi$



<u>Prop. 2</u> : Pour tout point M de l'espace : soit M' le symétrique de M par la symétrie orthogonale de plan Π : $\vec{E}(M')$ est le symétrique de $\vec{E}(M)$ par la symétrie orthogonale de plan Π.

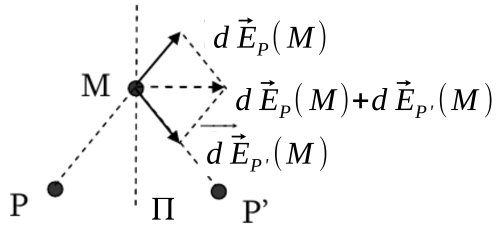
Soient P et P' deux points symétriques par Π
==> même charge en P et P'

Soient M et M' deux points symétriques par Π :
$d\vec{E}_P(M') + d\vec{E}_{P'}(M')$ et $d\vec{E}_P(M) + d\vec{E}_{P'}(M)$ sont symétriques par la symétrie de plan Π.



Soit Π^* un **plan d'anti-symétrie** de la distribution de charges :

$\boxed{\text{Prop. 1 : Pour tout point } M \in \Pi^* \; : \; \vec{E}(M) \perp \Pi^*}$



Soient *P* et *P'* deux points symétriques par Π^*

==> charges opposées en *P* et *P'*

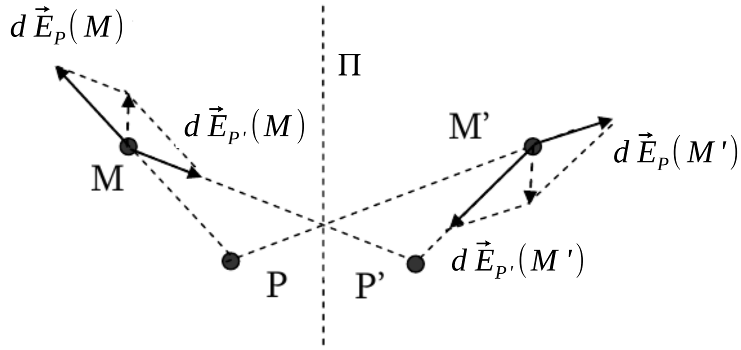
==> $d\vec{E}_P(M)+d\vec{E}_{P'}(M) \perp \Pi^*$

Prop. 2 : Pour tout point *M* de l'espace : soit *M'* le symétrique de *M* par la symétrie orthogonale de plan Π^* : $-\vec{E}(M')$ est le symétrique de $\vec{E}(M)$ par la symétrie orthogonale de plan Π^*.

Soient *P* et *P'* deux points symétriques par Π
==> même charge en *P* et *P'*

Soient *M* et *M'* deux points symétriques par Π :

$-(d\vec{E}_P(M')+d\vec{E}_{P'}(M'))$ et $d\vec{E}_P(M)+d\vec{E}_{P'}(M)$ sont symétriques par la symétrie de plan Π.



- **Invariances :**
  - S'il y a invariance de la distribution de charges par toutes les **translations** le long d'un axe (par exemple l'axe Oz) alors $\|\vec{E}(M)\|$ et $\phi(M)$ ne dépendent pas de la coordonnée le long de cet axe (par exemple *z*)
  - S'il y a invariance de la distribution de charges par toutes les **rotations** autour d'un axe (par exemple l'axe Oz) alors $\|\vec{E}(M)\|$ et $\phi(M)$ ne dépendent pas de l'angle qui fait tourner autour de cet axe.

- **Lien entre $\vec{E}$ et ϕ en électrostatique** : $\boxed{\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\,\phi(M)}$

Propriété du **gradient** (définition) : $d\phi = \overrightarrow{grad}\,\phi . d\vec{l}$ donc $d\phi = -\vec{E}.d\vec{l}$

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{grad}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{u}_z$

En coordonnées cylindriques et sphériques <u>si ϕ ne dépend que de *r*</u> : $\overrightarrow{grad}\,\phi = \frac{d\phi}{dr}\vec{u}_r$

- **Circulation de $\vec{E}$ de *A* à *B* le long d'un chemin** Γ : $\boxed{C_{\Gamma,AB}(\vec{E}) = \int_{\Gamma, A\to B} \vec{E}.d\vec{l}}$

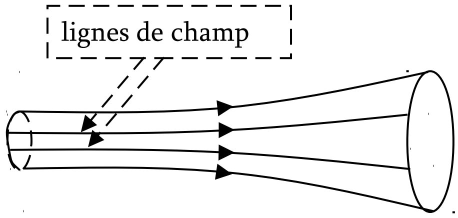
Propriété : En électrostatique $C_{\Gamma,AB}(\vec{E}) = \int_{\Gamma,A\to B}\vec{E}.d\vec{l} = -\int_{\Gamma,A\to B} d\phi = \phi(A)-\phi(B)$ ne dépend pas du chemin suivit Γ pour aller de *A* jusqu'à *B* : $\vec{E}$ est un champ de vecteurs à **circulation conservative**.

Remarque : Si Γ est un contour fermé : $C_\Gamma(\vec{E}) = \oint_{\Gamma,A\to A}\vec{E}.d\vec{l} = 0$

● Déf. : **Ligne de champ** : courbe <u>tangente</u> en chacun de ses points aux vecteurs champ et <u>orientée</u> dans le sens du champ.

Propriétés : Si deux lignes de champ de $\vec{E}$ se croisent en M alors : $\vec{E}(M)=\vec{0}$ ou $\vec{E}(M)$ n'est pas défini (diverge).

Déf. : **Tube de champ** : ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.



● Déf. : **Surface équipotentielle** : ensemble des points de l'espace qui sont au même potentiel.

Propriétés :
- En tout point M, l'équipotentielle qui passe par M est perpendiculaire à la ligne de champ qui passe par M.
- Le long d'une ligne de champ de $\vec{E}$ le potentiel décroît.
- La direction de $\vec{E}(M)$ correspond à la direction et au sens de la plus grande diminution du potentiel à partir de M.

<u>2. Théorème de Gauss</u>

● Déf. <u>**Flux d'un champ de vecteur**</u> $\vec{A}(M)$ à travers une surface S : $\boxed{Flux=\iint_{M\in S}\vec{A}(M).d\vec{S}(M)}$

avec $d\vec{S}(M)$ perpendiculaire à la surface élémentaire dS(M) et $\|d\vec{S}\|=dS$

(choix arbitraire pour le sens de $d\vec{S}$).

Si S est une **surface fermée** (c-à-d une surface qui entoure complètement un volume fini) : on prend obligatoirement $d\vec{S}(M)$ vers l'extérieur de la surface fermée et on note : $\oiint$ ...

● <u>**Théorème de Gauss :**</u>

Quelle que soit la surface fermée S : $\boxed{\oiint_{P\in S}\vec{E}(P).d\vec{S}(P) = \frac{Qint}{\epsilon_0}}$ avec $Qint$ = charges à l'intérieur de S.

Il s'agit du flux « sortant » car $d\vec{S}$ est vers l'extérieur.

