Comportements Asymptotiques

Définition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.
On dit que :

- *(u_n) est* **dominée** *par (v_n) si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.*
  On note alors $u_n = O(v_n)$.
- *la suite (u_n) est* **négligeable** *devant (v_n) (ou que (v_n) est prépondérante devant la suite (u_n))*
  si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.
  On note alors $u_n = o(v_n)$.

Exemples.

On a : $\dfrac{\cos(n)+4}{n^2} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $(\cos(n)+4)$ est bornée.

On a : $n^3\sin(n) = o\left(n^5\right)$

En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3\sin(n)}{n^5} = \dfrac{\sin(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (théorème d'encadrement)

Remarques.

- (u_n) est bornée si et seulement si $u_n = O(1)$.
- (u_n) converge vers 0 si et seulement si $u_n = o(1)$.
- $u_n = o(v_n) \Longrightarrow u_n = O(v_n)$.

Proposition

Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites.

- *Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$ (transitivité de la relation O).*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$ (transitivité de la relation o).*

Démonstration.

On démontre le deuxième point, le premier point est analogue.
Soit (u_n) une suite telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(t_n)$.
Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a : $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \cdot \dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot 0 = 0.$
Ainsi, $u_n = o(t_n)$. □

Proposition

Soient $(u_n),(v_n),(w_n)$ et (t_n) quatre suites telles que (w_n) et (t_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$.

- *Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = O(w_n)$.*
- *Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(w_n)$.*
- *Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(t_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n t_n)$*
- *Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(t_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n t_n)$.*

Exemples

- $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^4\right)$.
- $2^n \underset{n\to+\infty}{=} o(3^n)$.
- $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Rappel

Définition (Exponentielle d'exposant réel quelconque)

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* $b \in \mathbb{R}$,

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Démonstration.

On a

$$\ln a^b = b \ln a$$

en appliquant la fonction exponentielle on obtient le résultat. □

Proposition

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

Démonstration.

On étudie $\phi(x) = \ln x - x$.
$\phi'(x) = \dfrac{1-x}{x}$, donc sur $[1;+\infty[$ ϕ est décroissante . Comme $\phi(1) = -1$, $\phi < 0$, donc

$$0 \leqslant \ln x \leqslant x \text{ sur } [1;+\infty[$$

Si on remplace x par $\sqrt{x}$, on obtient $0 \leqslant \ln \sqrt{x} \leqslant \sqrt{x} \Longrightarrow 0 \leqslant \dfrac{1}{2} \ln x \leqslant \sqrt{x}$

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

En passant à la limite en $+\infty$, d'après le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Proposition

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Démonstration.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Or

$$\frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{\ln(1+X)-\ln(1+0)}{X-0} \underset{X\to 0}{\to} 1$$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ donc, par composition,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit, par composition, que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

□

Proposition (croissances comparées)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ *avec* $\alpha, \beta > 0$, *et* $q > 1$. *Alors :*

$$\ln^{\beta} n = o(n^{\alpha}) \qquad n^{\alpha} = o(q^n)$$

$$q^n = o(n!) \qquad n! = o(n^n)$$

Démonstration.

- On étudie le rapport $\dfrac{n^{\alpha}}{q^n} = e^{\alpha \ln n - n \ln q} = e^{n\left(\alpha \frac{\ln n}{n} - \ln q\right)}$

  On a $\alpha \dfrac{\ln n}{n} - \ln q \underset{n\to+\infty}{\to} -\ln q$ donc $n\left(\alpha \dfrac{\ln n}{n} - \ln q\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$ car $q > 1$

  Or $e^X \underset{X\to-\infty}{\to} 0$ donc par composition $e^{n\left(\alpha \frac{\ln n}{n} - \ln q\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

  On a bien $\dfrac{n^{\alpha}}{\ldots} \to 0$

Démonstration.

- On étudie le rapport $\dfrac{\ln^{\beta} n}{n^{\alpha}} = e^{\beta \ln(\ln n) - \alpha \ln n} = e^{\ln n\left(\beta \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} - \alpha\right)}$

  Or $\dfrac{\ln X}{X} \underset{X \to +\infty}{\to} 0$ et $\ln n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ donc par composition
  $\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ donc $\beta \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n} - \alpha \underset{n \to +\infty}{\to} -\alpha$
  donc $\ln n \left(\beta \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n} - \alpha\right) \underset{n \to +\infty}{\to} -\infty$.

  Or $e^{X} \underset{X \to -\infty}{\to} 0$ donc par composition $e^{\ln n\left(\beta \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} - \alpha\right)} \underset{n \to -\infty}{\to} 0$

  On a bien $\dfrac{\ln^{\beta} n}{n^{\alpha}} \underset{n \to -\infty}{\to} 0$

$\square$

Démonstration.

- On étudie la suite $u_n = \dfrac{q^n}{n!}$

  On souhaite démontrer que cette suite tend vers 0.

  On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n \dfrac{q^{n+1} n!}{(n+1)! q^n} = u_n \dfrac{q}{n+1}$

  Pour $n+1 > q$, cette suite est décroissante. De plus elle est minorée par 0. Donc elle est convergente.

  Soit ℓ la limite de u_n, on passe à la limite sur la relation de récurrence.

  On obtient $\ell = 0$.

  Donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

  On a bien $\dfrac{q^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

$\square$

Démonstration.

