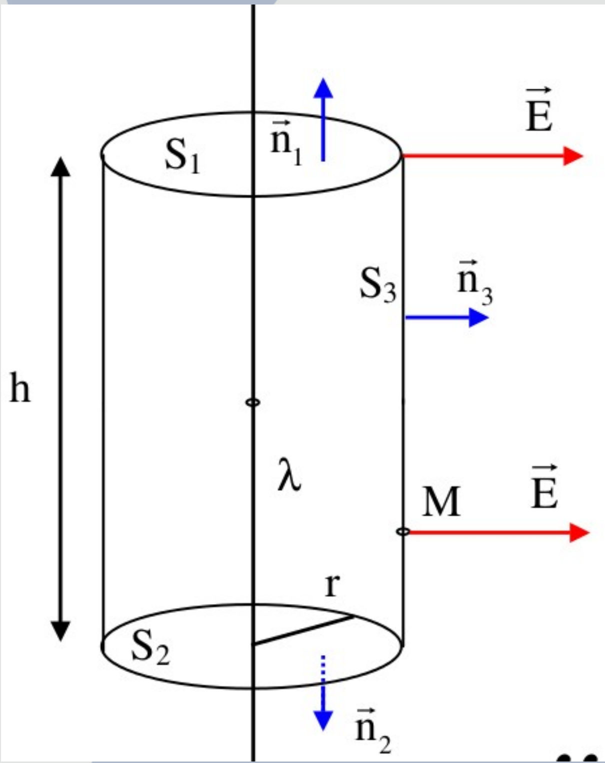
Électromagnétisme

Chapitre 4 – Théorème de Gauss



Physique - 2021-2022

Présentation rédigée par Émilie Dupont (Cergy) : emilie.dupont@cyu.fr, CY308

Programme d’électrostatique

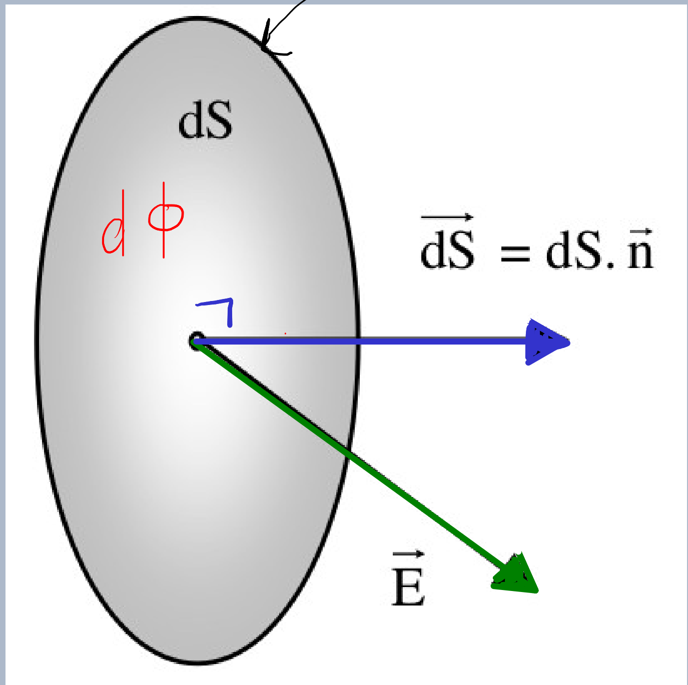
- Chapitre 1 – Force entre deux charges
- Chapitre 2 – Champ électrostatique
- Chapitre 3 – Théorème de superposition et symétries
- **Chapitre 4 – Théorème de Gauss**
- Chapitre 5 – Potentiel électrostatique
- Chapitre 6 – Conducteurs en équilibre électrostatique

1.4 Théorème de Gauss

1.4.1 Flux du champ d'une charge à travers une surface

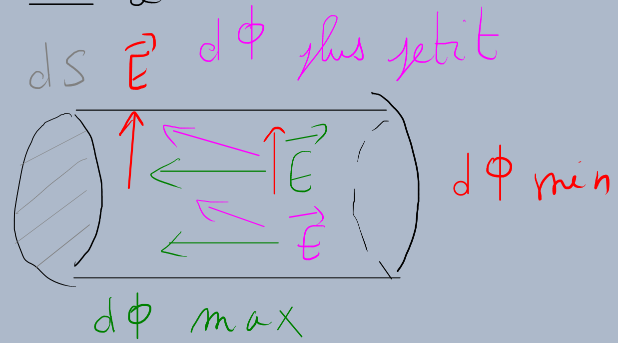
Flux élémentaire :