Utiliser le théorème de Gauss pour calculer $\vec{E}(M)$ (conseils pratiques) :

1. Rechercher les symétries pour connaître la direction de $\vec{E}$ **en tout point** de l'espace.
2. Utiliser les invariances de la distribution de charges pour en déduire les conséquences pour $\|\vec{E}\|$.
3. Choisir une surface fermée S_G (appelée surface de Gauss) <u>passant par M</u>, telle qu'en chaque point P de cette surface $\vec{E}(P)\|S_G$ ou $\vec{E}(P)\perp S_G$.
4. Utiliser $\oiint_{P\in S_G}\vec{E}(P).d\vec{S}(P) = \frac{Qint}{\epsilon_0}$ pour déterminer $\vec{E}(M)$.

● **Continuité** <u>de</u> $\vec{E}$ et ϕ :

- ϕ est toujours continu en tout point où il ne diverge pas (c-à-d s'il y a des charges volumiques ou surfaciques).
- ϕ diverge (n'est pas pas défini) en M s'il y a une charge linéïque ou ponctuelle en M.
- $\vec{E}$ est continu en M s'il y a une charge volumique (ou pas de charge) en M .
- $\vec{E}$ est discontinu en M (mais ne diverge pas) s'il y a une charge surfacique en M .
- $\vec{E}$ diverge (n'est pas pas défini) en M s'il y a une charge linéïque ou ponctuelle en M.

3. Formes locales

● **Divergence d'un champ de vecteur : div**

Déf. : Soit un champ de vecteur $\vec{A}(M)$. Soit un volume élémentaire $d\tau(M)$ entourant le point M, délimité par la surface fermée S : $\boxed{\oiint_{P\in S} \vec{A}(P).d\vec{S}(P) \;=\; \mathrm{div}\,\vec{A}\;\; d\tau}$

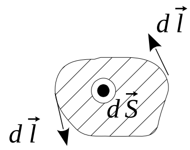
En coordonnées cartésiennes : $\mathrm{div}\,\vec{A} \;=\; \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

En coordonnées cylindriques et sphériques : si $\vec{A}(M)=A(r)\vec{u}_r$ alors $\mathrm{div}\,\vec{A} \;=\; \dfrac{\partial A}{\partial r}$.

Déf. : Le Laplacien d'une fonction scalaire *f(M)* est : $\boxed{\Delta f(M) \;=\; \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)}$

En coordonnées cartésiennes : $\Delta f(x,y,z) \;=\; \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

● **Rotationnel d'un champ de vecteur** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ **:**



Déf. : Soit un champ de vecteur $\vec{A}(M)$. Soit une surface élémentaire $dS(M)$ en M, délimitée par le contour fermé Γ :
$\boxed{\oint_{P\in\Gamma} \vec{A}(P).d\vec{l}(P) \;=\; \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}.d\vec{S}}$

Attention : le sens de $d\vec{l}$ et de $d\vec{S}$ doivent être compatibles (*règle de la main droite*).

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \;=\; \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$

● **Formules de l'électrostatique :**

	Forme globale	Forme locale
Circulation de $\vec{E}$ en électrostatique.	$\boxed{\oint_{P\in\Gamma} \vec{E}(P).d\vec{l}(P) \;=\; 0}$	$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(M) \;=\; \vec{0}}$
Théorème de Gauss	$\boxed{\oiint_{P\in S} \vec{E}(P).d\vec{S}(P) \;=\; \dfrac{Qint}{\epsilon_0}}$	$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E}(M) \;=\; \dfrac{\rho(M)}{\epsilon_0}}$

Équation de Poisson de l'électrostatique : $\Delta\phi + \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \;=\; 0$

4. Conducteurs et condensateurs

● Dans un **conducteur parfait à l'équilibre électrostatique** :

- Il y a toujours des charges mobiles qui peuvent se déplacer librement dans le conducteur
- $\boxed{\vec{E}_{\text{intérieur}} = \vec{0}}$ et $\boxed{\phi_{\text{intérieur}} = Constant}$
- La densité volumique de charges (charges mobiles + charges fixes) est nulle : $\boxed{\rho_{\text{intérieur}}=0}$
  ==> La **charge du conducteur est en surface du conducteur** (charge surfacique σ)

● **Théorème de Coulomb :** Au voisinage d'un point P de la surface d'un conducteur parfait à l'équilibre électrostatique, à l'extérieur, le champ électrostatique est $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0}\vec{n}}$ avec $\vec{n}$ vecteur normal à la surface en P dirigé vers l'extérieur.

● **Déf. :** Un **Condensateur** est composé de deux conducteurs parfaits à l'équilibre électrostatique, dont une surface S_1 du conducteur 1 et une surface S_2 du conducteur 2 sont en influence totale.

Deux surfaces sont dites en **influence totale** si toutes les lignes de champ qui partent d'une surface arrivent sur l'autre surface (et inversement).

Les charges Q_1 et Q_2 de 2 surfaces en influence totale sont opposées : $\boxed{Q_2 = -Q_1}$

● **Déf. :** Il existe une constante positive, qui ne dépend que de la forme du condensateur, appelée **capacité C**, telle que : $\boxed{Q_1 = C(\phi(conducteur\,1)-\phi(conducteur\,2)) = CU}$

U est la différence de potentiel aux bornes du condensateur : $U=\phi(conducteur\,1)-\phi(conducteur\,2)$

L'énergie potentielle électrostatique d'un condensateur chargé est : $\boxed{E_{pot} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$

A connaître : Capacité d'un **condensateur plan** : $\boxed{C=\epsilon_0\frac{S}{e}}$ avec S surface et e épaisseur.

Prop. Deux condensateurs **en série** de capacités C_1 et C_2 sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{éq}$ telle que : $\boxed{\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$

Prop. Deux condensateurs **en parallèle (dérivation)** de capacités C_1 et C_2 sont équivalents à un condensateur de capacité $\boxed{C_{éq} = C_1+C_2}$.

Le dipôle électrostatique

Les formules à connaître par cœur sont entourées.

I. Modèle du dipôle électrostatique

a) Définition, moment du dipôle

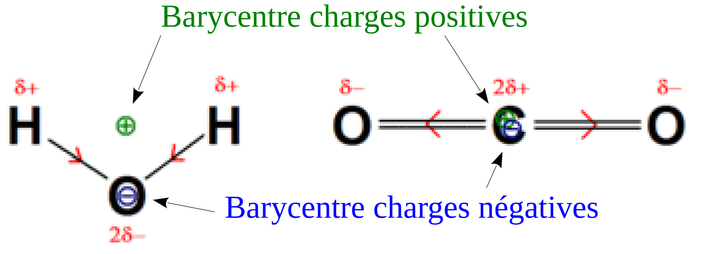
Définition : Dipôle = ensemble de 2 charges ponctuelles (+q ; -q) situées respectivement en P et N, la distance NP étant petite devant les autres distances envisagées.

Son **moment dipolaire** électrique est : $\boxed{\vec{p} = q\overrightarrow{NP}}$, unité en SI : C.m. (Coulomb mettre)

b) Exemples

Molécule neutre polarisée : le barycentre des charges positives et le barycentre des charges négatives ne se superposent pas. : HCl , H_2O.