- On étudie la suite $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$
  On souhaite démontrer que cette suite tend vers 0.
  On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n < 1$
  on a la relation de récurrence $v_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n v_n$
  Cette suite est décroissante. De plus elle est minorée par 0. Donc elle est convergente.
  Soit ℓ la limite de v_n, on souhaite passer à la limite sur la relation de récurrence.
  $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e$ donc $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$
  Donc si on passe à la limite sur la relation de récurrence, on obtient $\ell = \ell e^{-1}$ donc $\ell = 0$
  Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
  On a bien $\dfrac{n!}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

On en déduit directement la proposition suivante :

Proposition

$$\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{\ln^\beta}\right) \qquad \frac{1}{q^n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{n!} = o\left(\frac{1}{q^n}\right) \qquad \frac{1}{n^n} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$$

Remarque.
En notant $u_n \ll v_n$ au lieu de $u_n = o(v_n)$, on a donc lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n} \ll \ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

Equivalence

Définition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\textit{si la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \textit{ converge vers 1.}$$

On note alors

$$u_n \sim v_n$$

Exemple. On a $\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$. En effet, $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et par composition par la fonction racine, continue en 1, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1} = 1$.

Proposition

La relation $\sim$ est une **relation d'équivalence** *sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas, c'est à dire :*

- $\sim$ *est réflexive :* $u_n \sim u_n$;
- $\sim$ *est symétrique :* $u_n \sim v_n \Rightarrow v_n \sim u_n$;
- $\sim$ *est transitive : si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n$, *alors* $u_n \sim w_n$.

Proposition

Soient $(u_n), (v_n)$.

- $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$.
- $u_n \sim v_n \implies u_n = O(v_n)$ *et* $v_n = O(u_n)$.

Démonstration.

- $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0$
  $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0 \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 1 donc bornée. De plus, comme $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 1 alors $\dfrac{u_n}{v_n}$ donc u_n est non nulle à partir d'un certain rang et $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers 1 donc $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ est bornée.

$\square$

Proposition

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ et (t_n) quatre suites telles que $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$. Alors on a :

$$u_n v_n \sim w_n t_n \qquad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n} \qquad \forall p \in \mathbb{N}, u_n^p \sim w_n^p$$

Démonstration.

- On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n w_n}{v_n z_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{w_n}{z_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ par produit de limites
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{w_n}{z_n}} = \frac{u_n z_n}{v_n w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \left(\frac{w_n}{z_n}\right)^{-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

  comme quotient de limites.
- Enfin, pour n et $p \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{u_n^p}{v_n^p} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1^p = 1$ par opérations sur les limites.

$\square$

Exemple.

Montrons que $\binom{n}{6} \sim \dfrac{n^6}{720}$.

En effet, pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, on a $n - j \sim n$;

par conséquent :

$$\binom{n}{6} = \frac{1}{6!} \prod_{j=0}^{5} (n - j) \sim \frac{1}{6!} \prod_{j=0}^{5} n = \frac{n^6}{720}$$

ATTENTION ! ! ! !

- On ne peut ni ajouter, ni soustraire, les équivalents :

$$n+1 \sim n+2 \text{ et } n \sim n \text{ mais on n'a pas } 1 \sim 2$$

- On ne compose pas les équivalents :
  si f est une fonction (même continue sur $\mathbb{R}$) et si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$:
  si $u_n = n^2 + n, v_n = n^2$ et $f = \exp$, on a $u_n \sim v_n$, mais :
  $\dfrac{f(u_n)}{f(v_n)} = e^{n^2+n-n^2} = e^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f(u_n) \not\sim f(v_n)$.
- Lors d'une mise en puissance d'un équivalent, l'exposant doit être constant :
  on a $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n$
  (en effet $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e$, donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim e\right)$.
  En règle générale, on ne sépare pas les limites

Proposition

Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff u_n \sim \ell$$

Démonstration.

En effet, si $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \neq 0$ alors (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et on a : $\dfrac{u_n}{\ell} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$. Donc $u_n \sim \ell$.

Réciproquement, si $u_n \sim \ell$, alors puisque $\ell \neq 0$, $\dfrac{u_n}{\ell} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $u_n = \dfrac{u_n}{\ell}\ell \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

□

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \sim v_n$.

- *u_n et v_n ont même signe strict (> 0 ou < 0) à partir d'un certain rang.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie) si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.*

Démonstration.

- Comme (u_n) et (v_n) sont équivalentes, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc pour $\epsilon = \dfrac{1}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \dfrac{1}{2}$.
  En particulier pour tout $n \geq N$, on a $\dfrac{u_n}{v_n} \geq \dfrac{1}{2}$, et u_n et v_n ont même signe strict.
- Supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a $u_n = \dfrac{u_n}{v_n} \times v_n$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ par opérations sur les limites. De même si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, on a $v_n = \dfrac{v_n}{u_n} \times u_n$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ par opérations sur les limites.

$\square$

Relations de comparaisons de fonctions

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point, a un point de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$)
- $\mathcal{D}$ désignera I ou $I\backslash\{a\}$;
- toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et supposées non nulles sur $I\backslash\{a\}$ (de sorte que le quotient de deux fonctions est toujours bien défini sur $I\backslash\{a\}$) ;
- si les fonctions sont définies en a, on supposera de plus qu'elles sont continues en a.

Définition

Soient f et $g : \mathcal{D} \to K$. On dit que :

- *f est dominée par g au voisinage de a si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.*
  On note alors $f(x) = O(g(x))$ ou $f = O(g)$.
- *f est négligeable devant g au voisinage de a si $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*
  On note alors $f(x) = o(g(x))$ ou $f = o(g)$.

