Université de Cergy-Pontoise
Introduction à la mécanique du point
S1-MPI 2013-2014

Résumé du cours

1 Analyse dimensionnelle

■ Le système international

➢ Le système international est basé sur **7 grandeurs fondamentales**, auxquelles sont associées une dimension et une unité :

Grandeur	Dimension	Unité SI	Symbole SI
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	ampère	A
Température	θ	kelvin	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse[1]	J	candela	cd

➢ En mécanique toutes les grandeurs peuvent s'écrire en fonction des grandeurs M, L et T.

➢ La dimension d'une grandeur G s'écrit : $[G]$.

⚠ La dimension d'une température est notée θ ... et non T, qui est la dimension d'un temps !

■ Règles de l'analyse dimensionnelle

➢ $[G_1 \times G_2] = [G_1] \times [G_2]$; $\left[\dfrac{G_1}{G_2}\right] = \dfrac{[G_1]}{[G_2]}$; $\left[\dfrac{d^n G}{dX^n}\right] = \dfrac{[G]}{[X]^n}$.

➢ Les membres des opérateurs $=, >, <, +, -$ doivent être de même dimension.

➢ Les constantes, les angles, les fonctions (exp, ln, fcts trigonométriques) et leurs arguments, sont sans dimension (càd de dimension = 1).

⚠ On ne peut additionner (ni soustraire) des dimensions : $\cancel{[l] + [d]}$!

■ Homogénéité

➢ Vérifier l'homogénéité d'une équation, c'est vérifier que ses membres ont bien même dimension.

⚠ Vous devez vérifier l'homogénéité de vos équations : une équation qui n'est pas homogène est fausse !

[1] pas à connaître

■ Les pseudo-unités du SI

➢ Le **radian** et le stéradian[1] des pseudo-unités du SI : ce sont des unités associées à des grandeurs sans dimension.

⚠ Un angle est une grandeur sans dimension qui possède une unité !

■ Les unités dérivées du SI

➢ Les unités dérivées du S.I. sont les unités qui s'expriment à partir des 7 unités fondamentales du SI.

➢ Unités dérivées à connaître en méca :

Grandeur	USI	Symbole SI
Force	newton	N
Energie	joule	J
Puissance	watt	W
Pression	pascal	Pa
Fréquence	hertz	Hz

⚠ La valeur numérique d'un résultat n'a de sens que si elle est suivie de son unité !

■ Les préfixes du système international

Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10	déca	da	10^{-1}	déci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	méga	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	téra[1]	T	10^{-12}	pico[1]	p
10^{15}	peta[1]	P	10^{-15}	femto[1]	f

■ Etalons du système international

➢ **Mètre** : 1 m = distance parcourue par la lumière dans le vide pendant 1/299 792 458 s [1] .

➢ **Seconde** : 1 s = durée de 9 192 631 770 [1] vibrations d'une raie de l'atome de Césium 133.

➢ **Kilogramme** : 1 kg = masse d'un étalon en platine iridié déposé au BIPM à Sèvres.

[1] pas à connaître

2 Rappels de maths

■ Vecteurs

➢ Un vecteur est défini par **une norme et une orientation** (direction + sens).

➢ Un vecteur **unitaire** est un vecteur de norme = 1.

⚠ $\overrightarrow{\text{vecteur}} \neq$ scalaire !

■ Base cartésienne

➢ **Base cartésienne** : $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$. C'est une base **orthonormée directe**.

➢ $\vec{V} = V_x\ \vec{u}_x + V_y\ \vec{u}_y + V_z\ \vec{u}_z$: (V_x, V_y, V_z) désignent les **coordonnées de** $\vec{V}$ **dans la base cartésienne**.

■ Opérations sur les vecteurs

➢ **Relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

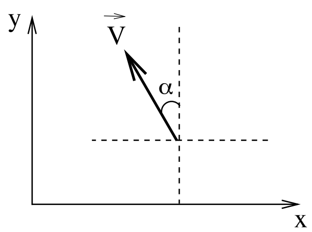
➢ **Produit scalaire** : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|\ \|\vec{V}_2\|\ \cos\theta$, où $\theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ est non orienté.

Dans la base cartésienne : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_{1x}\ V_{2x} + V_{1y}\ V_{2y} + V_{1z}\ V_{2z}$.

➢ **Norme** : $\|\vec{V}\|^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$.

Dans la base cartésienne : $\|\vec{V}\|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$.