surface élémentaire dS



Vecteur surface avec

$\vec{n}$ vecteur unitaire $\perp$ à la surface dS



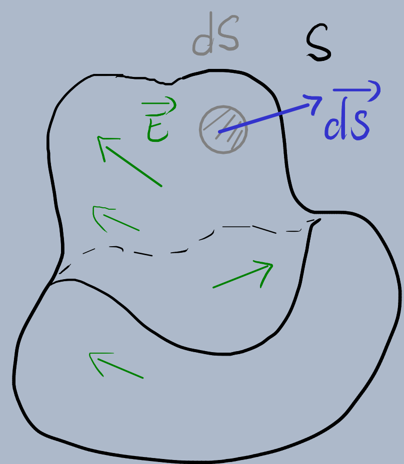
Le flux élémentaire dφ du champ $\vec{E}$ à travers dS est défini par :

$$d\phi = \vec{E}.\vec{dS} = \vec{E}.\vec{n}\ dS \text{ avec} \qquad dS \text{ en } m^2,\ d\phi \text{ en V.m et } \vec{E} \text{ en V.m}^{-1}$$

produit scalaire

1.4 Théorème de Gauss

1.4.1 Flux du champ d'une charge à travers une surface

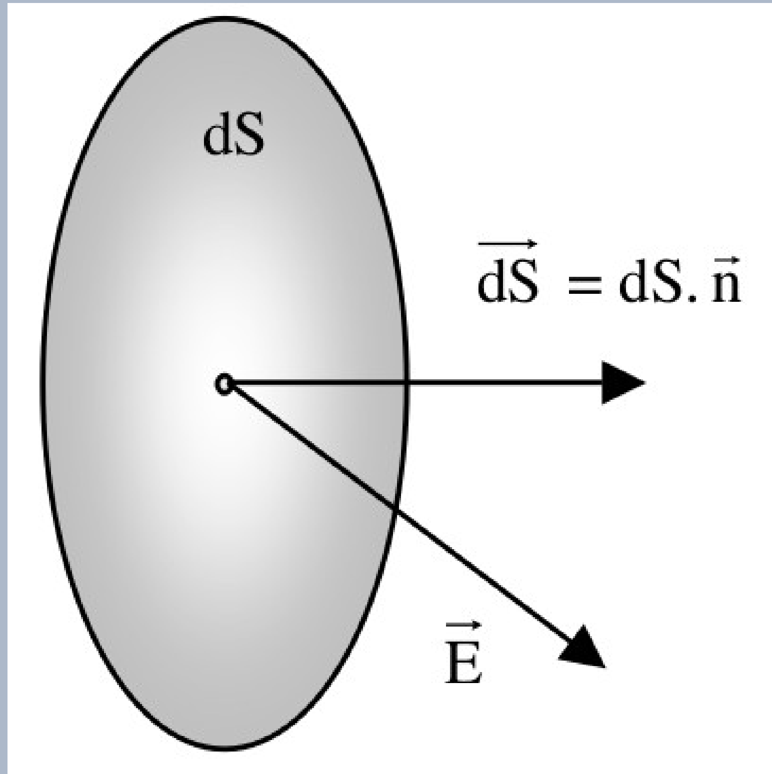


Flux total à travers une surface

$d\phi$

Somme continue des flux élémentaire

$$\Phi = \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$$



1.4 Théorème de Gauss

1.4.2 Théorème de Gauss

• choix une surface de Gauss S_G fermée qui contient une portion de la distribution de charges

Théorème : Le flux Φ du champ $\vec{E}$ à travers une surface fermée S_G est proportionnel à la charge q_{int} contenue dans le volume V délimité par la surface S

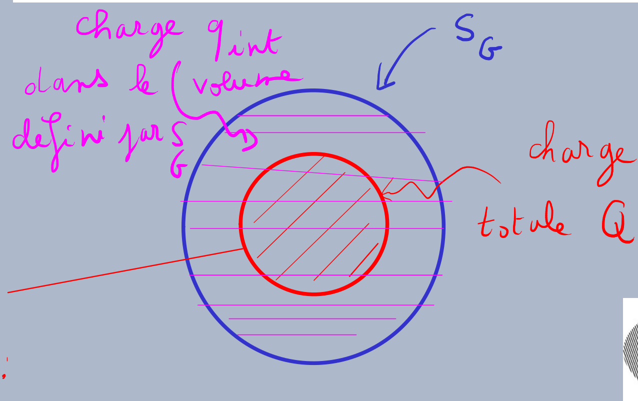
$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

