Chapitre 0 – Repérage spatial

<u>Sources</u> : polycopié

https://www.equipes.lps.u-psud.fr/PASQUIER/enseignement/mecaS2/Mecanique_chap1_coordonnees.pdf

.

Se repérer dans l’espace

1.Cartésien

2.Cylindrique

3.Sphérique

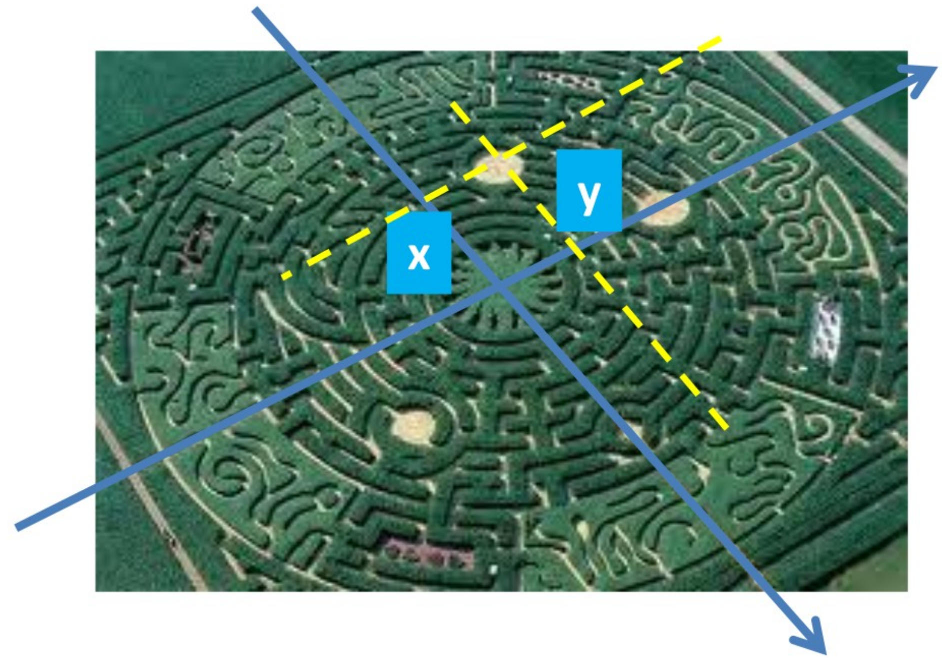
Résumé

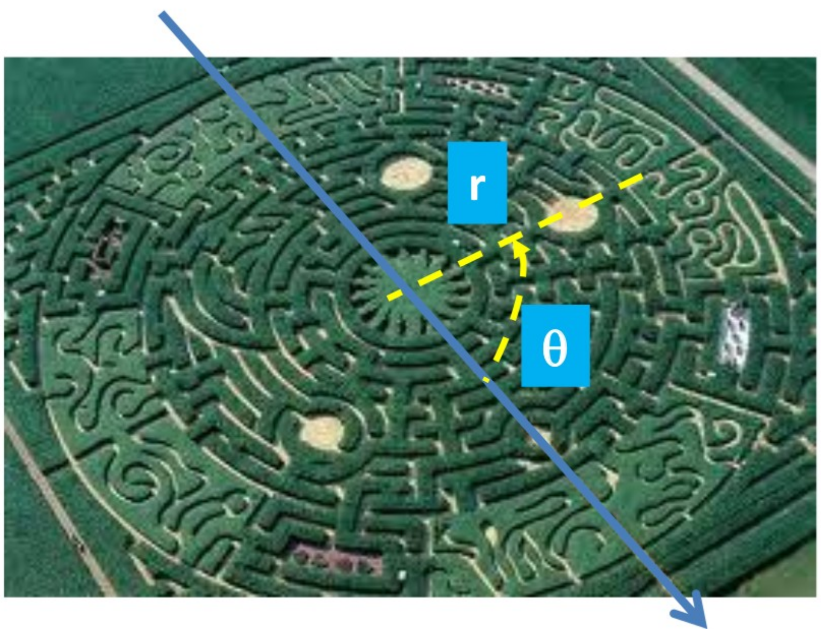
4. Applications

5.intrinsèque

6.Résumé

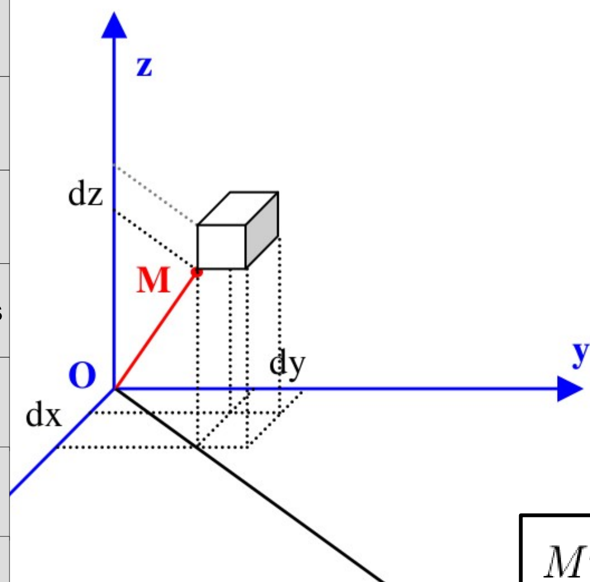
7. • & ∧

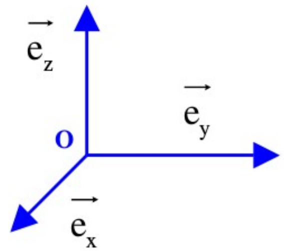




1. Coordonnées cartésiennes

1.Cartésiens
2.Cylindrique
3.Sphérique
Résumé
4. Applications
5.intrinsèque
6.Résumé
7. • & ∧





