Analyse dans $\mathbb{R}^n$

CM

2022-
2023

Analyse dans $\mathbb{R}^n$

① Limite et continuité

Definition: limite d'une fonction en un point

$f : E \to F$ E, F e.v.n $(E, \|\cdot\|_E)$ $(F, \|\cdot\|_F)$

$A \subset E$, $f : A \to F$, $x \in \bar{A}$, $\ell \in F$

On dit que ℓ limite de f lorsque $y \to x$

ssi une des propositions suivantes est verifiée

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in A \ \|y - x\|_E < \delta$

$\Rightarrow \|f(y) - \ell\|_F < \varepsilon$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B(x; \delta) \Rightarrow f(y) \in B(\ell, \varepsilon)$

3) $\forall V_F \in \mathcal{V}_F(\ell), \exists V_E \in \mathcal{V}_E(x)$ tel que

4) $\forall V_F \in \mathcal{V}(\ell), \exists V_E \in \mathcal{V}(x)$ tel que

$f(V_E \cap A) \subset V_F$

On ecrit $\lim_{y \to x} f(y) = \ell$, $f(y) \underset{y \to x}{\longrightarrow} \ell$

proposition: E, F e.v.n $A \subset E$

$f : A \to F$, $a \in \overline{A}$

Si f admet une limite en a, elle est unique

Remarque : $E, F = \mathbb{R}$

Pour etudier $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$

$\lim_{x \to a^-} f(x)$

$$\text{Si } \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

limite le long d'un chemin

Proposition : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ sauf peut être en x_0,

1) Si f admet une limite ℓ au point x_0 ssi la restriction de f à toute courbe passant par x_0 admet une limite en x_0 et cette limite est ℓ

2) Par contraposée si les restrictions de f à deux courbes différentes passant par x_0 ont des limites différentes au point x_0, alors f n'admet pas de limite en x_0

Exemple : Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y) \to (0;0)} f(x,y)$$

- $y \neq 0$, $x = t$, $f(t,0) = \dfrac{t \times 0}{t^2+0} = 0$

- $x = 0$, $y = t$, $f(t,0) = \dfrac{0 \times t}{t^2+0} = 0$

- $x = y \Rightarrow f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

- $x = -y \Rightarrow f(x,-x) = \dfrac{-x^2}{2x^2} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow f$ n'admet pas de limite en $(0;0)$

Proposition : operation sur la limite

$f, g : A \to F$, où $A \subset E$, $a \in A$ $\ell_1, \ell_2 \in F$

tel que $\lim_{x \to a} (f(x)) = \ell_1$, $\lim_{x \to a} (g(x)) = \ell_2$

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} (f + \lambda g)(x) = \ell_1 + \lambda \ell_2$

2) $\|f(x) - \ell_1\| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ ssi $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_1$

$\Leftrightarrow \|f(x) - \ell\| \to 0$

$\|x - a\| \to 0$ car x et a sont des élément de E

* Si $F \subset \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$

Si $\ell_2 \neq 0$, $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$

Proposition : $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^n$

$f : E \to F$

$x = (x_1; \dots; x_n) \to f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

Cette application admet $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ comme limite quand $x \to a \in E$, ssi $\forall i \in [\![1, n]\!]$

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet ℓ_i comme limite quand $x \to a$

Exemple : $f(x,y) = \left(\dfrac{x - y^2}{x^2 + y^2} , x^2 + y^2 x \right)$

$f_1(x,y) = \dfrac{x y^2}{x^2+y^2}$, $f_2(x,y) = x^2 + y^2 x$

$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} f(x,y)$$

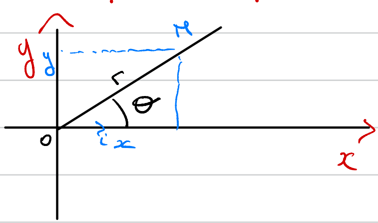
$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} f_1(x,y) = \frac{1 \times 0^2}{1 + 0} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} f_2(x,y) = 1^2 + 0 \times 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (1,0)} f(x,y) = (0,1) \in \mathbb{R}^2$$

* coordonnées polaire : Soit $M \in \mathbb{R}^2$

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère canonique

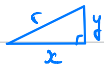


$0 \leq r < +\infty$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin\theta$

(r,θ) les coordonnées polaires de M

$M(x,y)$



$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad x > 0,\ y \geq 0$$

proposition : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction definie au voisinage de $(0;0) \in \mathbb{R}^2$ sauf peut être en $(0;0)$