S_G : surface de Gauss

Φ	flux	[V.m]
q_{int}	charge	[C]
ε_0	permittivité absolue du vide [SI]	

souvent S_G est telle que $\vec{E}$ est constant sur cette surface

sphère chargée :

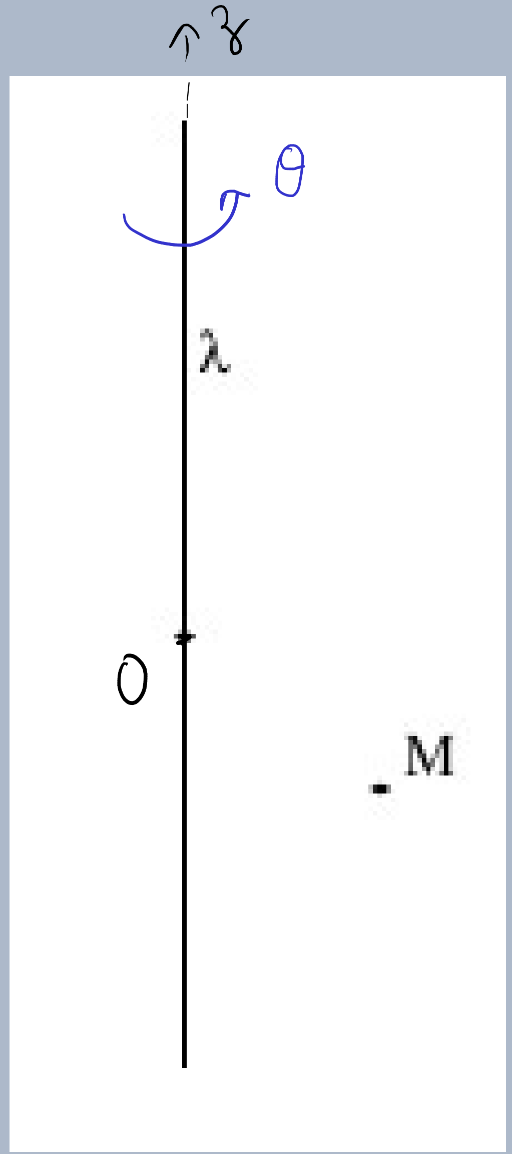


• $q_{int} = Q$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Champ électrostatique créé par une distribution linéique uniformément chargée



$(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

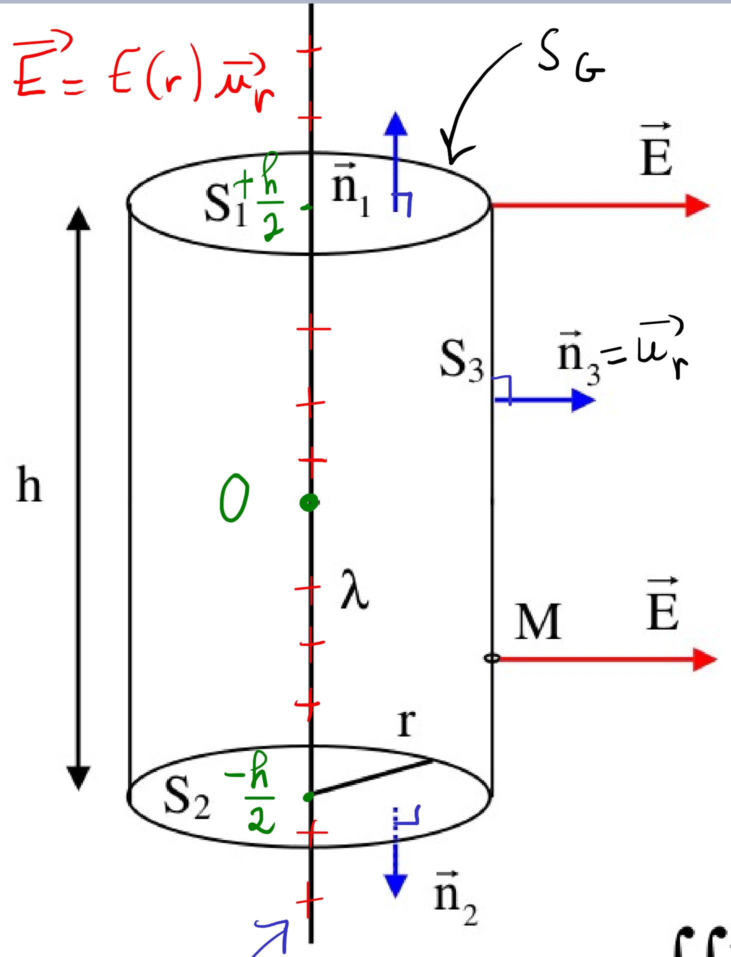
Il existe des symétries cylindriques et invariance de translation, par conséquent, le champ $\vec{E}$ en M s'exprime en coordonnées cylindriques : ⇨ $\boxed{\vec{E}(r) = E(r).\vec{u}_r}$