$M(x, y, z)$ point de vecteur-position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

<u>Élément différentiel de position</u>

$M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ point voisin de position $\vec{r} + d\vec{r}$

déplacement élémentaire $\vec{dl}$: $d\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$

$$\boxed{\vec{dl} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z}$$

ici, car vecteurs de la base constants

.

1. Coordonnées cartésiennes

Élément différentiel d'aire

$$\text{dans le plan } z = 0 \text{ (et dans tout plan //)} \ : \ dS = dl_x dl_y = dxdy$$

$$\text{dans le plan } y = 0 \text{ (et dans tout plan //)} \ : \ dS = dl_x dl_z = dxdz$$

$$\text{dans le plan } x = 0 \text{ (et dans tout plan //)} \ : \ dS = dl_y dl_z = dydz$$

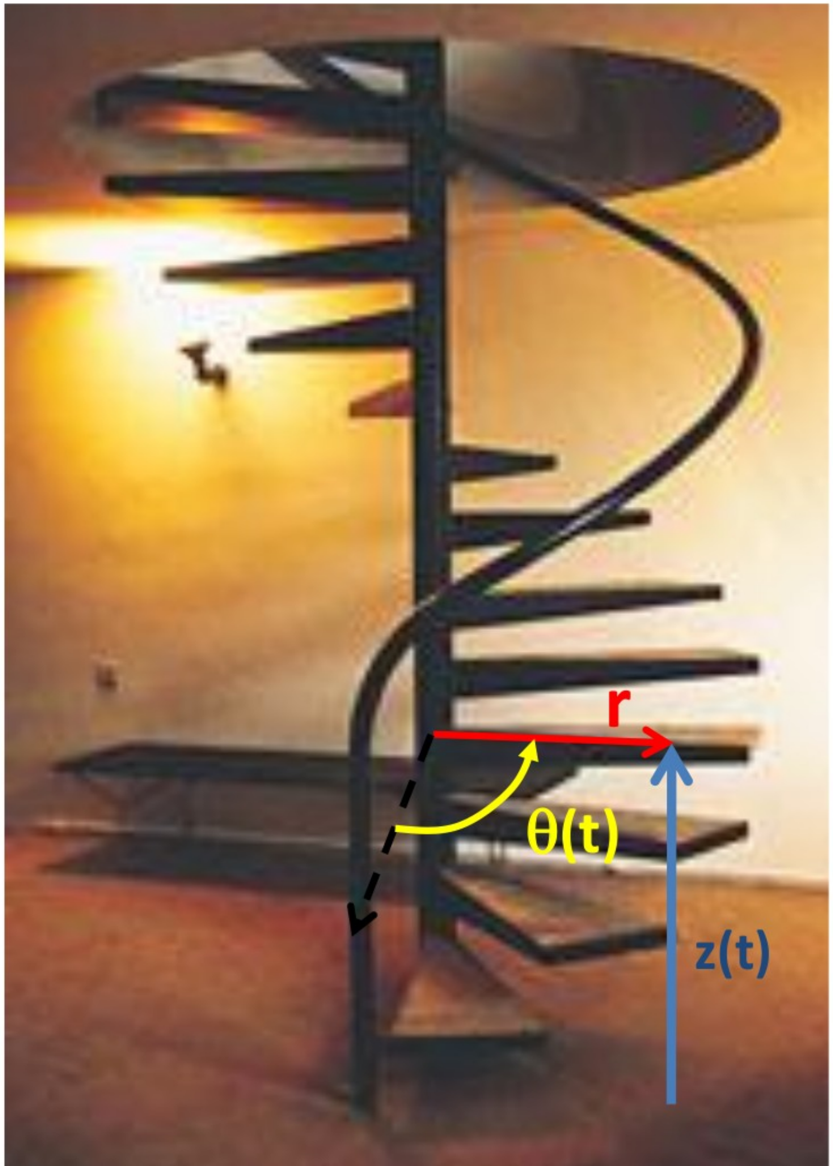
Élément différentiel de volume

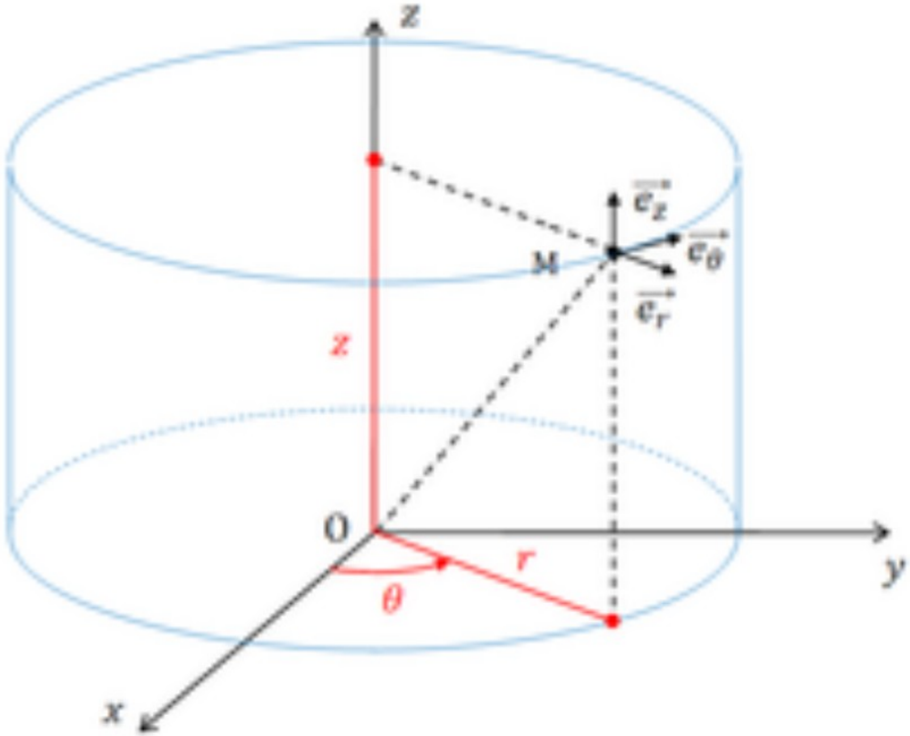
$$\boxed{d\tau = dxdydz}$$

.

2. Coordonnées cylindriques

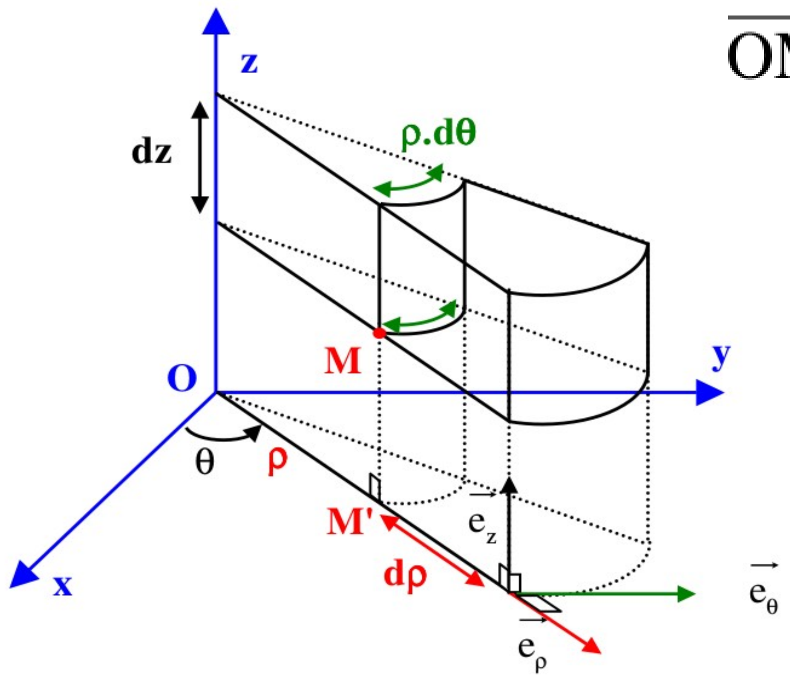
Bien adapté pour repérer un point sur un cylindre





.

2. Coordonnées cylindriques



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

<u>Élément différentiel de position</u>

$$\boxed{\overrightarrow{dl} = d\rho\,\overrightarrow{e}_\rho + \rho d\theta\,\overrightarrow{e}_\theta + dz\,\overrightarrow{e}_z}$$

.

2. Coordonnées cylindriques

Élément différentiel d'aire

$$\text{dans le plan } (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta) : dS = \rho d\rho d\theta$$