H_20 polaire CO_2 non polaire



On parle de « distribution dipolaire ».

En chimie : unité de moment dipolaire : Debye : 1 D = (1/3) 10^{-29} C.m
p(H_2O) = 1,82 D pH(Cl) = 1,08 D

Remarque : les molécules non polaires peuvent se polariser sous l'action d'un champ extérieur.

Dipôle rigide : la distance NP est fixe.

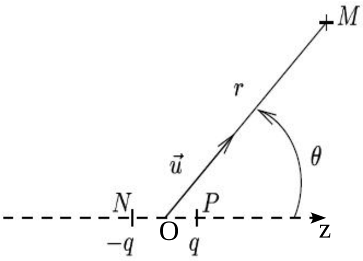
II. Action exercée par un dipôle

a) Approximation

L'approximation dipolaire : la distance à laquelle nous observons le champ créé par le dipôle très grande devant ses dimensions : $NP \ll OM$ donc $\frac{NP}{OM} \ll 1$

Pour calculer le potentiel et le champ électrostatique créés par un dipôle, nous pouvons faire un développement limité à l'ordre le plus bas en NP/OM .

b) Potentiel électrostatique créé par un dipôle *(fait en TD)*



Coordonnées sphériques avec l'axe (Oz) = (NP) :
et O milieu de [NP] :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$$

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{PM} \quad \text{et} \quad \vec{r}_N = \overrightarrow{NM}$$

$$\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP} = q\,NP\,\vec{u}_z$$

Potentiel : $V(M) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{-q}{r_N} + \dfrac{q}{r_P}\right)$

$\vec{r}_N = \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{NP} + \vec{r}$ donc $r_N = NM = \sqrt{\vec{r}_N\cdot\vec{r}_N} = \sqrt{\dfrac{1}{4}NP^2 + r^2 + \overrightarrow{NP}\cdot\vec{r}}$

ainsi : $\dfrac{1}{r_N} = \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{NP}{r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\overrightarrow{NP}\cdot\vec{r}}}$

Avec un développement limité en $\dfrac{NP}{r}$ (approximation dipolaire), on obtient :

$$\frac{1}{r_N} \simeq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2r^2}\overrightarrow{NP}\cdot\vec{r} + \ldots\right) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{NP}{r}\cos\theta + \ldots\right)$$

de même :

$\vec{r}_P = \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{NP} + \vec{r}$ donc $r_P = PM = \sqrt{\vec{r}_P\cdot\vec{r}_P} = \sqrt{\dfrac{1}{4}NP^2 + r^2 - \overrightarrow{NP}\cdot\vec{r}}$

ainsi : $\dfrac{1}{r_P} = \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{NP}{r}\right)^2 - \dfrac{1}{r^2}\overrightarrow{NP}\cdot\vec{r}}} \simeq \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{1}{2r^2}\overrightarrow{NP}\cdot\vec{r} + \ldots\right) = \dfrac{1}{r}\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{NP}{r}\cos\theta + \ldots\right)$

Il vient : $V(M) \simeq \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{NP}{r^2}\cos\theta = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$ (*ce résultat n'est pas à connaître par cœur)*

c) Champ électrostatique créé par un dipôle *(fait en TD)*

$\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{\vec{r}_P}{r_P^3} - \dfrac{\vec{r}_N}{r_N^3}\right)$ avec :

$$\frac{\vec{r}_P}{r_P^3} = \left(\vec{r} - \frac{\overrightarrow{NP}}{2}\right)\frac{1}{r_P^3} \simeq \left(\vec{r} - \frac{\overrightarrow{NP}}{2}\right)\frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{NP}{r}\cos\theta + \ldots\right)$$

$$\frac{\vec{r}_N}{r_N^3} = \left(\vec{r} + \frac{\overrightarrow{NP}}{2}\right)\frac{1}{r_N^3} \simeq \left(\vec{r} + \frac{\overrightarrow{NP}}{2}\right)\frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{NP}{r}\cos\theta + \ldots\right)$$

ainsi : $\vec{E}(M) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(3\frac{NP}{r}\cos\theta\ \vec{r} - \overrightarrow{NP}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(3\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^2}\vec{r} - \vec{p}\right)$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

soit en coordonnées sphériques : $\vec{E}(M) \simeq \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta\right)$

(La formule du champ électrique créé par un dipôle n'est pas à connaître par cœur.)

On peut aussi retrouver le champ d'après le potentiel, en utilisant $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ en coordonnées sphériques.

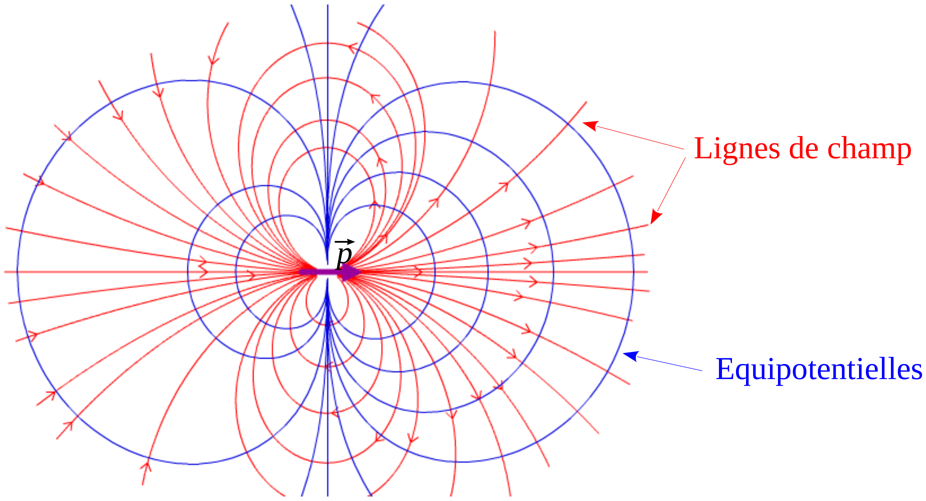
Remarque : $V \sim \frac{1}{r^2}$ et $E \sim \frac{1}{r^3}$; alors que pour une charge ponctuelle : $V \sim \frac{1}{r}$ et $E \sim \frac{1}{r^2}$.

d) Lignes de champ de $\vec{E}$

Le plan contenant M et (NP) est plan de symétrie ==> $\vec{E}(M)$ est dans ce plan.

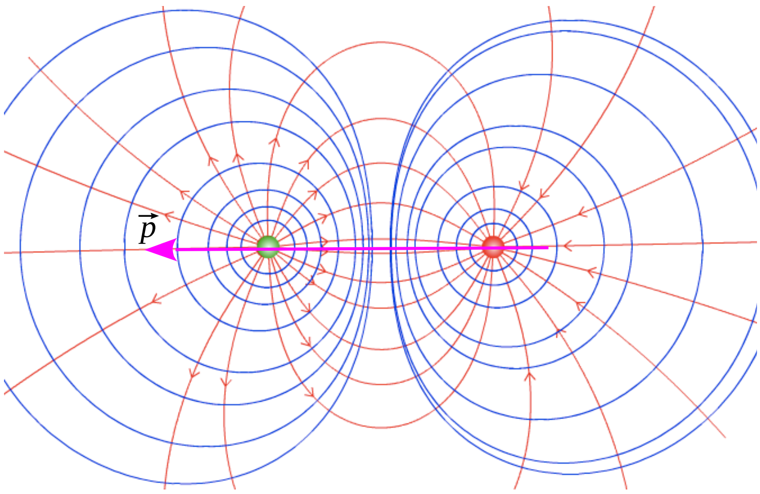
Symétrie de rotation autour de l'axe (NP).