■ Projection d'un vecteur

➢ 

$$\vec{V} = -\|\vec{V}\| \sin\alpha\ \vec{u}_x + \|\vec{V}\| \cos\alpha\ \vec{u}_y$$

■ Notation différentielle

➢ $\dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

➢ $df = f(x+dx) - f(x) = f'(x)\ dx$

➢ df **est la différentielle de f** : c'est la variation infinitésimale de la fonction f correspondant à **l'accroissement infinitésimal** dx de la variable x.

➢ La dérivée seconde s'écrit : $f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$ et ainsi de suite pour les dérivées aux ordres suivants.

⚠ df et dx étant des accroissements, ils ont la même dimension que les grandeurs f et x respectivement ! De plus : $[d^2 f] = [f]$ et $[dx^2] = [x]^2$.

3 Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement d'un corps indépendamment de ses causes.

■ **Vecteur position** : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$

■ **Vecteur déplacement** durant l'intervalle de temps Δt : $\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)$

■ **Vecteur vitesse**

➢ **Vitesse moyenne** durant l'intervalle de temps Δt : $\vec{v}_{\text{moy}}(t) = \dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$

➢ **Vitesse instantanée** : $\vec{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$

Le vecteur vitesse est **tangent à la trajectoire** et dirigé dans le sens du déplacement.

■ **Vecteur accélération**

➢ **Accélération moyenne** durant l'intervalle de temps Δt : $\vec{a}_{\text{moy}}(t) = \dfrac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t}$

➢ **Accélération instantanée** : $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}$

■ **En coordonnées cartésiennes**

➢ $$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\ \vec{u}_x + y(t)\ \vec{u}_y + z(t)\ \vec{u}_z$$

➢ $$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\ \vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\ \vec{u}_y + \frac{dz(t)}{dt}\ \vec{u}_z = \dot{x}(t)\ \vec{u}_x + \dot{y}(t)\ \vec{u}_y + \dot{z}(t)\ \vec{u}_z$$

➢ $$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\ \vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\ \vec{u}_y + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\ \vec{u}_z = \ddot{x}(t)\ \vec{u}_x + \ddot{y}(t)\ \vec{u}_y + \ddot{z}(t)\ \vec{u}_z$$

■ **Observation d'un mouvement**

➢ Les **équations horaires** d'un mouvement sont données par : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

➢ La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives $\overrightarrow{OM}(t)$ du point M.
Elle s'obtient en éliminant le temps t dans les équations horaires et peut se mettre sous la forme : $f(x,y,z) = 0$.

➢ Le mouvement et donc les grandeurs cinématiques $\overrightarrow{OM}(t)$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ **dépendent du référentiel d'observation**.

■ **Mouvements particuliers**

➢ Un mouvement est **uniforme** ssi : $\|\vec{v}(t)\| = \text{cste}$.

➢ Un mouvement est **accéléré** ssi : $\|\vec{v}(t)\|$ fct $\nearrow$ de t.

➢ Un mouvement est **freiné** ssi : $\|\vec{v}(t)\|$ fct $\searrow$ de t.

➢ Un mouvement est **rectiligne uniforme** ssi : $\vec{v}(t) = \overrightarrow{\text{cste}}$.

➢ Un mouvement est **uniformément accéléré** ssi : $\vec{a}(t) = \overrightarrow{\text{cste}} \neq \vec{0}$.

⚠ Un mouvement uniformément accéléré n'est pas forcément rectiligne, il suffit que la vitesse initiale ne soit pas alignée avec l'accélération pour que le mouvement décrive une parabole !

■ Chute libre

➢ Une **chute libre** est le mouvement d'une masse m soumise uniquement à son poids $m\vec{g}$.
C'est donc un mouvement uniformément accéléré : $\vec{a}(t) = \vec{g} = \overrightarrow{\text{cste}}$.

⚠ Au sommet d'un tir parabolique la vitesse n'est pas nulle : seule la composante verticale de la vitesse est nulle !

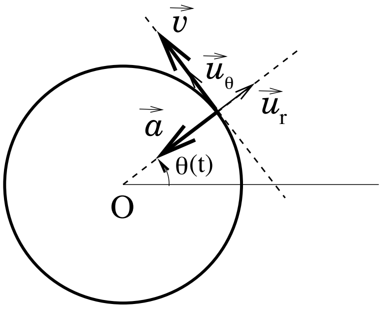
⚠ Lors d'une chute libre, la vitesse d'un corps juste avant qu'il ne touche le sol n'est pas nulle : elle est en fait maximale !