$$\text{dans le plan } (\vec{e}_\rho, \vec{e}_z) : dS = d\rho dz$$

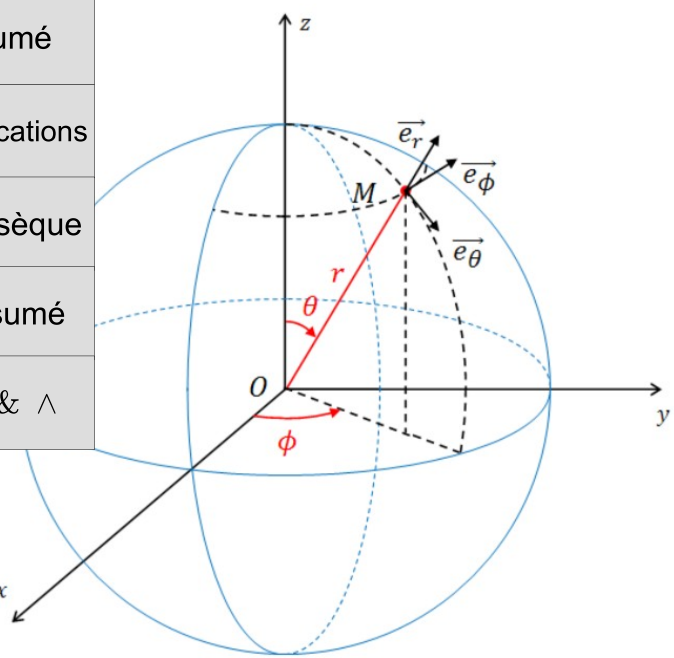
$$\text{dans le plan } (\vec{e}_\theta, \vec{e}_z) : dS = \rho d\theta dz$$

Élément différentiel de volume

$$\boxed{d\tau = dl_\rho dl_\theta dl_z = \rho d\rho dz}$$

3. Coordonnées sphériques

Bien adapté pour repérer un point sur une sphère



Coordonnées GPS :

90°-θ

ϕ

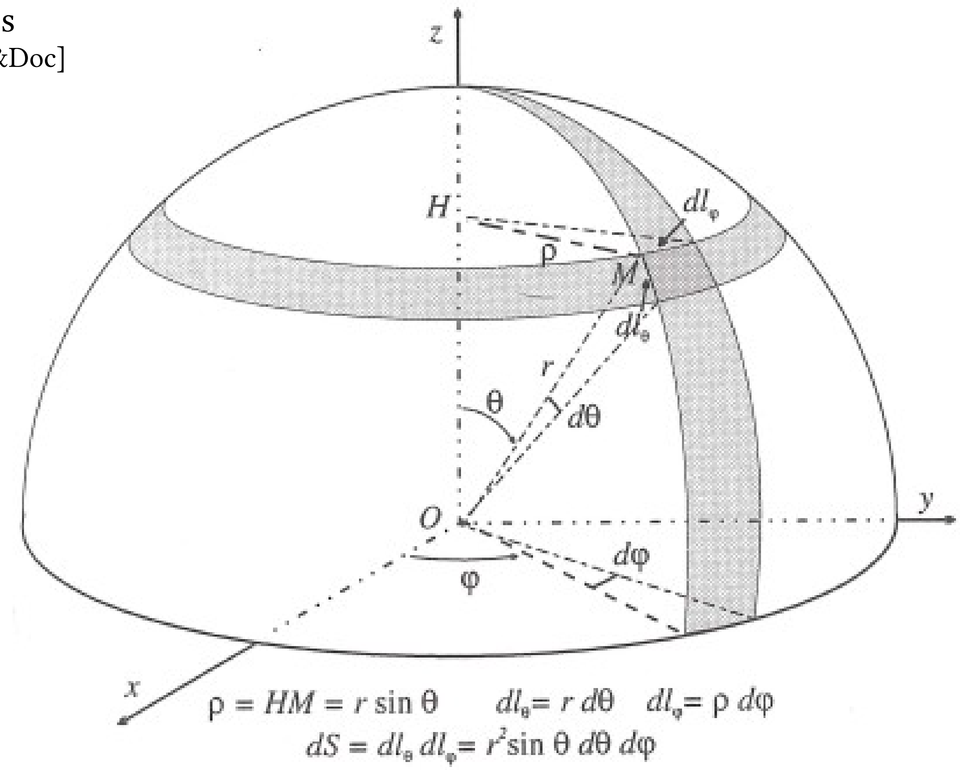
r = rayon de la Terre = 6400km

.

3. Coordonnées sphériques

Figure : Élément d'aire en coordonnées sphériques
[*Électromagnétisme 1 – 1ère année* , H. Gié et J.P. Sarmant, Tec&Doc]

$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r$$



Élément différentiel de position

$$\boxed{\vec{dl} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi}$$

.

Élément différentiel d'aire

$$\text{dans le plan } (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) : \; dS = r dr d\theta$$

$$\text{dans le plan } (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) : \; dS = r dr \sin\theta d\varphi$$

$$\text{dans le plan } (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi) : \; dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Élément différentiel de volume

$$\boxed{d\tau = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi}$$

.

1) Volume d'une sphère pleine de centre 0 et de rayon R :

2) Surface d'une sphère pleine de centre 0 et de rayon R :

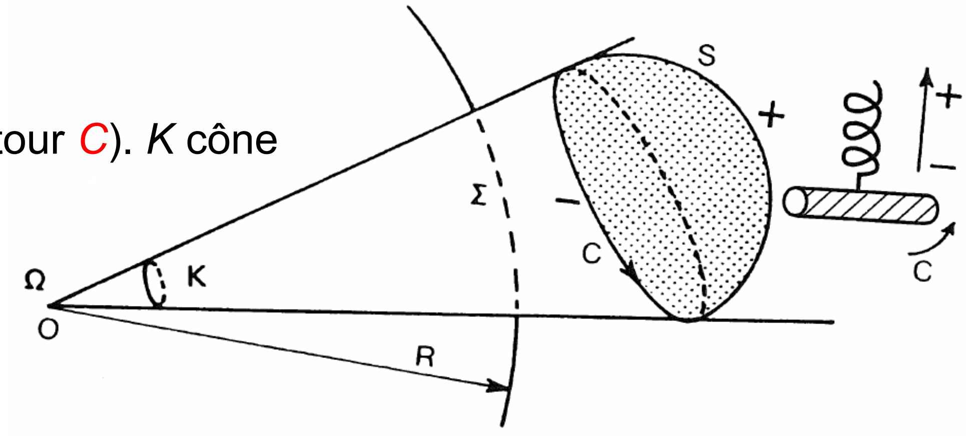
.