Loin du dipôle : (Attention: Les lignes de champ de $\vec{E}$ ne peuvent pas se refermer sur elle-mêmes.)

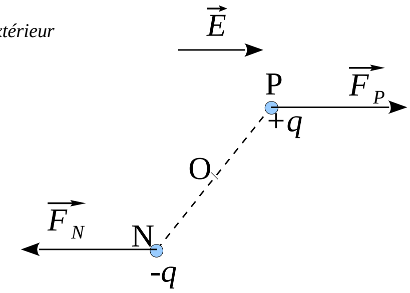


(Voir: http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Champs/Index_Champs.html)

Au voisinage du dipôle :



<u>III. Action d'un champ électrostatique uniforme sur un dipôle :</u> $\vec{E}=\vec{E}_{extérieur}$



<u>a) Dipôle rigide :</u>

Résultante des forces électrostatique : $\boxed{\vec{F} = \vec{F}_P + \vec{F}_N = \vec{0}}$ (couple)

Moment des forces électrostatique : $\boxed{\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$

A **l'équilibre** $\vec{M} = \vec{0}$ ==> le dipôle (libre de bouger) s'aligne dans le champ.

L'équilibre est **stable** si $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont dans le même sens, **instable** si $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont de sens contraire.

<u>b) Dipôle non-rigide :</u> $\vec{p}$ dépend de $\vec{E}$

<u>c) Polarisation induite</u> : <u>*(pas au programme du L2S3)*</u>

Atome ou molécule non polaire (apolaire) dans un champ $\vec{E}$ => polarisation induite $\vec{p}_{induit}(\vec{E})$.

Si le système est isotrope : $\vec{p}_{induit} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ avec α la <u>polarisabilité</u> de la molécule.

<u>d) Énergie potentielle</u> d'un dipôle dans un champ électrostatique uniforme : $\boxed{E_{pot} = -\vec{p}.\vec{E} + constante}$

<u>IV. Action d'un champ électrostatique non uniforme sur un dipôle</u> $\vec{E}=\vec{E}_{extérieur}$

Soit O le milieu de [NP]

Résultantes des forces sur le dipôle : $\vec{F} = q\left(\vec{E}(P)-\vec{E}(N)\right) = q\Delta\vec{E}$ avec $\Delta\vec{E} = \vec{E}(P)-\vec{E}(N)$

Moment des forces électrostatique : $\boxed{\vec{M} \simeq \vec{p} \wedge \vec{E}(O)}$

S'il est libre de bouger, le dipôle $\vec{p}$ s'aligne dans le champ local et se déplace le long d'une ligne de champ de $\vec{E}$ vers les régions de champ intense.

Si NP très petit (approximant dipolaire) : $\Delta\vec{E} \simeq d\vec{E}$ dans ce cas :

- Énergie potentielle du dipôle : $\boxed{E_{pot} \simeq -\vec{p}.\vec{E}(O) + constante}$
- Force sur le dipôle : $\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E_{pot}) \simeq \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{p}.\vec{E})}$

Mouvement d'une particule chargée dans E et B

Les formules à connaître par cœur sont entourées.

1. Force de Lorentz

Soit une particule de masse *m*, chargée de charge *q* et de vitesse $\vec{v}$ dans un champ électromagnétique. La force électromagnétique sur la particule est la **force de Lorentz** :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}}$$

Force électrique : $\boxed{\vec{F}_e = q\vec{E}}$ Force magnétique : $\boxed{\vec{F}_m = q\vec{v}\wedge\vec{B}}$

Pour les particules que l'on étudie (électron, ion, molécule chargée), le poids est toujours négligeable devant la force de Lorentz.

Puissance de cette force : $\boxed{P = \vec{F}.\vec{v} = (q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v}}$
<u>La force magnétique ne travaille pas</u>.

2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme stationnaire $\vec{E}$.

a) Principe fondamental de la dynamique (équation du mouvement) : $m\vec{a} = q\vec{E}$
(En général le poids est négligeable devant la force électrique)

$$\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{q}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0}$$ <u>mouvement parabolique</u>.

b) Énergie (Théorème de l'énergie mécanique) :

Énergie potentielle : $\boxed{E_{pot}=q\phi+Cte}$ avec ϕ le potentiel associé à $\vec{E}$: $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$

Conservation de l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi = Constante$

3. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme stationnaire.

a) Principe fondamental de la dynamique (PFD) : $m\vec{a} = \vec{F}_m = q\vec{v}\wedge\vec{B}$
(En général le poids est négligeable devant la force magnétique)

avec $\vec{B} = B\vec{u}_z$ ==> $\vec{a} = \frac{qB}{m}\vec{v}\wedge\vec{u}_z$

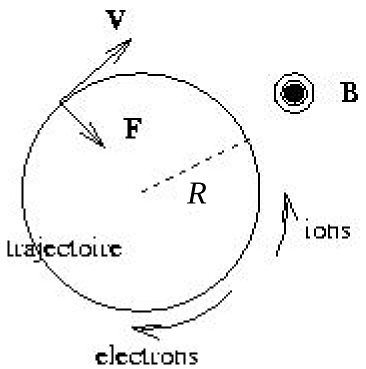
b) Énergie (théorème de l'énergie cinétique) : $E_m = E_c = Constante$ ==> $\|\vec{v}\| = v = constante$

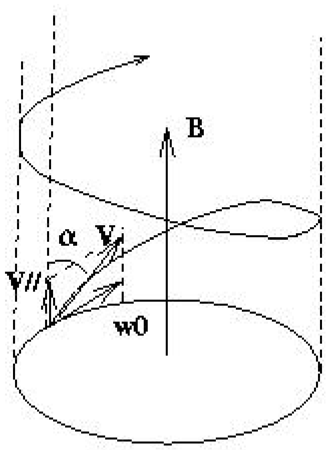
c) Exemples :