invariances : $\vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

symétrie : cf chap.3

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples



$\lambda = \frac{dq}{dl}$

On applique le théorème de Gauss sur S_1, S_2 et S_3.

Surface de Gauss : S_G cylindre fermé

Le flux du champ $\vec{E}$ pour S_1 et S_2 est nul car :

$\vec{E} \perp \vec{n}_1$ et $\vec{E} \perp \vec{n}_2$

$S_G = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$\hookrightarrow \Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{E}\vec{n_1}dS = 0$

$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$

$\hookrightarrow \Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{E}\vec{n_2}dS = 0$

Calcul du flux à travers la surface S_3 latérale ;

$$\Phi_3 = \iint_{S_3} \vec{E}\vec{n_3}dS = \iint_{S_3} E(r).dS_r = E(r)\iint_{S_3} dS_r = E(r).2\pi rh$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_3 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \qquad E(r).2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}}$$

$$\Phi_3 = \iint_{S_3} E(r)\,\vec{u}_r \cdot dS_r\,\vec{u}_r = \iint E(r)\,dS_r$$

S_3 surface latérale

or :

$$d\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{dS} = \begin{vmatrix} r\,d\theta\,dz = dS_r \\ dr\,dz = dS_\theta \\ r\,dr\,d\theta = dS_z \end{vmatrix}$$

$$\Phi_3 = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-h/2}^{h/2} \underbrace{E(r)\;r}\,d\theta\,dz = E(r)\,r\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h/2}^{h/2} dz$$