Exemples.

- $x^2 \sin\left(x^3\right) = O\left(x^2\right)$:
  En effet pour $I = \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ **et** $x \mapsto x^2 \sin\left(x^3\right)$ **sont définies sur** $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ **et pour tout** $x \in \mathbb{R}^*$**, on a :** $\left|\dfrac{x^2 \sin\left(x^3\right)}{x^2}\right| = \left|\sin\left(x^3\right)\right| \leqslant 1$.
- **Si** $p < q, x^p \underset{+\infty}{=} o\left(x^q\right)$ **et** $x^q \underset{0}{=} o\left(x^p\right)$:
  En effet pour $I = \mathbb{R}, x \mapsto x^p$ **et** $x \mapsto x^q$ **ne s'annulent pas sur** $I\backslash\{0\}$ **et** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x^q} = 0 = \lim_{x\to 0} \frac{x^q}{x^p}$

Remarque.

Pour $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, on a :

- f est bornée au voisinage de a si et seulement si $f = O(1)$.
- f converge vers 0 au voisinage de a si et seulement si $f = o(1)$.
- $f(x) = o(g(x)) \Longrightarrow f(x) = O(g(x))$.

Proposition

Soit $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$

$$(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o\left(x^\alpha\right) \qquad x^\beta \underset{+\infty}{=} o\left(e^{\alpha x}\right)$$

$$\ln^\beta x \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad e^{\alpha x} \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

Equivalence

Définition

Soient f et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On note alors $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Exemple.

$\sin x \underset{0}{\sim} x$:en effet pour $I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ne s'annule pas su r $I \setminus \{0\}$ et

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Remarque :

- Si f est continue en a, on a : $f(x) \sim f(a)$ si $\underset{a}{f(a)} \neq 0$.
- Si f est dérivable en a, on a : $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$ si $f'(a) \neq 0$.
- Si $P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \ldots a_q x^q (p \geq q$ est une fonction polynomiale, alors :

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad P(x) \underset{0}{\sim} a_q x^q.$$

Proposition

Soient f et g définies sur $\mathcal{D}$.

- $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$.
- $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = O(g(x))$ *et* $g(x) = O(f(x))$.

Proposition

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence, c'est à dire :

- $\underset{a}{\sim}$ *est réflexive :* $f \underset{a}{\sim} f$;
- $\underset{a}{\sim}$ *est symétrique :* $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$;
- $\underset{a}{\sim}$ *est transitive :* $f \underset{a}{\sim} g$ *et* $g \underset{a}{\sim} h$ *impliquent* $f \underset{a}{\sim} h$.

Proposition (Opérations sur les équivalents)

Soient f, g, h, u *quatre fonctions définies sur* $\mathcal{D}$.
Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ *et si* $h(x) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$, *alors :*

- $f(x)h(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)u(x)$;
- $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{u(x)}$;
- $\forall p \in \mathbb{N}, f(x)^p \underset{x \to a}{\sim} g(x)^p$;
- *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, *et si* f^α *et* g^α *sont bien définies sur* $\mathcal{D}$, *alors*

$$f(x)^\alpha \underset{x \to a}{\sim} g(x)^\alpha$$

.

Démonstration.

- On a, pour $x \in \mathcal{D}$, $\dfrac{f(x)h(x)}{g(x)u(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{h(x)}{u(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ par produit de limites.
- Pour $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\frac{\frac{f(x)}{h(x)}}{\frac{g(x)}{u(x)}} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \left(\frac{h(x)}{u(x)}\right)^{-1} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$$

comme quotient de limites.

- Pour $x \in \mathcal{D}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{f(x)^p}{g(x)^p} = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^p \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1^p = 1$ par opérations sur les limites.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\dfrac{f^\alpha(x)}{g^\alpha(x)} = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}$. Comme $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ donc $e^{\alpha \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

$\square$

Proposition (Équivalents classiques au voisinage de 0)

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x$$

$$\arcsin x \underset{0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{0}{\sim} x$$

$$\operatorname{sh} x \underset{0}{\sim} x \qquad \operatorname{th} x \underset{0}{\sim} x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \qquad avec\ \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad 1 - \operatorname{ch}(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Démonstration.

On a :

$$1 - \cos x = \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} \sim \frac{x^2}{2}$$

car $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $1+\cos(x) \underset{0}{\sim} 2$.
De même, :

$$1 - \mathrm{ch}(x) = \frac{1-\mathrm{ch}^2(x)}{1+\mathrm{ch}(x)} = -\frac{\mathrm{sh}^2(x)}{1+\mathrm{ch}(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

Dans tous les autres cas, on utilise la propriété ci-dessous.

□

Proposition

Si f est dérivable en a, si $f'(a) \neq 0$,

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x-a)$$

Proposition (Composition à droite dans un équivalent)

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.
On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a et que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.
Soit ϕ une fonction à valeurs dans $\mathcal{D}$ telle que $\lim\limits_{t \to b} \phi(t) = a$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On a :

$$f \circ \phi(t) \underset{b}{\sim} g \circ \phi(t)$$

Démonstration.

En utilisant le théorème de composition pour les limites, on peut écrire :

$$\lim_{t \to b} \frac{f}{g}(\phi(t)) = \lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = 1$$

D'où le résultat. □

IMPORTANT. On veillera à ne pas additionner, soustraire ou composer à gauche des équivalents sans justification, car les résultats obtenus sont généralement faux.