■ Mouvement circulaire uniforme

➢ Un point du cercle est repéré par l'angle $\theta(t)$.

➢ La **vitesse angulaire** est : $\omega(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$.

➢ Un **mouvement circulaire est uniforme** ssi : $\omega(t) = \text{cste}$. On a alors :



$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = R\,\omega\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -\,R\,\omega^2\,\vec{u}_r = -\,\frac{v^2}{R}\,\vec{u}_r$$

où $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\theta\}$ désigne la **base polaire**.

$\vec{v}$ **est tangent au cercle**, dirigé dans le sens de rotation.
$\vec{a}$ **est centripète** : il est dirigé vers le centre du cercle.

⚠ Si la norme de la vitesse est constante, le *vecteur* vitesse lui n'est pas constant : l'accélération n'est donc pas nulle !

■ Mouvement relatif : cas d'une translation rectiligne uniforme

➢ Un **référentiel** est un repère muni d'une horloge.

➢ Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en **translation rectiligne uniforme** dans le référentiel $\mathcal{R}$ ssi les vecteurs de base de $\mathcal{R}'$ gardent des directions fixes par rapport aux vecteurs de base de $\mathcal{R}$ et O' se déplace à $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}}$ dans $\mathcal{R}$.

➢ Si $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme dans le référentiel **galiléen** $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v} + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$$

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M)$$

4 Dynamique

La dynamique est l'étude du mouvement d'un corps en relation avec ses causes, les forces.

■ Lois de Newton

➢ **1^e loi de Newton**
Un point matériel soumis à aucune force a une vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{cste}}$: il est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

➢ **2^e loi de Newton**

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\,\vec{a}}$$

où $\sum \vec{F}$ désigne la résultante des forces agissant sur m.

➢ **3^e loi de Newton**

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}}$$

où $\vec{F}_{1\to 2}$ est la force exercée par le corps 1 sur le corps 2 et $\vec{F}_{2\to 1}$ celle exercée par 2 sur 1.

$\vec{F}_{1\to 2}$ et $\vec{F}_{2\to 1}$ sont colinéaires à la droite reliant les corps 1 et 2.
$\vec{F}_{1\to 2}$ et $\vec{F}_{2\to 1}$ forment un **couple action/réaction**.

➢ Les lois de Newton sont des **postulats** confirmés par l'expérience pour les corps macroscopiques usuels.

⚠ $\vec{F}_{1\to 2}$ et $\vec{F}_{2\to 1}$ sont des forces s'exerçant sur deux corps distincts 1 et 2 : donc $\vec{N}$ et $m\vec{g}$ ne forment pas un couple action/réaction !

⚠ Avant d'appliquer les lois de Newton , il faut *préciser le système considéré* et faire le bilan des forces s'exerçant sur le système *sur un dessin* !

■ Définitions

➢ Un corps est **au repos** (ou **à l'équilibre**) ssi $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{\text{cste}}$ et alors : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

➢ Un système est dit **isolé** ssi : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.
Il n'est pas forcément au repos : il peut être en mouvement rectiligne uniforme d'après la 1^e loi de Newton !

■ Référentiel galiléen (ou inertiel)

➢ Un **référentiel** est un repère muni d'une horloge.

➢ Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel les lois de Newton s'appliquent.

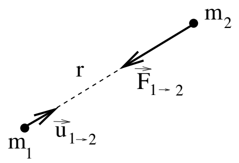
➢ Un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

➢ Le **référentiel terrestre** peut être considéré comme galiléen dans la plupart des expériences de laboratoire.

➢ Les référentiels non galiléens seront abordés au 2^e semestre.

■ Force d'attraction gravitationnelle

➢ La force gravitationnelle exercée par la masse m_1 sur la masse m_2 s'écrit :



$$\vec{F}_{1\to2} = -\,G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}_{1\to2}$$

où $G = 6,67 \times 10^{-11}$ USI est la constante universelle de la gravitation, r la distance séparant les 2 masses et $\vec{u}_{1\to2}$ un vecteur unitaire dirigé de m_1 vers m_2.

➢ C'est une force **attractive**.