r constant
= rayon du cylindre

$$\Phi_3 = 2\pi r h\;E(r) \quad \text{et} \quad q_{int} = \lambda h$$

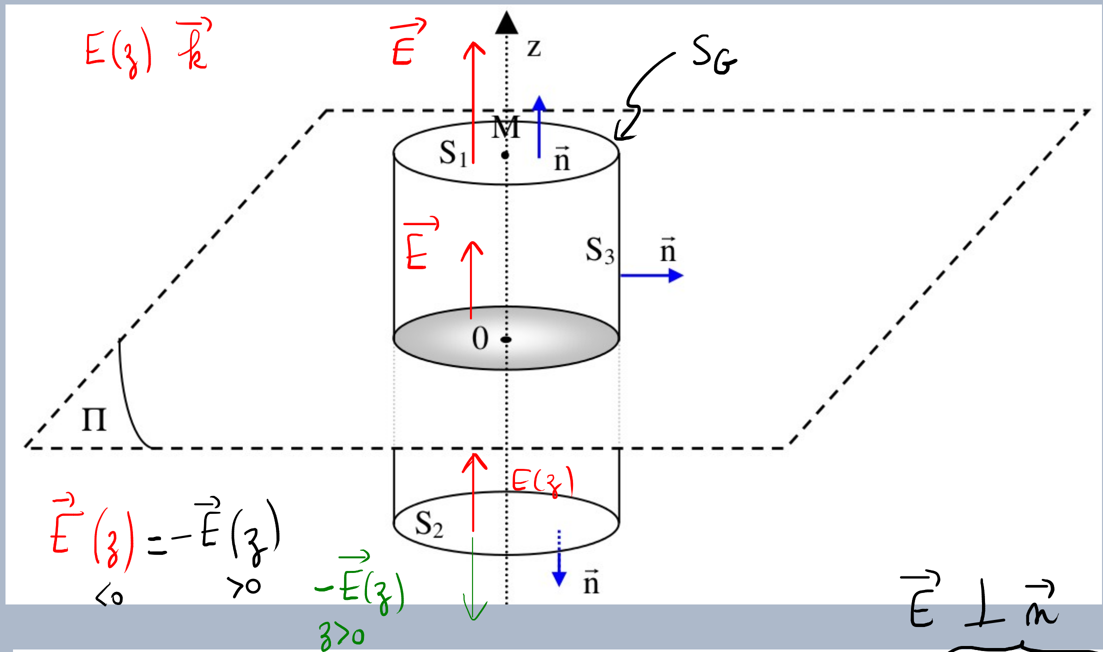
portion de fil de longueur h

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé

plan infini Π portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface.



surface de Gauss = cylindre de rayon r et de hauteur h

$\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à Π.

$\Rightarrow \vec{E} = E_z(x,y,z)\,\vec{k}$ au point M

Il existe une invariance par translation selon x et y :

$\Rightarrow \vec{E} = E_z(z)\,\vec{k}$ au point M

$\vec{E} = E_z(z)\,\vec{k}$

$$\Phi = \iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}\,\vec{n}\,dS + \underset{-E(z_<)\times S}{\iint_{S_2} \vec{E}\,\vec{n}\,dS} + \overbrace{\underbrace{\iint_{S_3} \vec{E}\,\vec{n}\,dS}_{=0}}^{\vec{E}\perp\vec{n}}$$

$$\Phi = E(z).S + E(-z).S + 0$$

$$= 2ES \quad \text{car} \quad \vec{E}(-z) = -\vec{E}(z) \quad \text{et} \quad \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$$

donc

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

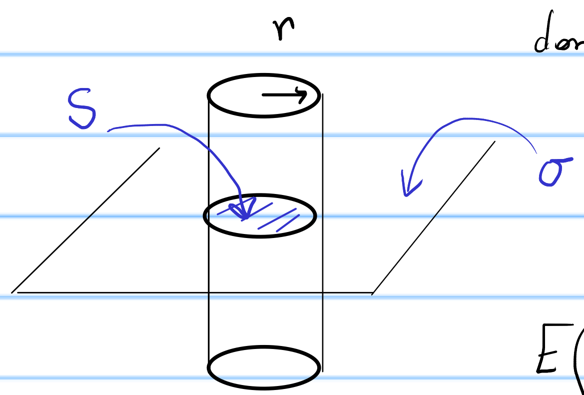
1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

$$\Phi = 2ES = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$ Théo. de Gauss

remarque : les paramètres de S_G (ici S) doivent se compenser et ne pas apparaître dans $\vec{E}$

$q_{int} = \sigma \times S$ charge à l'intérieur de S_G sur le plan chargé

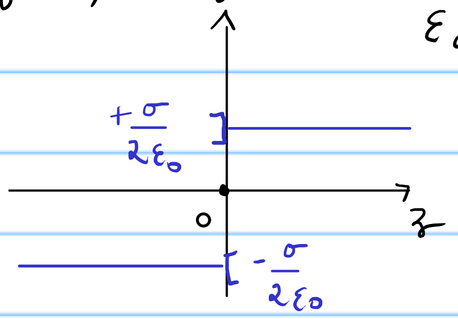


donc $2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E(z=0^+) - E(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

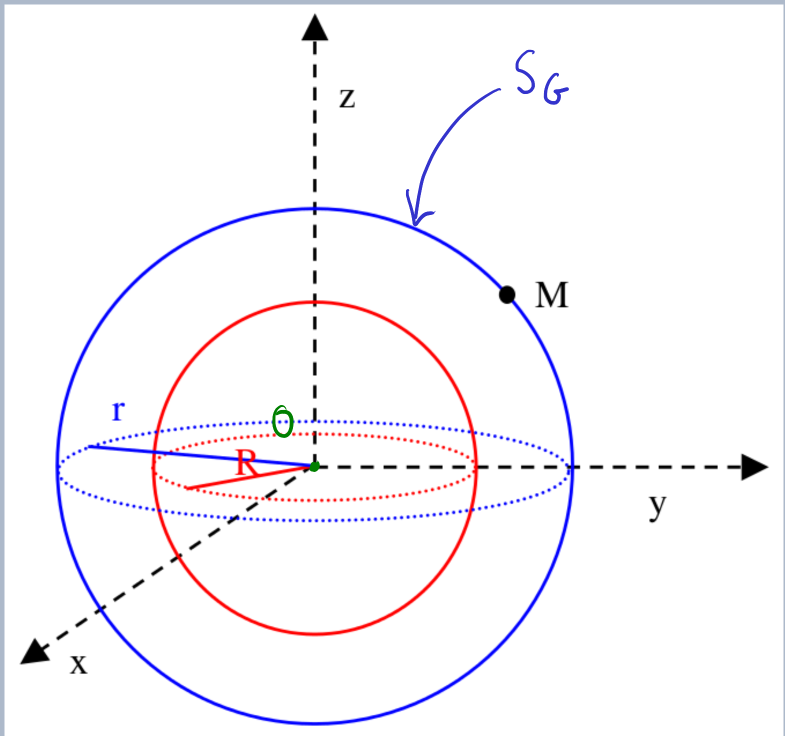
discontinuité à la traversée de la surface chargé :