4. Applications

3) Angle solide

Définition :
S surface (signe des faces déduit orientat° contour *C*). *K* cône découpe sur sphère (0, rayon R) une aire Σ .

Angle solide sous lequel on voit *S* de *O* :

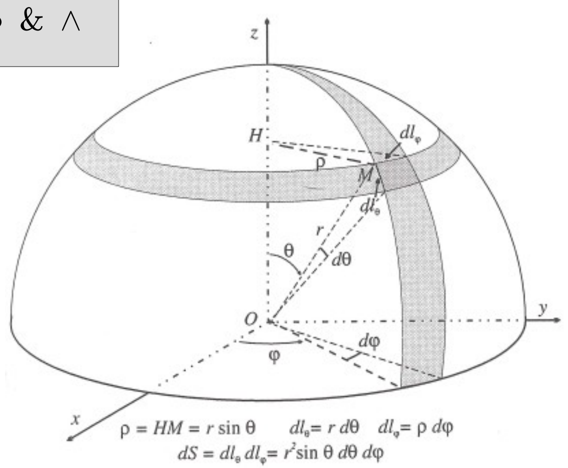


$$\boxed{\Omega = \frac{\Sigma}{R^2}}$$

Rq : Ω indépendant de R.

Angle solide élémentaire :

$$\boxed{d\Omega = \overrightarrow{dS} \cdot \frac{\overrightarrow{e}_r}{r^2}}$$



en coordonnées sphériques : $\boxed{d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi}$

Angle solide : sans dimension et unité = *stéradian* (symbole:sr)
Angle solide correspondant à l'ensemble de l'espace :

$$\Omega_0 = 4\pi$$

.

4) Angle solide d'un cône de révolution

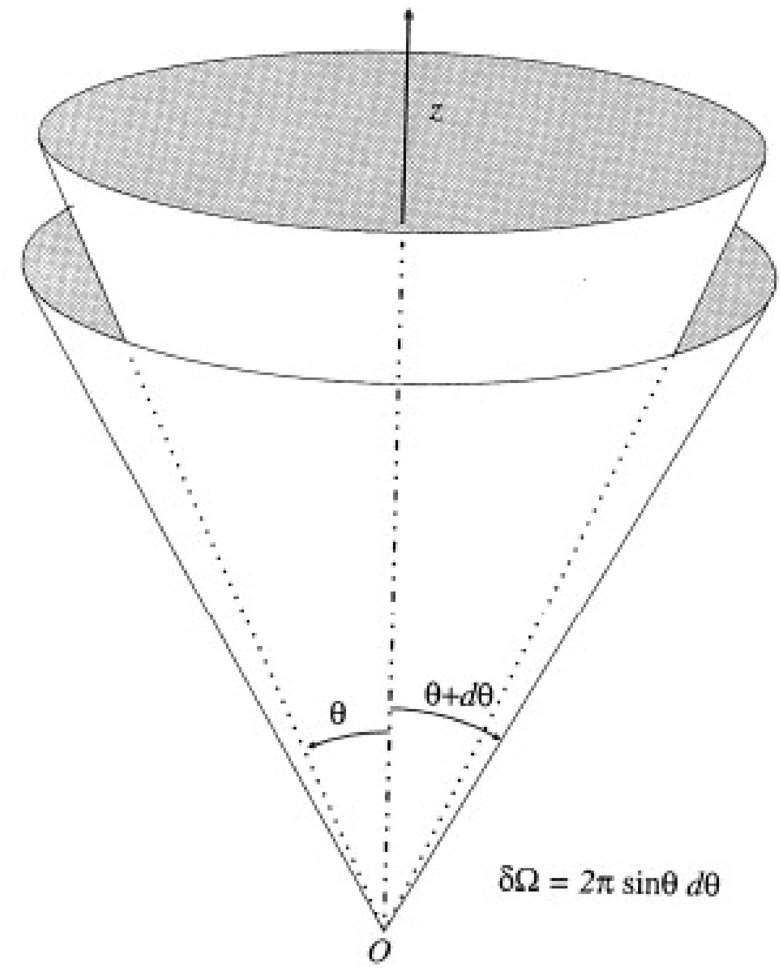


Figure : Angle solide entre deux cônes de révolution.
[*Électromagnétisme 1 – 1ère année* , H. Gié et J.P. Sarmant, Tec&Doc]

5. Coordonnées intrinsèques

Ce que mesure le compteur kilométrique d'une voiture...