■ Poids

➢ Une masse m située **à proximité de la Terre** est soumise à son **poids** : $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

➢ Le poids correspond, en 1[e] approximation, à l'attraction gravitationnelle terrestre au voisinage du sol : $g \simeq G\dfrac{M_T}{R_T^2} \simeq 9,8$ m.s^{-2}.

➢ g est **l'accélération de pesanteur terrestre**.

■ Tension d'une corde

➢ Une corde **tendue** exerce sur ses extrémités une force de rappel $\vec{T}$ colinéaire à la corde, appelée **tension**.

➢ Une **corde idéale** est une corde inextensible et sans masse (càd de masse négligeable).

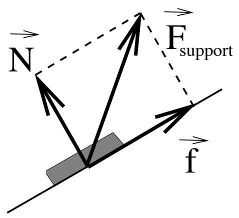
➢ Une **poulie idéale** est une poulie sans masse (càd de masse négligeable) et qui tourne sans frotter.

➢ Dans le cas d'une **corde idéale**, les tensions exercées à ses deux extrémités ont même module, même lorsqu'elle passe sur une **poulie idéale** : $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$.

⚠ Si la corde passe sur une poulie : $\vec{T}_1 \neq -\vec{T}_2$!

■ Forces de contact solide-solide (lois de Coulomb)

➢ Un support exerce sur un corps en contact la force :



$$\vec{F}_{\text{support}} = \vec{N} + \vec{f}$$

où $\vec{N} \perp$ support et $\vec{f}$ // support.

$\vec{f}$ est **la force de frottement**.

➢ **Le contact avec le support est rompu** lorsque : $\vec{N} = \vec{0}$.

➢ **Force de frottement statique**
Si le corps ne glisse pas, la force de frottement est une force de frottement statique, $\vec{f}_s$.
Le corps ne glisse pas tant que :

$$\|\vec{f}_s\| \leq \mu_s\,\|\vec{N}\|$$

où μ_s désigne le **coefficient de frottement statique**.

⚠ La direction de $\vec{f}_s$ n'est pas connue : on sait seulement qu'elle est dans le plan tangent à la surface de contact !
La direction de $\vec{f}_s$ est donnée par : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

➢ **Force de frottement dynamique**

Si le corps glisse, la force de frottement est une force de frottement dynamique, $\vec{f_d}$.
Cette force vérifie :

$$\boxed{\|\vec{f_d}\| = \mu_d \; \|\vec{N}\|}$$

$$\boxed{\vec{f_d} \text{ est opposé au déplacement du corps}}$$

où μ_s désigne le **coefficient de frottement dynamique**.

➢ Les coefficients de frottement μ_s et μ_d dépendent des matériaux composant les corps en contact.

➢ μ_s et μ_d sont sans dimension et en général $\mu_s > \mu_d$.

⚠ $\vec{f_d} \neq \mu_d \vec{N}$ car $\vec{f_d} \perp \vec{N}$!

■ Force de frottement fluide

➢ Un corps en mouvement dans un fluide est soumis à une **force de frottement fluide** $\vec{f}$ opposée à sa vitesse par rapport au fluide, $\vec{v}$.

➢ Aux faibles vitesses : $\boxed{\vec{f} = -\; k \; \vec{v}}$.

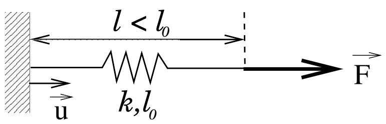
➢ Aux grandes vitesses : $\boxed{\vec{f} = -\; k' \; \|\vec{v}\| \; \vec{v}}$.

➢ k et k' désignent les **coefficients de frottements fluides**.

➢ Chute d'un corps dans un fluide : le corps atteint une **vitesse limite** lorsque $\vec{f} + m\vec{g} + \vec{P_A} = \vec{0}$, où $\vec{P_A}$ est la poussée d'Archimède.

■ Force de rappel élastique

➢ Un ressort idéal de longueur ℓ exerce sur son extrémité une force de rappel élastique donnée par la **loi de Hooke** :



$$\boxed{\vec{F} = -k \; (\ell - \ell_0) \; \vec{u}}$$

où k est la **raideur** ou **constante de rappel** du ressort, ℓ_0 sa longueur à vide, ℓ sa longueur et $\vec{u}$ un vecteur unitaire orienté du ressort vers le point considéré.

➢ C'est une **force de rappel** : elle s'oppose à la déformation du ressort.

➢ $\ell - \ell_0$ est appelé **compression** ou **étirement** du ressort.