- Si $\vec{B} \parallel \vec{v}_0$: $\vec{F}_m = q\vec{0}$ mouvement <u>rectiligne uniforme</u> : $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$.
- Si $\vec{B} \perp \vec{v}_0$: Mouvement <u>circulaire uniforme</u> de rayon $R = \dfrac{v_0 m}{|q|B}$

  de pulsation $\omega = \dfrac{|q|B}{m}$ et de période : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\ pi\, m}{|q|B}$

e) Exercice : Cas quelconque : trajectoire en hélice



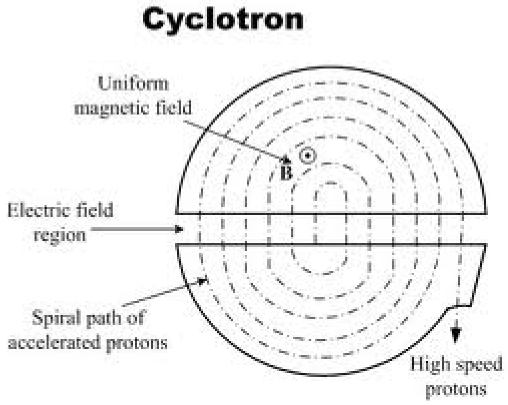


avec le rayon : $R = \dfrac{v_{0\,perpendiculaire}\, m}{|q|B}$ avec $\vec{v}_0 = \vec{v}_{perpendiculaire0} + \vec{v}_{parallèle0}$

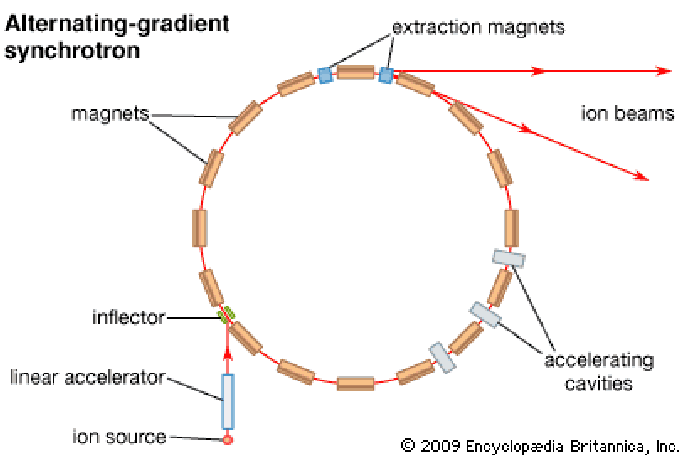
$\vec{B} \parallel \vec{v}_{parallèle0}$ et $\vec{B} \perp \vec{v}_{perpendiculaire0}$

4. Principe du cyclotron et du synchrotron *(ce n'est pas à connaître par cœur)*

a) Cyclotron :



b) Synchrotron :



E.S.R.F. Grenoble

5. Application à l'électrostatique des milieux conducteurs : Loi d'Ohm

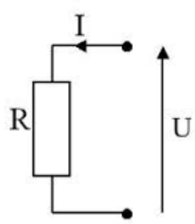
a) Loi d'Ohm locale

Dans un milieu **conducteur ohmique** isotrope : $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$ (**loi d'Ohm locale**)

avec γ la **conductivité** du milieu

$\rho = \dfrac{1}{\gamma}$: **résistivité** du milieu

b) Loi d'Ohm globale



<u>Définition/propriété</u> : Soit un conducteur ohmique, traversé par un courant I. Soit U la différence de potentiel aux borne de ce conducteur. Il existe une <u>constante positive</u> R, appelée <u>résistance</u>, telle que : $\boxed{U = RI}$

Unité de résistance en SI : Ohm (Ω) = Volt / Ampère

Résistance d'un conducteur filiforme de section *s* constante et de longueur *L* : $R = \rho \frac{L}{s}$.

Propriétés :

- Deux résistance en série R_1 et R_2 sont équivalentes à une résistance $\boxed{R = R_1 + R_2}$
- Deux résistance en parallèle (dérivation) R_1 et R_2 sont équivalentes à une résistance *R* telle que : $\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

6. Force de Laplace

a) Force de Laplace :

Soit un circuit AC filiforme parcouru par un courant *I*, dans un champ magnétique $\vec{B}$. La force du champ magnétique sur le fil, appelée **force de Laplace**, est :

$$\boxed{\vec{F}_{Laplace} = \int_{P \in circuit} I \, d\vec{l}(P) \wedge \vec{B}(P)}$$

Si $\vec{B}$ est uniforme : $\vec{F}_{Laplace} = I \left(\int_{P \in circuit} d\vec{l}(P) \right) \wedge \vec{B}(P) = I \, \overrightarrow{AC} \wedge \vec{B}$

Champ magnétique (calcul et propriétés)

Les formules à connaître par cœur sont entourées.

But : Calcul du champ magnétique en <u>régime permanent</u> et dans l'<u>Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires ARQS</u> (régimes lentement variables) : ***magnétostatique***

1) <u>Notion de distribution de courant</u>

Toutes les charges créent un champ électrique, mais seules les charges en mouvement (courant) créent un champ magnétique.

Lorsqu'une conducteur est parcouru par un courant (porteurs de charge en mouvement), ce conducteur reste <u>globalement neutre</u> (car il y a toujours des charges fixes qui compensent la charge des porteurs de charge en mouvement), ainsi le conducteur parcouru par un courant ne crée pas de champ électrique mais crée un champ magnétique.

1.a) Densité de courant

Soit un fil conducteur parcouru par un courant électrique.

Définition : L'**<u>intensité</u>** <u>du courant</u> *I* est la charge qui traverse une section *S* de fil par unité de temps.

Soit la charge *dQ* qui travers *S* pendant *dt* : $\boxed{I=\frac{dQ}{dt}}$

En **régime permanent** *I* est indépendant du temps *t*.
Dans l'**Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires** (ARQS) : *I(t)* varie lentement dans le temps *t*.

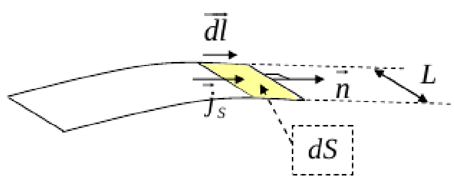
<u>1.a.1) Courant volumique</u>

Définition : **Vecteur <u>densité volumique de courant</u>** $\vec{j}$: $\boxed{I=\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}}$ avec *S* une section du fil.

Si toutes les charges mobiles sont identiques (par exemple des électrons) et vont à la même vitesse :
$\boxed{\vec{j}=nq\vec{v}}$ avec n la densité de porteurs de charges mobiles *q* de vitesse $\vec{v}$.

Avec plusieurs types de charges mobiles :
$\boxed{\vec{j}=\sum_k n_k q_k \vec{v}_k}$ avec n_k la densité de porteurs de charges mobiles q_k de vitesse $\vec{v}_k$.

<u>1.a.2) Courant surfacique</u> **<u>(pour le groupe prépa-ENSI uniquement)</u>**



Lorsqu'une des trois dimensions de la distribution de courant est très petite devant les deux autres, on l'assimile à une nappe de courant d'épaisseur négligeable (courant surfacique).

Définition : **Vecteur <u>densité surfacique de courant</u>** $\vec{j}_S$: $I=\int_L \vec{j}_S \cdot dL\ \vec{n}$ avec L largeur du fil et $\vec{n}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à L.

<u>1.a.3) Courant linéique</u>

Lorsque deux des trois dimensions de la distribution de courant sont très petites devant la troisième autres, on l'assimile à un courant linéique.

1.b) Invariances et symétries d'une distribution de courant.

La distribution de courant est dite invariante par une transformation si cette transformation laisse la distribution identique à elle-même.