Longueur du chemin entre Ω et M :

s = abscisse curviligne= $\widehat{\Omega M}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = ?}$$

$\vec{u}_t$ Vecteur tangent à la trajectoire

$\vec{u}_n$ Vecteur normal à la trajectoire

$$(\vec{u}_t, \vec{u}_n) = +\frac{\pi}{2}$$

6. Résumé

Dans un plan :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ cartésiennes

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ polaires

$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

Dans l'espace :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ cartésiennes

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r^{\,\text{plan}} + z\,\vec{k}$ cylindriques

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r^{\,\text{espace}}$ sphériques

⚠ *: vecteurs non identiques*

On peut aussi repérer la position d'un point par son abscisse curviligne, s (cf compteur kilométrique de voiture).

7. Produit scalaire & Produit vectoriel

En Mécanique 1 et 2, on modélise les mouvements et leurs causes, les ***forces***, par des ***vecteurs***.

Afin de résoudre les problèmes de Mécanique, d'Électromagnétisme etc… , on a besoin de *projeter les vecteurs* sur des directions particulières en utilisant les produits scalaires.

En présence de rotations, on utilise également le produit vectoriel, ce qui sera un cas rencontré souvent en Électromagnétisme 1 et 2 lors qu'on s'intéressera au champ magnétique.

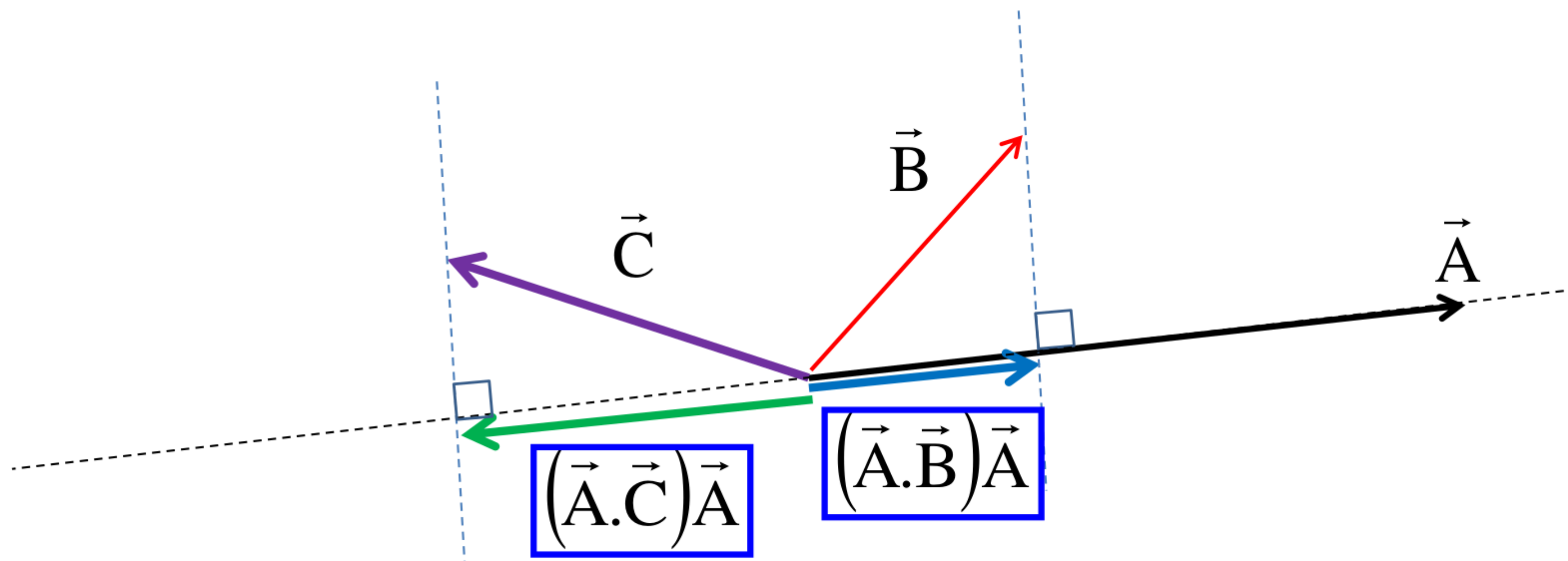
.

7. Produit scalaire & Produit vectoriel

1.Cartésien
2.Cylindrique
3.Sphérique
Résumé
4. Applications
5.intrinsèque
6.Résumé
7. • & ∧

Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Le produit **scalaire** de deux vecteurs mesure l'intensité de la projection d'un vecteur sur l'autre. C'est un **nombre** positif ou négatif