Par exemple :

- $x+1 \underset{\pm\infty}{\sim} x+2$ et $-x \underset{\pm\infty}{\sim} -x$ mais $1 \underset{\pm\infty}{\sim} 2$;
- $x+1 \underset{\pm\infty}{\sim} x$, mais on n'a pas $\exp(x+1) \underset{\pm\infty}{\sim} \exp(x)$;
- $1+2x \underset{0}{\sim} 1+x$ et $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x, \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

Exemple.

Puisque $\lim\limits_{t\to 0} \sin t = 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on en déduit :

$$\ln(1+\sin t) \underset{0}{\sim} \sin t \underset{0}{\sim} t.$$

Mais dans certains cas, la composition à gauche peut s'appliquer.

- On ne peut pas déduire directement de

$$\sin(t) \sim t \text{ et } 1 + \sin t \sim 1 + t$$

que

$$\ln(1 + \sin t) \sim \ln(1 + t)$$

car alors on compose à gauche les équivalents par $x \mapsto \ln(1 + x)$.
Pourtant c'est bien exact car

$$\frac{\ln(1 + \sin t)}{\ln(1 + t)} = \frac{\ln(1 + \sin t)}{\sin t} \frac{\sin t}{t} \frac{t}{\ln(1 + t)}$$

Donc la limite est 1.

- On a bien :

$$1 + 2x \underset{+\infty}{\sim} 3 + 2x$$

et

$$\ln(1 + 2x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(3 + 2x)$$

Lorsqu'on compose à gauche, il faut donc vérifier dans chaque cas.

Proposition

Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telle que $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.

- *Si g est de signe constant (> 0 ou < 0) au voisinage de a, alors f est de même signe strict que g au voisinage de a.*
- *Si g admet une limite finie ou infinie en a alors f admet une* limite *en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$.*

Démonstration.

- On a $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$, donc par définition de la limite, en posant $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in [a - r, a + r] \cap \mathcal{D}$, $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$ et pour $x \in [a - r, a + r] \cap \mathcal{D}$, $\frac{f(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{2}$, donc $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe strict.
- Supposons que $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x)$, donc $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ par opérations sur les limites.

Développements limités

Dans toute cette section :

- I désignera un intervalle réel non vide et non réduit à un point
- a désignera un réel appartenant à $\bar{I}(= I \cup$ {extrémité de I})
- $\mathcal{D}$ désignera I ou $I \backslash \{a\}$
- Toutes les fonctions considérées seront définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ admet un développement limité en a à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ (en abrégé $DL_n(a)$) s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Remarque On distingue dans ce développement limité :

- Sa **partie régulière**, qui est la fonction polynomiale :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} p_k(x-a)^k$$

- le **reste** $o\left((x-a)^n\right)$, fonction négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque $x \to a$, qui s'écrit aussi

$$(x-a)^n \varepsilon_n(x-a)$$

où $\varepsilon_n : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemples

- La fonction $\begin{array}{rccc} f: &]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x - x^2 + x^3 \ln(1+x) \end{array}$
  admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.
  En effet, comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $x^3 \ln(1+x) = o\left(x^3\right)$, ce qui permet d'écrire :
  $$f(x) = x - x^2 + o\left(x^3\right)$$

- On sait que $\forall n \geqslant 1$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

Donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Il vient

$$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + \ldots + x^n) = x^n \frac{x}{1-x}$$

On en conclut que

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

Proposition

Une fonction f admet, au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, un développement limité à l'ordre n

si et seulement si

la fonction $g : h \mapsto f(a+h)$ admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n.

On a de plus

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \iff f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o\left(h^k\right)$$

Exemple

Calculons le $DL_2(3)$ de $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On pose $h = x - 3$. On a alors :

$$f(x) = f(3+h) = \frac{1}{3+h} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{h}{3}}$$

On utilise alors le DL en 0 de la fonction $x \to \dfrac{1}{1-x}$ calculé précédemment pour obtenir finalement :

$$f(3+h) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{h}{3} + \frac{h^2}{9} + o\left(h^2\right)\right)$$

et donc :

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{(x-3)}{9} + \frac{(x-3)^2}{27} + o\left((x-3)^2\right)$$

Proposition (Unicité d'un DL)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en a, celui-ci est unique.

Démonstration.

Par l'absurde, supposons que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

avec $(a_0, \ldots, a_n) \neq (b_0, \ldots, b_n)$.
Soit p le plus petit entier tel que $b_p \neq a_p$.
Alors, pour tout $0 \leq k < p$, on a $a_k - b_k = 0$. On a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k = o\left((x-a)^n\right)$$ et

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k = o\left((x-a)^n\right).$$

□

Démonstration.

Ainsi, pour tout $x \neq a$:

$$0 = f(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

En divisant par $(x-a)^p$:

$$0 = (a_p - b_p) + (x-a) \sum_{k=p+1}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^{k-p-1} + o\left((x-a)^{n-p}\right)$$

Donc

$$0 \underset{x \to a}{\longrightarrow} a_p - b_p$$

D'où $a_p = b_p$, ce qui constitue une contradiction. $\square$

Proposition (Troncature d'un DL)

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f admet un développement limité à l'ordre p en a obtenu en tronquant le développement limité à l'ordre p :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_p(x-a)^p + o\left((x-a)^p\right)$$

Démonstration.