1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Champ électrostatique créé par une boule uniformément chargée



- symétrie sphérique.
- $\vec{E}(r) = E(r).\vec{u_r}$

. S_G : sphère de rayon r centrée en O

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}\vec{dS} = \oiint_{S_G} \vec{E}\vec{n}.dS = \oiint_{S_G} E(r).dS = E(r).\oiint_{S_G} dS = E(r).4\pi r^2$$

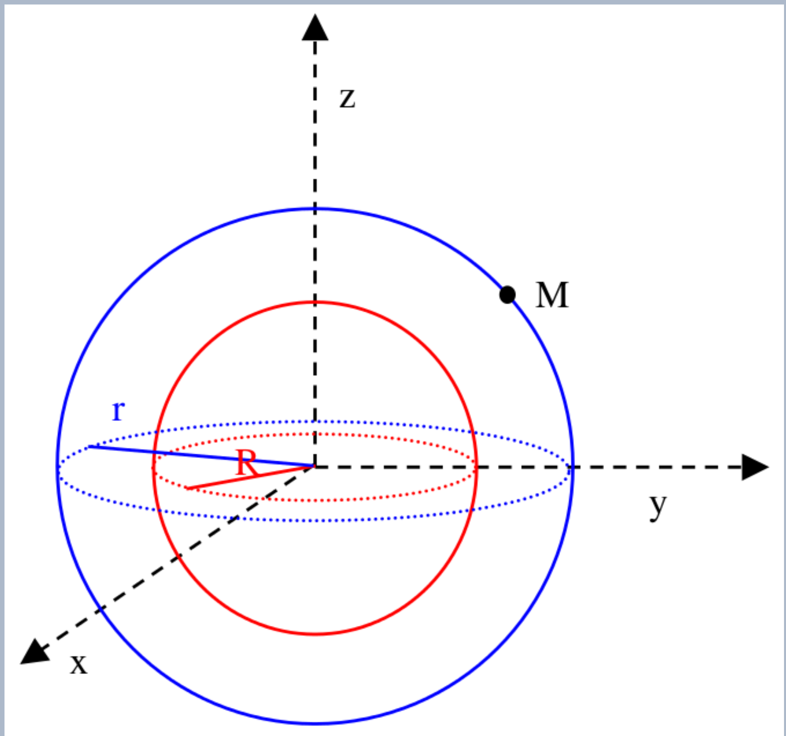
donc

$$\Phi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = E(r).4\pi r^2$$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

$\Phi = 4\pi r^2 E(r)$



Si la sphère de Gauss a un rayon r > R

$E(r) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0 r^2}$

$q_{int} = Q$

$Q = \rho V$

$= \rho \frac{4}{3}\pi R^2$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Si la sphère de Gauss a un rayon r < R

$q_{int} = \rho \frac{4}{3}\pi r^2$

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

$E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \times \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}$

1.4.3 Exemples

① domaine de définition : distribution volumique

$\Rightarrow \vec{E}$ défini et continu en tout point de l'espace.