5 Travail et énergie

■ Travail d'une force

➢ Lors d'un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$, le travail de la force $\vec{F}$ s'écrit :

$$\boxed{\delta W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v}\ dt}$$

En coordonnées cartésiennes : $\delta W_{\vec{F}} = F_x\ dx + F_y\ dy + F_z\ dz$.

➢ Lors d'un déplacement de A à B le long du chemin Γ, le travail de la force $\vec{F}$ s'écrit :

$$\boxed{W_{\vec{F},A\to B} = \int_A^B \delta W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}}$$

où l'intégrale est calculée le long du chemin Γ.

➢ Le travail est une **énergie**, il s'exprime en **joule** (J).

➢ Si $W > 0$, le travail est **moteur**.
Si $W < 0$, le travail est **résistant**.

➢ Les forces $\perp \vec{v}$ ne travaillent pas. Donc la force de contact normale $\vec{N}$ ne travaille pas !

⚠ Le travail d'une force de frottement dynamique est toujours résistant car $\vec{f}_d$ est dirigée selon $-\vec{v}$!

■ Puissance d'une force

➢ **Puissance moyenne** de la force $\vec{F}$: $\boxed{\mathcal{P}_{moy} = \dfrac{W_{\vec{F},A\to B}}{t_B - t_A} = \dfrac{W_{\vec{F}}}{\Delta t}}$

➢ **Puissance instantanée** de la force $\vec{F}$: $\boxed{\mathcal{P}_{\vec{F}} = \dfrac{\delta W_{\vec{F}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

➢ La puissance est une énergie divisée par un temps ; elle s'exprime en **watt** (W).

➢ On peut exprimer le travail en fonction de $\mathcal{P}_{\vec{F}}$: $\boxed{W_{\vec{F},A\to B} = \displaystyle\int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}_{\vec{F}}(t)\ dt}$.

■ Théorème de l'énergie cinétique

➢ **L'énergie cinétique** d'un point matériel de masse m est définie par : $\boxed{E_c = \dfrac{1}{2} m v^2}$

➢ **Le théorème de l'énergie cinétique** s'écrit *dans un référentiel galiléen* :

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}}$$

où $\sum W_{A\to B}$ et $\sum \mathcal{P}$ désignent la somme des travaux et des puissances de *toutes* les forces appliquées sur le corps pendant le déplacement de A vers B.

⚠ Il faut toujours préciser l'état initial et l'état final quand on applique le théorème de l'énergie cinétique.

■ Energie potentielle

➢ La force $\vec{F}$ **dérive d'une énergie potentielle** ssi il existe une fonction $E_p(M)$ appelée **énergie potentielle** telle que :

$$\boxed{\delta W_{\vec{F}} = -\, dE_p}$$

➢ L'énergie potentielle est définie à une constante près, que l'on prendra par convention $= 0$.

➢ **Energie potentielle de la pesanteur** : $\boxed{E_p = mgz}$ (*avec l'axe z orienté vers le haut !*).

➢ **Energie potentielle élastique d'un ressort** : $\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2}$.

■ Forces conservatives

➢ Une **force conservative** est une force qui dérive d'une énergie potentielle.

➢ Si $\vec{F}$ est conservative alors : $\boxed{W_{\vec{F},A\to B} = -\,\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)}$.

➢ $\boxed{\vec{F} \text{ conservative} \iff W_{\vec{F}} \text{ ne dépend pas du chemin suivi}}$.

➢ Le **poids** et la **force élastique du ressort** sont des forces conservatives.

➢ Un **système est dit conservatif** ssi il est soumis uniquement à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas.

■ Force non conservative

➢ Une **force non conservative** est une force qui ne dérive pas d'une énergie potentielle.

➢ Le travail d'une force non conservative **dépend donc du chemin suivi**.

➢ Les **forces de frottement** sont des forces non conservatives.

■ Théorème de l'énergie mécanique

➢ **L'énergie mécanique** est définie par : $\boxed{E_m = E_c + E_p}$, où E_p est la somme des énergies potentielles de toutes les forces conservatives.
Elle est définie à une constante près, que l'on prendra par convention $= 0$.

➢ **Le théorème de l'énergie mécanique** s'écrit *dans un référentiel galiléen* :

$$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{n.c.,A\to B}}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}_{n.c.}}$$

où $\sum W_{n.c.,A\to B}$ et $\sum \mathcal{P}_{n.c.}$ désignent la somme des travaux et des puissances de *toutes* les forces non conservatives agissant sur le système lors du déplacement de A vers B.