Si f admet un développement limité à l'ordre n en a dont la partie régulière est $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$, alors, pour tout $p \leq n$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k (x-a)^k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k (x-a)^k + (x-a)^p \sum_{k=p+1}^{n} a_k (x-a)^{k-p} + o\left((x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k (x-a)^k + \underbrace{(x-a)^p \sum_{k=p+1}^{n} a_k (x-a)^{k-p} + o\left((x-a)^n\right)}_{o((x-a)^p)}$$

□

Proposition

*Si f est **paire** (resp. impaire) et admet un développement limité à l'ordre n en 0, ce développement limité ne contient que des termes **pairs** (resp. impairs).*

Démonstration.

Supposons par exemple f paire, et notons

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

son développement limité en 0 .
On a alors

$$f(x) = f(-x) = a_0 + a_1(-x) + \cdots + a_n(-x)^n + o(x^n)$$

car une fonction négligeable devant $(-x)^n$ l'est aussi devant x^n. Par unicité du DL, $a_k = (-1)^k a_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
On a donc pour tout k impair, $a_k = -a_k$ donc $a_k = 0$. $\square$

Proposition

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

Alors en notant p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$, on a :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$$

Remarque

f est donc du même signe strict que le premier terme non nul de son DL au voisinage de a.

Démonstration.

Comme pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, $a_k = 0$, on a
$f(x) = a_p(x-a)^p + \cdots + a_n(x-a)^n + o_a(x-a)^n$, puis

$$\frac{f(x)}{a_p(x-a)^p} = 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x-a) + \cdots + \frac{a_n}{a_p}(x-a)^{n-p} + o\left((x-a)^{n-p}\right) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1.$$

$\square$

Formule de Taylor-Young

Théorème (Lemme de primitivation des développements limités)

Soient I un intervalle, $g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si $g'(x) \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$ *alors* $g(x) \underset{x \to a}{=} g(a) + o\left((x-a)^{n+1}\right)$.

Démonstration.

Pour tout $x \in I \backslash \{a\}, g$ est continue sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$) et dérivable sur $]a, x[$ (ou $]x, a[$), donc d'après le théorème des accroissements finis : $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'\left(c_x\right)$ pour un certain $c_x \in]a, x[$ (ou $]x, a[$).
Ce procédé nous fournit une fonction $c : I \backslash \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I \backslash \{a\} : |c_x - a| < |x - a|$.
Par encadrement : $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$, donc :

$$\left|\frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\frac{g'\left(c_x\right)}{(x-a)^n}\right| = \underbrace{\left|\frac{g'\left(c_x\right)}{\left(c_x - a\right)^n}\right|}_{\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0} \times \underbrace{\left|\frac{c_x - a}{x - a}\right|^n}_{\leqslant 1} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \qquad \square$$

Théorème (Primitivation des développements limités)

Soient I un intervalle, $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.
Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a :

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right) \quad \text{avec } a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R},$$

alors f possède un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + \sum_{x=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Remarque

On peut donc toujours primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée !

Démonstration.

La fonction $x \xrightarrow{g} f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \xrightarrow{g'} f'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k$.

Or ici : $g'(x) \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$,

donc, d'après le lemme : $g(x) = g(a) + o\left((x-a)^{n+1}\right)$, d'où le résultat. $\square$

Exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right).$$

Démonstration.

Puisque : $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k + o\left(x^{n-1}\right)$, alors :

$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o\left(x^{n-1}\right)$ en remplaçant x par $-x$.

Primitivons : $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$ sachant que :

$\ln 1 = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}, (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$ □

Théorème (Formule de Taylor Young)

Soit I un intervalle, $n \in \mathbb{N}, f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$, et $a \in I$.
Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Remarque

Ce résultat est un théorème d'existence de développement limités.
On a les résultats suivants :

- Continuité $\Leftrightarrow$ existence d'un développement limité à l'ordre 0.
- Dérivabilité $\Leftrightarrow$ existence d'un développement limité à l'ordre 1.
- f de classe $\mathscr{C}^n \Rightarrow$ existence d'un développement limité à l'ordre n

ATTENTION La dernière proposition n'est qu'une implication.

Démonstration.

Initialisation : Nous savons déjà que pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue : $f(x) = f(a) + o(1)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose la proposition vraie au rang n.

Soit $f \in \mathscr{C}^{\mathrm{n+1}}(I, \mathbb{R})$. La fonction f' est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, donc par hypothèse de récurrence :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

Le théorème de primitivation des développements limités montre aussitôt le résultat souhaité :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right)$$

$\square$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\
&= f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\
&= f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^{k} + o\left((x-a)^{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^{k} + o\left((x-a)^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemple

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$

  $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$

  $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right).$$

Remarque.
On l'a dit, la formule de Taylor-Young est difficile à appliquer en pratique pour obtenir un DL, car elle impose de calculer les dérivées successives de la fonction.
On présente dans cette section des résultats permettant d'obtenir des DL à partir de DL connus :

- par intégration de DL.
- par opérations (combinaison linéaire, produits,...) sur les DL.

Combinaison linéaire, produit

Proposition

Supposons que f et g admettent des développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \text{ et } (x) = Q_n(x) + o(x^n).$$

- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, *$\lambda f + \mu g$ a un développement limité à l'ordre n en 0 : et*

  $$(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda P_n + \mu Q_n)(x) + o(x^n).$$

- *fg a un développement limité à l'ordre n en 0 et*

  $$(fg)(x) = T_n(PQ)(x) + o(x^n)$$

  où $T_n(PQ)$ désigne la troncature à l'ordre n du polynôme PQ.