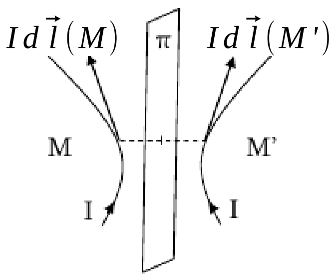
Une distribution de courant peut être **invariante** par **translation** et/ou par **rotation** autour d'un axe.

De même, il peut exister des **plans de symétrie** et **anti-symétrie** pour la distribution de courant

<u>Plan de symétrie</u> π :

Quelque soient *M* et *M'* deux points symétriques par π :

Le courant en *M'* est symétrique du courant en *M :*
c-à-d $I\,d\vec{l}(M')$ est le symétrique de $I\,d\vec{l}(M)$ par π.



<u>Plan d'anti-symétrie</u> π^* :

Quelque soient *M* et *M'* deux points symétriques par π^* :

Le courant en *M'* est l'opposé du symétrique du courant en *M :*
c-à-d $-I\,d\vec{l}(M')$ est le symétrique de $I\,d\vec{l}(M)$ par π^*.

1.c) Conservation de la charge et loi des noeuds

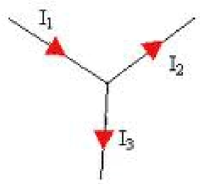
Soit *Q* la charge dans une surface fermée *S*. La conservation de la charge s'écrit : $\boxed{-\frac{dQ}{dt} = I_{sortant}}$

Considérons un courant volumique $\vec{j}$, la conservation de la charge s'écrit : $\boxed{-\frac{dQ}{dt} = \oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}}$

Forme locale de la conservation de la charge : $\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

En **<u>régime permanent</u>** (indépendant du temps) on a donc : $\boxed{\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0}$ pour toute surface fermée *S*

Conséquences : **en régime permanent** :

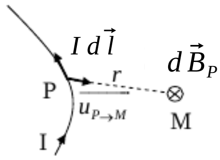


- Le courant est constant le long d'un fil
- <u>Loi des nœuds</u> : $I_1 = I_2 + I_3$ (avec le sens des courants indiqué sur la figure)

2) Loi de Biot et Savart

2.a) Énoncé *(Postulée par Jean-Baptiste Biot et Félix Savart (1820) à partir d'observations expérimentales.)*

Soit un fil filiforme parcouru par un courant *I*, le champ magnétique créé en *M* par l'élément de courant $I\,d\vec{l}(P)$ situé en *P* est :



$$\boxed{d\vec{B}_P(M) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}(P)\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3}}$$

avec μ_0 : **perméabilité du vide** : $\mu_0=4\pi.10^{-7}$ en $H.m^{-1} = kg.m.A^{-2}s^{-2} = T.m.A^{-1}$
(H : Henri)

Remarque : $\epsilon\mu_0 c^2=1$ en S.I., avec *c* la vitesse de la lumière dans le vide (Cf. L2S4 ou L3).

Ainsi le champ total créé en *M* est :

$$\boxed{\vec{B}(M) \;=\; \int_{P\in fil} d\vec{B}_P(M) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in fil}\frac{I\,d\vec{l}(P)\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in fil}\frac{I\,d\vec{l}\wedge\overrightarrow{u_{PM}}}{r^2}}$$

avec $\overrightarrow{u_{PM}}=\frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ et $r = PM$

Distributions non linéiques : **(pour groupe prépa-ENSI uniquement)** :

Distribution volumique de courant (D) :

$$\vec{B}(M) \;=\; \int_{P\in(D)} d\vec{B}_P(M) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in(D)}\frac{\vec{j}\,d\tau(P)\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in(D)}\frac{\vec{j}\,d\tau\wedge\overrightarrow{u_{PM}}}{r^2}$$

Distribution surfacique de courant (D) :

$$\vec{B}(M) \;=\; \int_{P\in(D)} d\vec{B}_P(M) \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in(D)}\frac{\vec{j}_S\,dS(P)\wedge\overrightarrow{PM}}{PM^3} \;=\; \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in(D)}\frac{\vec{j}_S\,dS\wedge\overrightarrow{u_{PM}}}{r^2}$$

2.b) Continuité et discontinuité de $\vec{B}(M)$

De façon analogue à ce que nous avons vu pour le champ électrique :

- $\vec{B}(M)$ est continu en *M* lorsque *M* est dans une distribution volumique de courant,
- $\vec{B}(M)$ est discontinu en *M* lorsque *M* est sur une nappe de courant surfacique,
- $\vec{B}(M)$ diverge en *M* lorsque *M* est sur une distribution linéique de courant.

Cela provient du fait que les courants surfaciques (linéiques) sont des approximations, que l'on peut faire lorsque deux (une) dimensions d'un courant volumique sont très petites devant la troisième (les deux autres).

3) Topographie du champ magnétique, Invariances et symétrie.

3.a) Lignes et tubes de champ de $\vec{B}$

Définitions :

- Une ligne de champ de $\vec{B}$ est une courbe tangente en tout ses points *M* à $\vec{B}(M)$.
- Un tube de champ de $\vec{B}$ est une ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé *C*.

Propriétés :

- Deux lignes de champ ne peuvent pas se couper, sauf si en ce point $B = 0$.
- Les lignes de champs de $\vec{B}$ sont fermées et tournent autour des sources de $\vec{B}$ (courants), selon la règle de la main droite ou du tire-bouchon.

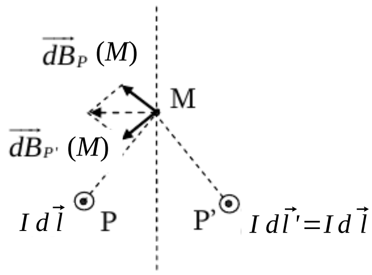
3.b) Invariances

- Si une distribution de courant est invariante par translation suivant l'axe (Oz) : $\vec{B}(M)$ est indépendant de *z* (coordonnée de *M* suivant (*Oz*)). *(De même suivant (0x) et (Oy)...)*
- Si une distribution de courant est invariante par rotation autour d'une d'axe (*Oz*) : $B(M)=\|\vec{B}(M)\|$ ne dépend pas de θ (en coordonnées cylindriques de *M*).
- Si une distribution de courant est invariante par rotation autour du point O : $B(M)=\|\vec{B}(M)\|$ ne dépend pas de θ et φ (en coordonnées sphériques centrées en O).

3.c) Symétries

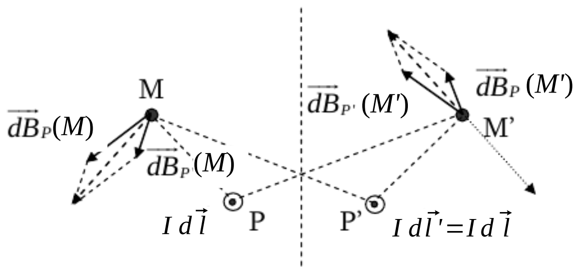
3.c.1) Plan de symétrie

Soit une distribution de courant symétrique par rapport au plan π :



Propriété 1 :	Le champ $\vec{B}(M)$ en tout point *M* du plan de symétrie π est perpendiculaire à π.