$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)}$$

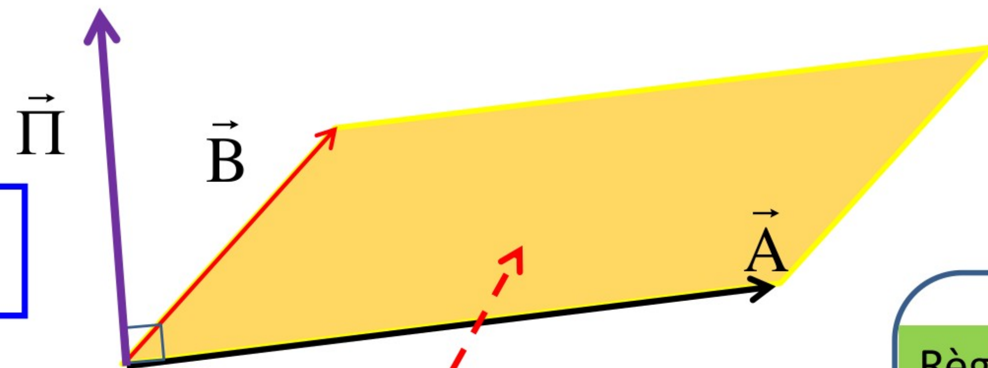
.

7. Produit scalaire & Produit vectoriel

1.Cartésien
2.Cylindrique
3.Sphérique
Résumé
4. Applications
5.intrinsèque
6.Résumé
7. • & ∧

Produit vectoriel de deux vecteurs $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

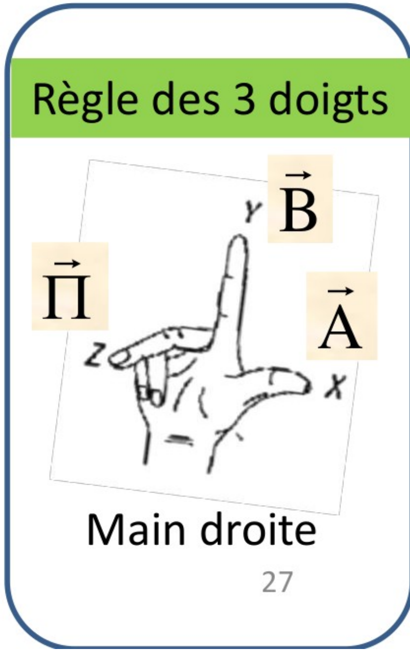
Le produit **vectoriel** de deux vecteurs est un **vecteur**. Il mesure la surface du parallélogramme basé sur les deux vecteurs.



$$\boxed{\vec{\Pi} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}}$$

Notation anglo-saxonne

$$\boxed{\left\|\vec{\Pi}\right\| = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\left|\sin\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)\right|}$$



.

7. Produit scalaire & Produit vectoriel

Propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel

Propriétés	Produit scalaire	Produit vectoriel
Notation	$\vec{A}.\vec{B}$	$\vec{\Pi}=\vec{A}\wedge\vec{B}$
Nature	Scalaire (nombre)	Vecteur
Valeur	$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)}$	$\boxed{\left\|\vec{\Pi}\right\|=\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|\left\|\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)\right\|}$
Commutation	$\vec{B}.\vec{A}=+\vec{A}.\vec{B}$	$\vec{B}\wedge\vec{A}=-\vec{A}\wedge\vec{B}$
Associativité	$\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$	$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\wedge\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{C}$
Produit avec lui-même	$\vec{A}.\vec{A}=\left\|\vec{A}\right\|^2$	$\vec{A}\wedge\vec{A}=\vec{0}$

.

7. Produit scalaire & Produit vectoriel

Propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel

Propriétés	Produit scalaire	Produit vectoriel
Notation	$\vec{A}.\vec{B}$	$\vec{\Pi} = \vec{A} \wedge \vec{B}$
Produit nul (les deux vecteurs sont non nuls)	$\vec{A}.\vec{B} = 0$ ssi $\vec{A} \perp \vec{B}$	$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ ssi $\vec{A} // \vec{B}$
'Valeur' maximale	si $\vec{A} // \vec{B}$, $\vec{A}.\vec{B} = \left\Vert\vec{A}\right\Vert \left\Vert\vec{B}\right\Vert$	si $\vec{A} \perp \vec{B}$, $\left\Vert\vec{A} \wedge \vec{B}\right\Vert = \left\Vert\vec{A}\right\Vert \left\Vert\vec{B}\right\Vert$
Valeur en fonction des coordonnées $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$	$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$