Démonstration.

- On a :
$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to 0}{=} (\lambda P_n + \mu Q_n)(x) + o(x^n)$$
C'est le $DL_n(0)$ de $\lambda f + \mu g$ car $\lambda P_n + \mu Q_n$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$.
- On a par produit des développements limités :
$$f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} (P_n(x) + o(x^n))(Q_n(x) + o(x^n)) = P_n(x)Q_n(x) + o(x^n)$$
car $P_n(x)o(x^n) + Q_n(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n)$ est négligeable devant x^n en 0 . On sait que $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_nQ_n)(x) + x^{n+1}R_n(x)$ où R_n est une fonction polynomiale. On en déduit que $P_n(x)Q_n(x) = T_n(P_nQ_n)(x) + o(x^n)$ et donc :
$$f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} T_n(P_nQ_n)(x) + o(x^n)$$
qui est le $DL_n(0)$ de fg car $T_n(P_nQ_n)$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$.

Exemple

- Calculons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \cos x \sin x$:
$$\cos x \sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)$$
$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) = x - \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$
- Calculons le $DL_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{1-x}$.
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$
D'où par produit :
$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)$$
ce qui donne, en développant et en simplifiant :
$$f(x) = 1 + (x + x) + \left(\frac{x^2}{2} + x^2 + x^2\right) + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + 2x^3\right) + o\left(x^3\right)$$
$$= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

Composition

Proposition

Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ ont des développements limités en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P_n(x) + o\left(x^n\right) \quad ; \quad g(x) = Q_n(x) + o\left(x^n\right),$$

si $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, alors la composée $g \circ f$ a un développement limité

$$g \circ f(x) = T_n\left(Q_n \circ P_n\right)(x) + o\left(x^n\right).$$

Démonstration.

Puisque $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, on peut factoriser dans le DL de f en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + o\left(x^n\right) = x\left(P_{n-1}(x) + o\left(x^{n-1}\right)\right).$$

$$g \circ f(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k\left(P_n(x) + o\left(x^n\right)\right)^k + x^n\left(P_{n-1}(x) + o\left(x^{n-1}\right)\right)^n \varepsilon_g(f(x)).$$

Démonstration.

On regarde à présent chaque terme de cette expression :

- $(P_n(x) + o(x^n))^k$: en développant par la formule du binôme, on a un terme en $(P_n(x))^k$ et tous les autres termes contiennent $o(x^n)$ et sont négligeables devant x^n. Ainsi, on a :

$$(P_n(x) + o(x^n))^k = (P_n(x))^k + o(x^n).$$

- $x^n \left(P_{n-1}(x) + o\left(x^{n-1}\right)\right)^n \varepsilon_g(f(x))$: on a $\lim\limits_{x \to 0} \left(P_{n-1}(x) + o\left(x^{n-1}\right)\right)^n \varepsilon_g(f(x)) = 0$, donc :

$$x^n \left(P_{n-1}(x) + o\left(x^{n-1}\right)\right)^n \varepsilon_g(f(x)) = o(x^n).$$

□

Démonstration.

Finalement, on obtient que :

$$g \circ f(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k \left(P_n(x)\right)^k + o\left(x^n\right) = Q_n \circ P_n(x) + o\left(x^n\right).$$

Et comme $Q_n(x) \circ P_n(x) = T_n\left(Q_n \circ P_n\right)(x) + x^{n+1} R_n(x)$ où R_n est une fonction polynomiale, on en déduit que

$$Q_n(x) \circ P_n(x) = T_n\left(Q_n \circ P_n\right)(x) + o\left(x^n\right)$$

C'est bien le $DL_n(0)$ de $g \circ f$ car $T_n\left(Q_n \circ P_n\right)$ est une fonction polynomiale de degré $\leq n$.

$\square$

Exemple

Déterminons le $DL_4(0)$ de $x \mapsto f(x) = (1+x)^x$. Pour tout $x \in I, f(x) = e^{x\ln(1+x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(1+x) = 0$.

On utilise la composition des DL. Le développement limité à l'ordre 4 de $x \mapsto x\ln(1+x)$ s'écrit :

$$x\ln(1+x) = x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right) = \underbrace{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o\left(x^4\right)}_{=u(x)}.$$

On a $u(x)^2 = x^4 + o\left(x^4\right), u(x)^3 = o\left(x^4\right)$. Il suffit donc de faire le $DL_2(0)$ de l'exponentielle :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$$

On obtient en substituant (composition à droite) :

$$(1+x)^x = 1+\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right)+\frac{1}{2}x^4+o\left(x^4\right) = 1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4+o\left(x^4\right)$$

Quotient de DL

Proposition

Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$.
Si f et g ont des développements limités à l'ordre n en 0 et si g admet une limite finie non nulle en 0,
alors $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

Démonstration.

Puisque $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \ell \neq 0$, il existe un intervalle J contenant 0 et inclus dans I sur lequel g ne s'annule pas sur $\mathcal{D} \cap J$, et la fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $\mathcal{D} \cap J$.

Écrivons $g(x) = \ell(1 + u(x))$ (où $u(x) = \dfrac{g(x) - \ell}{\ell}$).