Propriété 2 :	Soient *M* et *M'* deux points symétriques par rapport à π : $\vec{B}(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport à π.



3.c.1) Plan d'antisymétrie

Soit une distribution de courant anti-symétrique par rapport au plan π^* :

Propriété 1 :	Le champ $\vec{B}(M)$ en tout point *M* du plan de symétrie π^* est colinéaire à π^*.

Propriété 2 :	Soient *M* et *M'* deux points symétriques par rapport à π^* : $\vec{B}(M')$ est le symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport à π^*.

4) Propriétés du champ magnétique

4.a) Conservation du flux du champ magnétique

Flux du champ magnétique à travers une surface S orientée : $F_B(S) = \iint_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M)$
Unité du flux de champ magnétique (en S.I.) : Weber (Wb).

Propriété : Quelque soit la surface S **fermée** : $\boxed{F_B(S) = \oiint_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) = 0}$

Forme locale de cette propriété : en tout point de l'espace : $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

Cette propriété ne se démontre pas, c'est un postulat de l'électromagnétisme qui est toujours vrai (même en régime variable).

Conséquence 1 : $\vec{B}$ est à **flux conservatif**.

- Le flux de $\vec{B}$ à travers une section S d'un même tube de champ de $\vec{B}$ est constant (c-à-d indépendant de la section S).
- Soit un contour fermé C , quelque soit la surface S délimitée par C, le flux de $\vec{B}$ à travers S est constant (c-à-d indépendant de S).

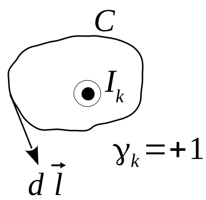
Conséquence 2 : **Il n'existe pas de mono-pôle magnétique**.

4.b) Théorème d'Ampère. (Circulation de $\vec{B}$)

Théorème d'Ampère : (*André-Marie Ampère (1775-1836), mathématicien et physicien.)*

En régime permanent (les courants ne dépendent pas du temps) ou dans l'approximation des **régimes quasi-stationnaire (ARQS)** (les courants varient lentement dans le temps), quelque soit le contour fermé C :
$\boxed{\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) = \mu_0 I_{enlacés} = \mu_0 \sum_k \gamma_k I_k}$ avec les courants I_k enlacés par C

$\gamma_k = +1$ ou -1 selon le sens de I_k par rapport à $d\vec{l}$ (règle de la main droit ou du tire-bouchon).



Remarque :

La circulation de $\vec{B}$ n'est pas conservative (contrairement à celle de $\vec{E}$ en statique), donc $\vec{B}$ ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

Distribution volumique de courant :

Pour une distribution (volumique de courant), le **théorème d'Ampère** s'écrit en régime permanent et dans l'ARQS : Quelque soit le contour fermé C, et quelque soit la surface S délimitée par C :

$$\boxed{\oint_{M \in C} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) = \mu_0 I_{enlacés} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}}$$

Avec le sens de $d\vec{S}$ fixé par le sens de $d\vec{l}$ avec la règle de la main droite (ou du tire-bouchon).

<u>Méthode pour utiliser le théorème d'Ampère : pour calculer</u> $\vec{B}(M)$

- Analyser les <u>symétries et invariances</u> pour connaître la direction $\vec{B}$ en tout point *P* de l'espace, et ses dépendances en fonction du systèmes de coordonnées (adapté aux symétries de la distribution de courant).
- Choisir un <u>contour fermé</u> *C* (« contour d'Ampère »), contenant *M*, le long duquel le calcul de la circulation de $\vec{B}$ est simple (en général $\vec{B} \perp d\vec{l}$ ou $\vec{B} \,//\, d\vec{l}$.
- Calculer le courant enlacé par ce contour : $I_{enlacé}$
- Écrire $\oint_{P\in C} \vec{B}(P)\cdot d\vec{l}(P) = \mu_0 I_{enlacé}$ et en déduire $\vec{B}(M)$.

4.c) Exemple important :

Fil infini rectiligne (voir TD)

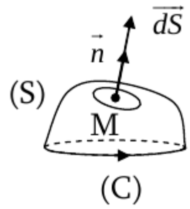
Solénoïde infini (en négligeant les effets de bords) (fait en TD) :

$\boxed{\vec{B}_{extérieur\,du\,solénoïde} = \vec{0}}$

Soit n le nombre de spires par unité de longueur : $\boxed{\vec{B}_{interieur\,du\,solénoïde} = \mu_0 n I \vec{u}}$ avec $\vec{u}$ vecteur unitaire de axe du solénoïde orienté par le sens de *I* (règle de la main droite ou du tire-bouchon).

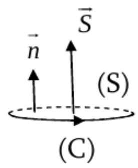
5) <u>Dipôle magnétique</u>

a) Définition



Soit une surface *S* s'appuyant sur un contour *C* orienté. En chaque point *M* de *S* : $d\vec{S}$ est orienté par rapport au sens de *C* par la règle de la main droite (ou du tire bouchon).

<u>Définition :</u> On appelle le **vecteur surface**, le vecteur $\boxed{\vec{S} = \iint_{P\in S} d\vec{S}(P)}$

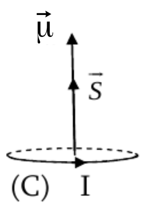


<u>Propriétés :</u> $\vec{S}$ dépend de *C* mais ne dépend pas de *S*.

Exemple : Contour circulaire : $\vec{S} = \iint_S d\vec{S} = \iint_S dS\,\vec{n} = \vec{n}\iint_S dS = \vec{n}\pi R^2$

<u>Attention :</u> Ne pas confondre le vecteur surface $\vec{S} = \iint_S d\vec{S}$ et la surface $\boxed{S = \iint_S dS}$.

Remarque : si *S* n'est pas plane : $\|\vec{S}\| \neq S$.



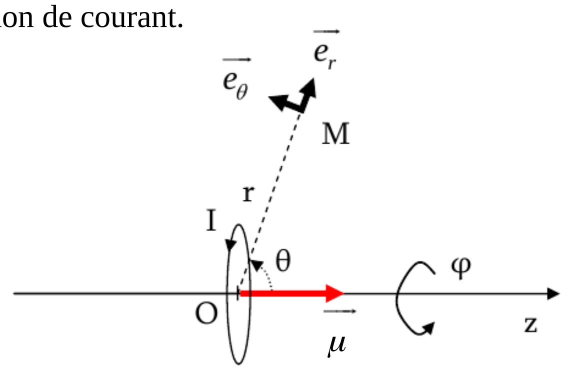
<u>Définition :</u> **<u>Le moment magnétique</u>** d'un circuit filiforme plan fermé *C* parcouru par le courant *I* dans le sens de *C* est le vecteur : $\boxed{\vec{\mu} = I\vec{S}}$.

<u>Définition :</u> On appelle **dipôle magnétique** toute distribution de courants permanents dont le moment magnétique $\vec{\mu}$ est non nul, et dont les dimensions sont faibles par rapport à la distance à laquelle le champ magnétique créé par cette distribution de courant est observé (**approximation dipolaire**).

b) Champ magnétique créé par un dipôle magnétique *(hors programme)*

Propriété admise : En M éloigné de la distribution de courants, $\vec{B}$ ne dépend que des coordonnées de M et du **moment dipolaire** $\vec{\mu}$ de la distribution de courant.