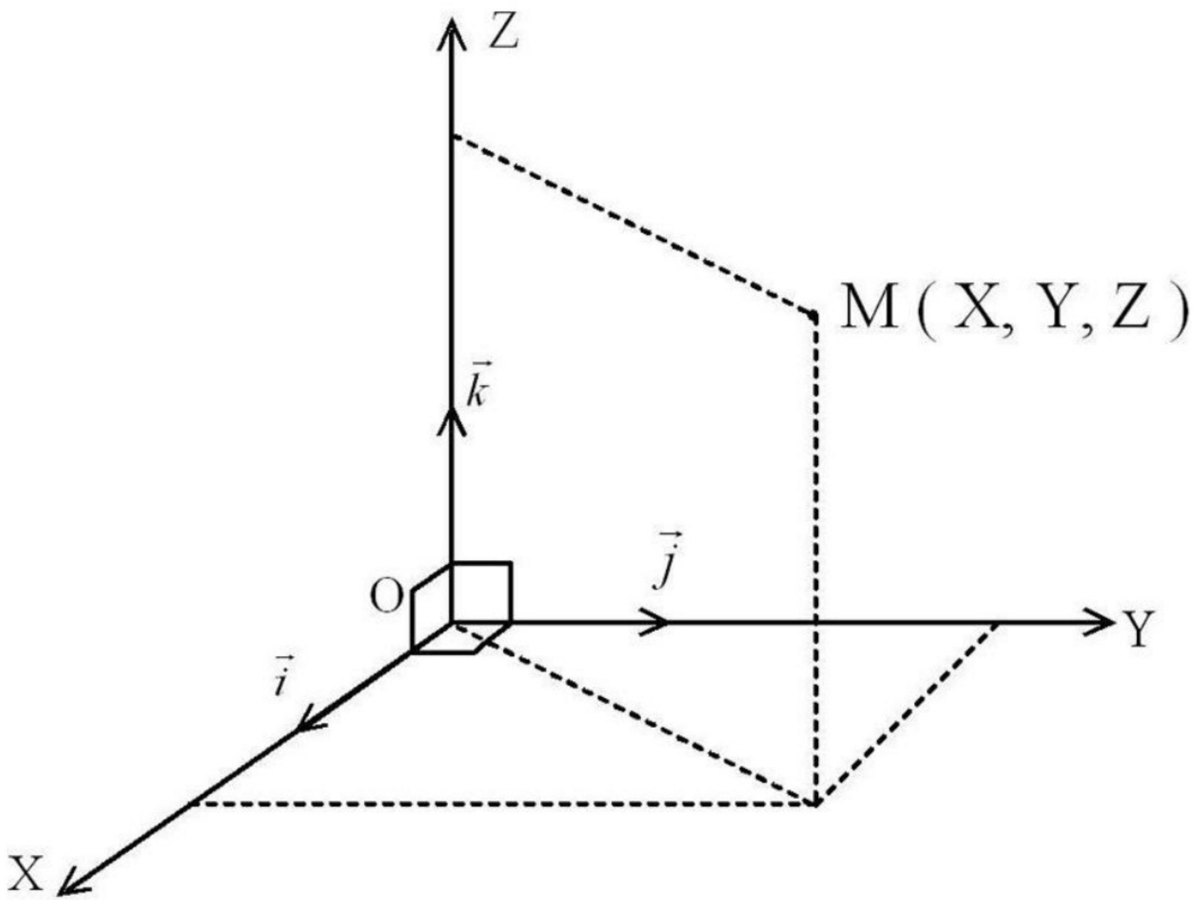
.

Sommaire

7. Produit scalaire & Produit vectoriel

1.Cartésien
2.Cylindrique
3.Sphérique
Résumé
4. Applications
5.intrinsèque
6.Résumé
7. • & ∧

Produit vectoriel : en coordonnées cartésiennes



$$\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$$

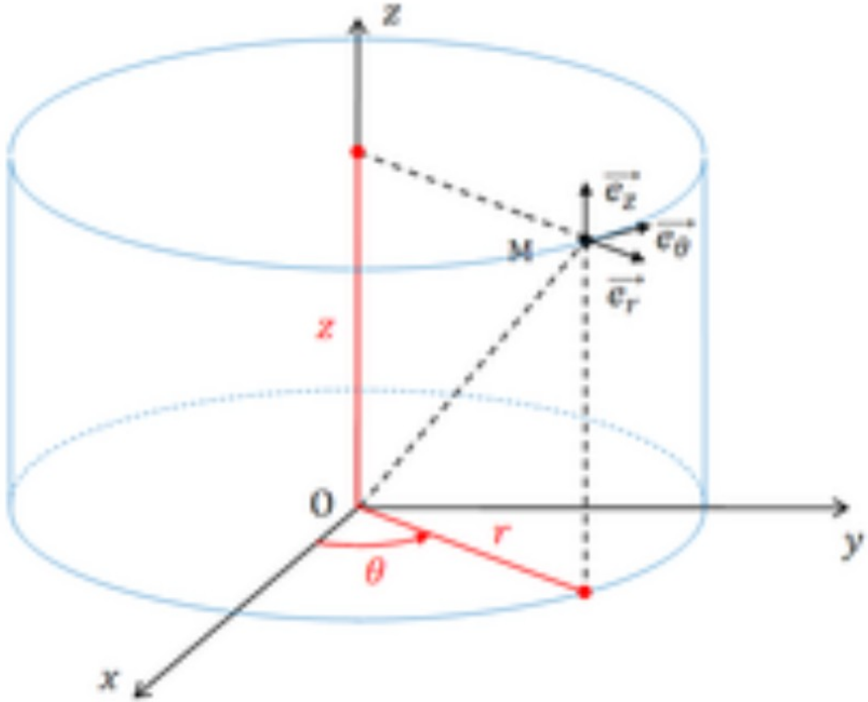
$$\vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{k}$$

$$\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}$$

.

7. Produit scalaire & Produit vectoriel

Produit vectoriel : en coordonnées cylindriques



$$\boxed{\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}}$$

$$\vec{k} = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_r = \vec{u}_\theta \wedge \vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = \vec{k} \wedge \vec{u}_r$$

.