On a alors : Puisque $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0$ et que u admet un $DL_n(0)$ (car c'est le cas pour g), on en déduit que $x \mapsto \dfrac{1}{1 + u(x)}$ admet un $DL_n(0)$ par composition des $DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et de $x \mapsto u(x)$.

On obtient ainsi le $DL_n(0)$ de $\dfrac{f}{g}$ en multipliant le $DL_n(0)$ ainsi obtenu avec celui de f. $\square$

Remarque

Pour faire le DL en 0 d'un quotient $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ avec $\lim_0 g \neq 0$, on se ramènera toujours (comme dans la preuve précédente) à un développement limité d'une fonction de la forme :

$$x \mapsto \frac{1}{1+u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple Déterminons le $DL_5(0)$ de tan.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{1 \underbrace{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)}_{=u(x)}} = \sin x \times \frac{1}{1+u(x)}$$

$$= \sin x \times \left(1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + u(x)^4 - u(x)^5 + o\left(x^5\right)\right)$$

On a $u(x)^2 = \frac{x^2}{4} + o\left(x^4\right), u(x)^3 = o\left(x^4\right)$.
D'où en substituant :

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)\right)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5x^5}{24} + o\left(x^5\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)$$

Remarque

Si g tend vers 0, il est encore possible que la fonction $\dfrac{f}{g}$ possède un développement limité : si f et g admettent des $DL_n(0)$ de formes normalisées :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{p_1}\left(a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \ldots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o\left(x^{n_1-p_1}\right)\right) \\ g(x) &= x^{p_2}\left(b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \ldots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o\left(x^{n_2-p_2}\right)\right) \end{aligned}$$

avec $a_{p_1}, b_{p_2} \neq 0$, alors le quotient s'écrit :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{p_1-p_2}\underbrace{\left(\frac{a_{p_1} + a_{p_1+1}x + \ldots + a_{n_1}x^{n_1-p_1} + o\left(x^{n_1-p_1}\right)}{b_{p_2} + b_{p_2+1}x + \ldots + b_{n_2}x^{n_2-p_2} + o\left(x^{n_2-p_2}\right)}\right)}_{=h(x)}$$

Comme $b_{p_2} \neq 0$, la proposition précédente, assure que la fonction h possède un développement limité.
De plus, le terme constant du développement limité de la fonction h vaut $\dfrac{a_{p_1}}{b_{p_2}}$ donc est non nul.
Par suite $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité si et seulement si $p_1 - p_2 \in \mathbb{N}$, c'est à dire $p_2 \leq p_1$, et son ordre est $\min\left(n_1 - p_1, n_2 - p_2\right)$.

Exemple

Déterminer, s'il existe, le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$.

- Prédiction de l'ordre des DL à choisir (au brouillon) :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} = \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots} = \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \dots\right)}{x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots\right)}$$

$$= x \times \underbrace{\left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \dots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots}\right]}_{=h(x)}$$

Pour obtenir le $DL_3(0)$ de f, il faut donc le $DL_2(0)$ de h ce qui nécessite un $DL_2(0)$ du numérateur et du dénominateur de h. Cela nécessite donc un $DL_4(0)$ de $x \mapsto e^x - 1 - x$ (on a factorisé par x^2) et un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ (on a factorisé par x).

- Rédaction :

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

ou sous forme normalisée :

$$e^x - 1 - x = x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o\left(x^2\right)\right) \text{ et } \ln(1+x) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right)$$

On obtient l'écriture suivante :

$$f(x) = x \times \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + o\left(x^2\right)\right) \times \frac{1}{1 \underbrace{- \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)}_{=u(x)}}$$

Comme on a :

$$u(x)^2 = \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)$$

on obtient :

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)} = \frac{1}{1 - u(x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o\left(x^2\right)$$

Pour obtenir le développement limité de f cherché, il reste à calculer le produit :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{24}+o\left(x^2\right)\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right)\right)\\
&= x\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right)+\left(-\frac{x^2}{24}+\frac{x^2}{12}+\frac{x^2}{24}\right)+o\left(x^2\right)\right)\\
&= x\left(\frac{1}{2}+\frac{5x}{2}+\frac{x^2}{12}+o\left(x^2\right)\right)\\
&= \frac{x}{2}+\frac{5x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Application des Développements Limités

Rappel

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n en a de partie régulière non nulle. On écrit sa forme normalisée :

$$f(x) = (x-a)^p \left(a_p + a_{p+1}(x-a) + \ldots + a_{n-p}(x-a)^{n-p} + o\left((x-a)^{n-p}\right)\right).$$

Alors on a : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} a_p(x-a)^p$

Exemple

Déterminons un équivalent au voisinage de 0 de $\dfrac{\sin(2x) - sh(2x)}{(2x - \sin x - \tan x)^2}$.

Cherchons un équivalent du numérateur :

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o\left(x^3\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(2x) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

ce qui donne : $\sin(2x) - sh(2x) \sim -\dfrac{8}{3}x^3$.