Modèle : On peut calculer $\vec{B}$ en considérant le champ créé par une spire circulaire.



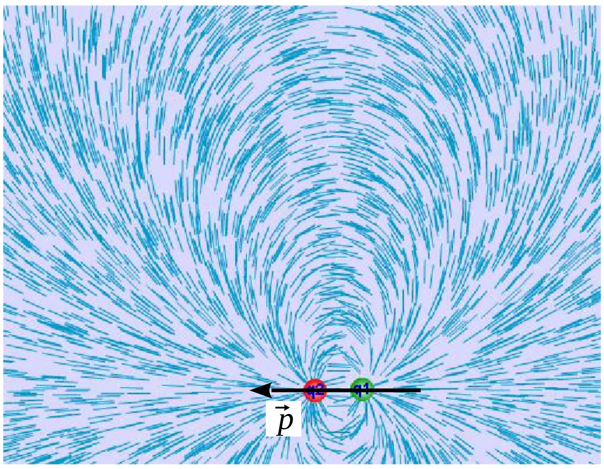
On obtient : (en coordonnées sphériques) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\mu(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{\mu}}{r^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{\mu}}{r^5}\right)$$

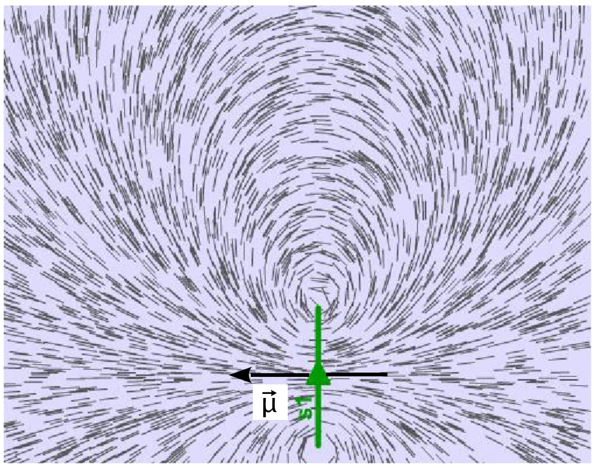
c) Lignes de champ créé par un dipôle

On constate que les lignes de champ de $\vec{B}$ créé par le dipôle magnétique $\vec{\mu}$ et les lignes de champ de $\vec{E}$ créé par le dipôle électrostatique $\vec{p}$ sont semblables.

Lignes de champ de $\vec{E}$ créés par un dipôle électrique $\vec{p}$

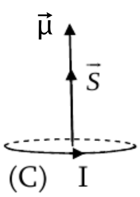


Lignes de champ de $\vec{B}$ créés par un dipôle magnétique $\vec{\mu}$

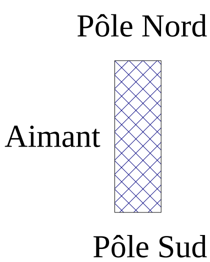


==> à grande distance $\vec{B}$ créé par $\vec{\mu}$ a la même expression que $\vec{E}$ créé par $\vec{p}$.

Équivalence dipôle magnétique (spire) et aimant simple : pôle nord et pôle sud



<=>



d) Dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$: *(hors programme)*

- Moment des forces exercées sur le dipôle : $\vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$ (forces de Laplace)
- Énergie potentielle d'un dipôle magnétique $\vec{\mu}$ dans $\vec{B}_0$ est : $E_{pot} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 + Cte$
- Résultante des forces sur le dipôle magnétique : $\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0)$

Ainsi, **le dipôle magnétique mobile s'oriente parallèlement à** $\vec{B}_0$ (le long des lignes de champ de $\vec{B}_0$) **dans le sens de** $\vec{B}_0$.

Exemple :

une **boussole** (~ une spire) s'oriente dans le **champ magnétique terrestre** : Le pôle nord de la boussole s'oriente vers le pôle sud magnétique de la terre.

Remarque : le pôle nord géographique est en fait un pôle sud magnétique.

Résumé du cours d'induction

Loi générale de l'induction :

- Equation de Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

  On définit : $\vec{E}_{\text{statique}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ et le champ électromateur : $\vec{E}_{\text{Neuman}} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
- Force de Lorentz (force sur une charge q mobile dans le circuit) : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$

  soit $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{statique}} + \vec{F}_{\text{induit}}$ avec $\vec{F}_{\text{induit}} = -q\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q\vec{v}\wedge\vec{B}$

Force électromatrice due à l'induction dans un circuit : f.e.m.

f.e.m. = e = $\dfrac{1}{q}$ x Travail de la force due à l'induction sur la charge q le long du cicuit = $\oint_{\text{cuicuit}} \dfrac{\vec{F}_{\text{induit}}}{q}.\mathrm{d}\vec{l}$

<u>2 cas importants :</u>

- Si le circuit est mobile et $\vec{B}$ permanent (indépendant du temps) : $e = -\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_{S(\text{circuit})}\vec{B}.\mathrm{d}\vec{S}$
- Si le circuit est fixe : $e = -\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_{S(\text{circuit})}\vec{B}.\mathrm{d}\vec{S}$

Attention : dans un cas général, circuit mobile et $\vec{B}$ non permanent, cette formule n'est pas valable.

<u>Dans un circuit :</u> la f.e.m agit comme un générateur de tension e.

Attention : e est compté positif dans le sens positif défini par le sens de $\mathrm{d}\vec{S}$.

Loi de Lenz :

- *(Formulation très générale)* Les champs et courants induits s'opposent toujours à la cause qui les a fait naître.
- Dans un circuit, le champ et le courant induits s'opposent à la variation de flux de $\vec{B}$ à travers le circuit.

Inductance mutuelle : Soient 2 circuits C_1 et C_2

F_1(circuit 2) = Flux de $\vec{B}$, créé par I_1 circulant dans C_1, à travers C_2 = $\iint_{S(\text{Cuicuit 2})}\vec{B}_{I_1}.\mathrm{d}\vec{S}$

<u>Définition/propriété :</u> il existe une unique constante positive M, appelée **coefficient d'inductance mutuelle**, telle que : F_1(circuit 2) = $M\,I_1$

La f.e.m. induite dans C_2 par le courant I_1 circulant dans C_1 est donc : $e_2 = -M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$.

Propriétés : M(circuit 1 dans circuit 2) = M(circuit 2 dans circuit 1)

Auto-induction :

Définition : Le coefficient d'inductance mutuelle d'un circuit dans lui-même, **noté *L***, s'appelle l'**inductance** (ou coefficient d'auto-induction).

Ainsi, la f.e.m. d'auto-induction est $\boxed{e = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$ (**compté positif dans le même sens que *I***)

En général l'auto-induction est négligeable, **sauf dans les bobines**.

Exemple (voir TD) : pour un **solénoïde**, en négligeant les effets de bords : $L = \mu_0 n^2 \pi R^2$

n est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde et R le rayon d'une spire.