Si $\lim\limits_{r \to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \ell \in \mathbb{R}$

existe independamment de θ, alors $\lim\limits_{(x;y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \to \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{r^2\cos^2(\theta)\, r^3\sin^3(\theta)}{(r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta))^2}$$

$$= \frac{r^5 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta)}{r^4} = r \cos^2(\theta) \sin^3(\theta)$$

$$\lim_{r \to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) =$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{r^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2} = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$\lim_{r \to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

la limite depend de $\theta \Rightarrow f$ n'admet pas de limite en $(0;0)$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{(x-1)(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) \qquad \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2+(x+1)^2}$$

$x-1 = r\cos(\theta)$, $y-1 = r\sin(\theta)$

$$f(r\cos(\theta)+1, r\sin(\theta)+1)$$

$$= \frac{(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))^2}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)} = r\cos(\theta)\sin^2(\theta)$$

$$= r\cos(\theta)\sin^2(\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \quad \forall \theta$$

$$\Rightarrow f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(1,1)]{} 0$$

Caracterisation sequentielle de la limite

Soit $f : A \subset E \to F$, $A \subset E$,

E, F e.v.n , $a \in A$

f admet une limite $\ell \in F$ quand $x \to a$
ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ converge vers a,
la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ

Contraposée : $\exists$ deux suites $(x_n), (y_n) \in A$ telles que
$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

mais $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l_1$, $f(y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} l_2$, $l_1 \neq l_2$

$\Rightarrow$ f n'admet pas une limite en a

Exemple : $f(x,y) = 1 + \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \longrightarrow 0$

$$\lim_{(x;y) \to (0;0)} f(x;y)$$

Coordonées polaire

$$\lim f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \lim \left(1 + \frac{r^3\cos(\theta)}{r^2}\right)$$

$$= \lim \left(1 + r\cos^3(\theta)\right)$$

$$= 1$$

Caracterisation sequentielle

$u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$

$v_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$

$$f(u_n) = 1 + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$f(v_n) = 1 + \frac{0}{0 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1$$

On ne peut pas dire que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Caractérisation cartesienne

Chemin 1 :

Chemin 2 : $(x,0)$

$$f(x,0) = 1 + \frac{x^3}{x^2} = 1 + x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

On ne peut pas dire que la limite de f est 1 en $(0;0)$

Definition

$$|f(x;y) - 1| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = |x|\,\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Contenuité

→ déf :

ssi f admet une limite quand $x \to a$ et cette limite est $f(a)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x-a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$

Sinon f est discontinue en a.

* f continue sur A ssi f continue en chaque point $a \in A$. L'ensemble de fonction continue de domaine A à valeur dans F, $\mathcal{C}(A,F)$.

→ propriété :

$f : A \to F$ continue en a si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

① $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, x \in B(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$ ou

$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$.

$y \in f(B(a,\delta)) \Rightarrow \exists x \in B(a,\delta)$

$f(x) = y \Rightarrow f(x) \in f(B(a,\delta))$

$\Rightarrow f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$

$\Rightarrow y \in B(f(a),\varepsilon)$

$\Rightarrow f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$

② $\forall V_F\ \mathcal{V}(f(a)) \exists V_E \in \mathcal{V}(a)\ \forall x \in A$

$x \in V_E \to f(x) \in V_F$

③ $\forall V_F \in \mathcal{V}(f(a)), \exists V_E \in \mathcal{V}(a)$

$f(V_E \cap A) \subset V_F$

④ f continue en a ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

→ **propriété**:

f continue en $a \in E$ ssi $\forall i \in [\![1, p]\!]$
$f_i : E \to \mathbb{R}$ est continue en a.
$f : E \to F$
$x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$

* f continue sur $A \subset E$ ssi f_i continue sur A.

→ **propriété** (opérations sur les fonctions continues)
soient E, F evn et $A \subset E$.
1) si $f, g : A \to F$ continues sur A.
$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ continue sur A.

2) la compositions d'applications continues est continu si $F \subset \mathbb{R}$.

3) $f, g : A \to F$ continue sur A alors $f \cdot g$ continue sur A.

④ si $g \neq 0$ sur A, f, g sont continues sur $A \Rightarrow \dfrac{f}{g}$ continue sur A.

→ **propriété**: (caractérisation séquentielle de la continuité)
$f : E \to F$, $A \subset E$, $a \in A$.
f continue en a ssi $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ convergente vers a tq $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$

convergente vers $f(a)$.