Cherchons un équivalent du dénominateur.

$$\begin{aligned} 2x - \sin x - \tan x &= 2x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right) - \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right) \\ &= -\frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right) \sim -\frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

On en déduit par produit et quotient d'équivalents :

$$\frac{\sin(2x)-\operatorname{sh}(2x)}{(2x-\sin x\tan x)^2} \sim \frac{-\frac{8}{3}x^3}{\left(-\frac{1}{6}x^3\right)^2} \sim -\frac{96}{x^3}$$

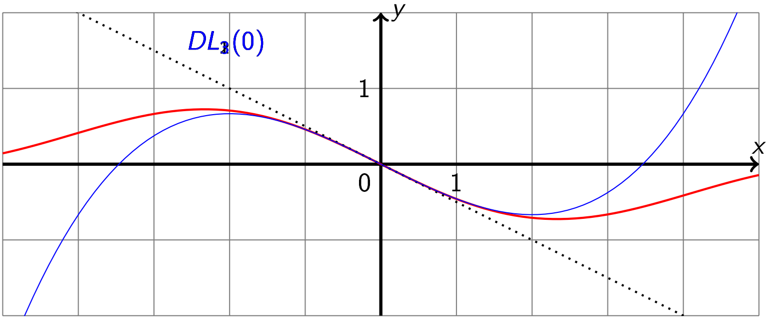
Rappel Si f admet un $DL_1(a), f$ est dérivable en a et la courbe représentative de f admet une tangente en a.
Pour déterminer la position relative de la courbe représentative d'une fonction f par rapport à sa tangente, on cherche un equivalent de $x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$ en a en effectuant un DL de f :

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \sim a_p(x-a)^p \quad \text{avec} \quad a_p \in \mathbb{R}^* \text{ et } p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$$

Alors $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

- si p est pair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est de signe constant au voisinage de a. La courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente en a (suivant le signe de a_p).
- si p est impair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ change de signe en a.

La courbe traverse sa tangente en a. On parle de point d'inflexion.


y
$DL_3(0)$
1
x
0
1

Remarque.
Dans le cas d'un point critique a, c'est à dire si $f'(a) = 0$, cette étude nous dit si on a un extremum local (si n pair) ou non (si n est impair).
Exemple
Soit $f : x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{x}$.$f$ admet le $DL_3(0)$ suivant :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^3 + o\left(x^3\right)$$

Ainsi f est dérivable en 0, et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. Comme $f(x) + \dfrac{1}{2}x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{24}x^3$, qui change de signe en 0, la courbe représentative de f traverse sa tangente en 0 . Ainsi f admet un point d'inflexion en 0 .

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\pm\infty$. On dit que f possède un $DL_n(\pm\infty)$ si la fonction $g : u \to f\left(\frac{1}{u}\right)$ possède un $DL_n(0)$.

Exemple Calculons le $DL_2(\infty)$ de $f : x \mapsto \frac{x}{x-1}$. On pose $u = \frac{1}{x}$. Alors $g(u) = \frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o\left(u^2\right)$ et on en déduit le $DL_2(\infty)$ de f :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f *admet une asymptote oblique en* $\pm\infty$
s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x) - ax - b$ *tende vers 0 en* $\pm\infty$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

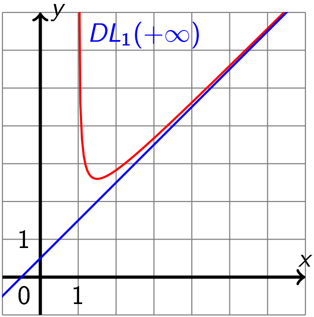
On souhaite préciser son comportement en $+\infty$, en étudiant l'existence éventuelle d'une asymptote oblique et sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$. Pour cela, on procèdera comme suit :

- On effectue un $DL_2(+\infty)$ de $\dfrac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(1/x^2\right).$$

- En multipliant par x, il vient $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} a_0 x + a_1 + \dfrac{a_2}{x} + o(1/x)$. La courbe admet alors la droite $y = a_0 x + a_1$ pour asymptote oblique en $+\infty$.
- La position de la courbe de f par rapport à l'asymptote oblique est donnée par le signe de $\dfrac{a_2}{x}$ (si $a_2 = 0$, on augmente l'ordre du DL jusqu'à trouver un coefficient non nul).

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. Déterminons l'asymptote éventuelle de f en $+\infty$.



Exemple. Soit $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. Déterminons l'asymptote éventuelle de f en $+\infty$.

On pose $u = \dfrac{1}{x}$ et on étudie $\dfrac{f(x)}{x} = uf\left(u^{-1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$ (on recherche l'asymptote en $+\infty$, donc $0 < u < 1$).

On effectue le $DL(0)$ de $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right)$$

Donc on obtient $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^{-1}\right)$.

La droite $y = x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe et le graphe de f est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ (car $f(x) - x - \dfrac{1}{2} \sim \dfrac{3}{8x} > 0\Big)$.

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Les formules du tableau qui suit doivent être connues PAR COEUR sans délai et sans la moindre hésitation.

Pour les fonctions paires, les développements limités sont donnés à l'ordre $2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais par exemple, puisque vous connaissez un développement limité de la fonction cosinus au voisinage de 0 aux ordres $0, 2, 4, 6 \ldots$, bien sûr que vous en connaissez un à l'ordre 3 , il suffit de tronquer au bon endroit : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$.

Notez bien que ce développement est PLUS FIN que le développement à l'ordre 2 : $\cos x \underset{x \to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$. Sur le développement à l'ordre 3, on ne voit pas de terme d'ordre 3 mais ce n'est qu'une impression, IL Y A UN TERME D'ORDRE 3 , avec un coefficient 0 .

À l'ordre 2, c'est différent, on ne voit pas de terme d'ordre 3 parce qu'un tel terme est réellement invisible à ce niveau de précision.

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum^{n} x^k + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$$

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{x\to 0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$