➢ Pour un **système conservatif** : $\sum W_{n.c.} = 0 \Rightarrow \boxed{E_m = \text{cste}}$.

⚠ Il faut toujours préciser l'état initial et l'état final quand on applique le théorème de l'énergie mécanique et répertorier les forces conservatives (et leur E_p) et les forces non conservatives s'il y en a !

■ Positions d'équilibre - stabilité

- ➢ Une **position d'équilibre** est une position où : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.
- ➢ Si on écarte légèrement le corps de sa position d'équilibre et qu'il y revient : la position d'équilibre est **stable**.
- ➢ Si on écarte légèrement le corps de sa position d'équilibre et qu'il s'en écarte : la position d'équilibre est **instable**.

■ Système conservatif à un degré de liberté

- ➢ Système conservatif à un degré de liberté x : il est soumis à une force résultante $\vec{F}(x) = F(x)\,\vec{u}_x$ telle que $F(x) = -\dfrac{dE_p}{dx}$ et son énergie $E_m(x) = E_c(x) + E_p(x) = \text{cste}$.
- ➢ Les **minimas** de $E_p(x)$ correspondent aux positions d'équilibre **stables**.
  Les **maximas** de $E_p(x)$ correspondent aux positions d'équilibre **instables**.
- ➢ Les valeurs de x autorisées correspondent à $E_c(x) \geq 0$ càd à $E_p(x) \leq E_m$.
- ➢ Le signe de la pente de $E_p(x)$ donne **le sens de** $\vec{F}$.
- ➢ Les **points de rebroussement** sont les points où $\vec{v} = \vec{0}$, càd $E_p(x) = E_m$: le corps repart alors dans la direction de $\vec{F}$.

6 Systèmes de particules, collisions

■ **Centre de masse** (ou centre d'inertie ou barycentre)

➢ Le centre de masse G d'un système de N masses m_i placées en M_i est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \, \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}} \qquad \text{ou encore} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \, \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$$

■ **Quantité de mouvement**

➢ La quantité de mouvement d'un système de N masses m_i se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_i$ est définie par :

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \; \vec{v}_i = M \; \vec{v}_G} \qquad \text{avec} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i, \;\; \vec{v}_G = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

■ **2^e loi de Newton**

➢ Pour un système de particules, on distingue les **forces externes**, exercées par le milieu extérieur, des **forces internes**, exercées par les autres masses du système.

➢ D'après la 3^e loi de Newton : $\boxed{\sum \vec{F}_{int} = \vec{0}} \Rightarrow \sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{int} = \sum \vec{F}_{ext}$.

➢ **La 2^e loi de Newton** s'écrit alors : $\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \; \vec{a}_G}$

➢ Si le système est **isolé** : $\boxed{\vec{P} = \overrightarrow{cste}}$

■ **Energie**

➢ **L'énergie cinétique** du système s'écrit : $\boxed{E_c = \sum_{i=1}^{N} E_{ci} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \; v_i^2}$

➢ **Le théorème de l'énergie cinétique** appliqué au système s'écrit dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\Delta E_c = \sum W_{ext} + \sum W_{int}}$$

Il fait intervenir le travail de *toutes* les forces, internes et externes, exercées sur le système !

➢ $\sum W_{int} = 0$ si le système est rigide.
$\sum W_{int} \neq 0$ en général si le système est déformable.

⚠ Si la résultante des forces internes est toujours nulle, $\sum W_{int}$ peut être $\neq 0$!

■ Collisions

- ➢ Une **collision** est une interaction très brève, localisée dans l'espace et d'intensité très grande devant les forces externes.
- ➢ Lors d'une collision, **la quantité de mouvement du système est conservée** : $\vec{P}_{\text{avant}} = \vec{P}_{\text{après}}$.
- ➢ Lors d'une collision, $\vec{v}_G = \overrightarrow{\text{cste}}$: G **a un mouvement rectiligne uniforme**.
- ➢ Lors d'une **collision élastique**, l'énergie cinétique du système est conservée : $E_{c,\text{avant}} = E_{c,\text{après}}$.
- ➢ Lors d'une **collision élastique contre un mur**, le vecteur vitesse est réfléchi par le mur.
- ➢ Une collision est **parfaitement inélastique**, lorsque les corps restent collés ensemble après la collision.