→ **déf** : (prolongement par continuité)

$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{E}$, $x_0 \notin E$

si f admet une limite l quand $x \to x_0$

On peut étendre le domaine de déf de f à

exemple :

$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2 + \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$$

$$= 2 + \lim_{r\to 0} r \sin\theta \cos^2\theta = 2$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) : x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 2 : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

→ **théorème** : (Image réciproques d'ouverts, de fermés)

* l'image réciproque d'un ouvert par une app. continue est un ouvert.
* l'image

Demonstration :

$f : E \to F$, une application continue, $\mathcal{U}$ ouvert dans F, on veut montrer que $f^{-1}(\mathcal{U})$

soit $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$, $f(x) \in \mathcal{U}$ ouvert

$\exists\, r_x > 0$, $B(f(x), r_x) \subset \mathcal{U}$.

f continue, $\exists\, \delta > 0$, $\forall y \in E$, $\|y - x\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < r_x$.

$\Rightarrow f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), r_x) \subset \mathcal{U}$.

$\Rightarrow B(x, \delta) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$

$\exists\, \delta > 0$, $f(x, \delta) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$

$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U})$ est ouvert.

Compacité :

→ déf : $(E, \|\cdot\|)$ evn, $A \subset E$. On dit que A est compact dans E ssi toute suite de A admet une sous-suite convergente dans A.

ex :

1. $\mathbb{R}$, $x_n = n$ n'admet pas une sous-suite convergente sur $\mathbb{R}$.
2. « Tout fermé est compact ». Faux car $\mathbb{R}$ fermé mais pas compact.
3. $([a,b], |\cdot|)$. Compact.

→ propriété : E evn.

1. L'ensemble vide est compacte.
2. Tout compact de E est fermé et borné.
3. Toute partie fermée d'un compact de E est compact.

Démonstrations :

② on doit mq A fermé, $\bar{A} \subset A$, $x \in \bar{A}$, $\exists (x_n) \in A$ tq $x_n \to x$
comme A compact, $\exists$ $(x_{\phi(n)})$ converge vers $y \in A$ mais $(x_{\phi(n)})$ est une sous-suite de (x_n) convergente vers $x \Rightarrow (x_{\phi(n)}) \to y$, $(x_{\phi(n)}) \to x$.
Par l'unicité de la limite $\Rightarrow x = y \in A$.
$\Rightarrow \bar{A} \subset A \Rightarrow A$ fermé.

A borné, Par contraposée, on doit mq A borné. On suppose que A n'est pas borné, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\exists (x_n) \in A$, $\|x_n\| \geq n$.
Pour toute sous suite $(x_{\phi(n)})$ de (x_n) on a :
$+\infty > \|x_{\phi(n)}\| \geq \phi(n) \geq n$.
$\Rightarrow \|x_{\phi(n)}\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $x_{\phi(n)}$ diverge.

$\Rightarrow A$ n'est pas compact.

→ propriété :
- Tout espace compact d'un espace vectoriel normé est complet.
- Tout " vectoriel normé de dimension finie est complet, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(V, \|\cdot\|)$
* $C([a,b], \mathbb{R})$ est complet par rapport à la norme $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$
* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont des espaces de Banach.
$z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

→ propriété : (produit cartésien de compacts)
* E, F 2 evn, $A \subset E$, compact.
$B \subset F$ compact. $\Rightarrow A \times B$ est compact de $E \times F$.

* $f : E \to F$ application continue.

Si A compact de E, $f(A)$ est compact de F.
* Toute réunion finie de compact est compact
* Toute intersection quelconque de compact est compact.

→ **théorème** : (de Bolzano – Weierstrass)
Toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dim (E) finie possède une sous-suite convergente.
* $I = [a,b]$
$\forall (x_n) \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$, $\exists (x_{\phi(n)})$ ss-suite de (x_n) CV.
$x_{\phi(n)} \longrightarrow x$
$\Rightarrow a \leq x_{\phi(n)} \leq b$
$a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I$.
$\Rightarrow I$ est compact

→ **propriété**: E evn, dim $E = n$, $A \subset E$ - A compact ssi A fermé et borné.

Continuité uniforme:

→ **déf**: soit E, F evn, $A \subset E$. $f : A \longrightarrow F$, on dit que f est continue uniformément sur A ssi:
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall a \in A$, $\forall x \in A$.
$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$, δ pour tout $x, a \in A$.

ex:
1) $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas continue uniformément sur $\mathbb{R}^*$.

2) $f(x) = \sqrt{x}$ est continue uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

→ propriété:

→ déf : (application lipschizienne)
soit E, F evn, $f : E \to F$. On dit que f est lipschizienne ssi :
$\exists\ K > 0,\ \forall x, y \in E,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E$. K est indépendant de x, y. On appelle f : K-lipschizienne

<u>Remarque:</u>
Toute application 0-lipschizienne est constante.
$\forall x, y \in E,\ 0 \leq \|f(x) - f(y)\| \leq 0.$
$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$