② système de coordonnées : $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$

③ invariances : suivant θ et ϕ $\quad \vec{E}(r)$

④ symétries : $\forall$ plan passant par O et M = plan de symétrie

$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$

⑤ Théorème de Gauss :

$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\,d\varphi \end{vmatrix} \quad \text{donc} \quad dS_r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

constant à r fixé

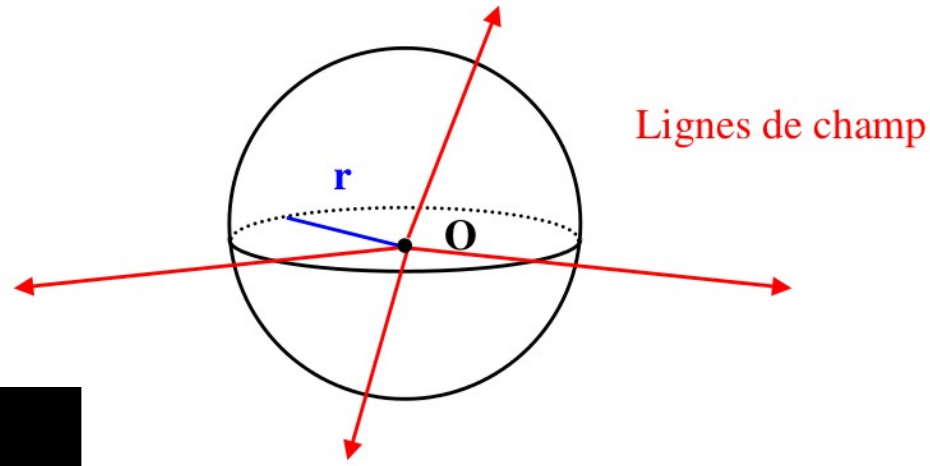
$$\Phi = \iint_{S_G} E(r)\,\underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{dS}}_{dS_r} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 E(r)\,\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

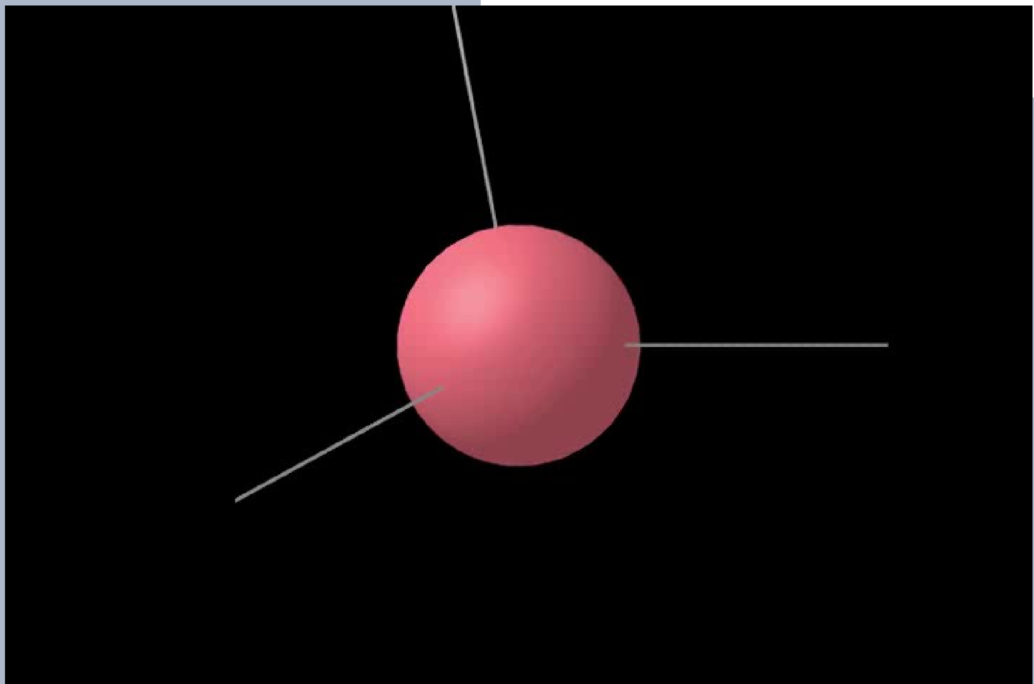
$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

1.4 Théorème de Gauss

1.4.3 Exemples

Ainsi les lignes de champ produites par une charge ponctuelle placée en O sont des droites passant par O.





Bibliographie

- [1]Polycopié de cours
- [2] CUPGE - CY : Introduction à l'électromagnétisme
- [3] Wikipédia
- [4] Encyclopédie Universalis
- [5] David Sénéchal - « Histoire des sciences » PHQ399 Université de Sherbrooke, QC
- [6] pour la suite : Khan Academy , Unisciel etc…